МПС СССР

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

В. П. КАПРАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ И СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ДЕФОРМАЦИЕЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1963

Публичная защита диссертации состоится на заседании Объединенного Ученого Совета 4 апреля 1963 г.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого Совета или прислать свои отзывы о работе по адресу: г. Днепропетровск, Севастопольская ул., 15.

Институт инженеров железнодорожного транспорта.

МПС СССР

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

В. П. КАПРАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ И СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ДЕФОРМАЦИЕЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель —
профессор, доктор технических наук
Г. Л. ПАВЛЕНКО

Днепропетровск
1963

Работа выполнена в Днепропетровском химико-технологическом институте им. Ф. Э. Дзержинского.

В соответствии с семилетним планом развития народного хозяйства нашей страны за последнее время значительно расширилось использование в строительстве и машиностроении легированных сталей и ряда новых конструкционных материалов, как сплавы алюминия, стеклопластики и др. Большинство указанных материалов в значительном диапазоне рабочих нагрузок имеют нелинейную зависимость между напряжением и деформацией, причем некоторые из них являются нелинейно-упругими. Учет нелинейных факторов в задачах динамики вскрывает новые, практически важные, закономерности в поведении систем, которые не могут быть обнаружены исходя из линейных дифференциальных уравнений.

Исследование колебаний упругих систем в нелинейной постановке (параметрические колебания, автоколебания висячих мостов и авиационных конструкций) стало развиваться, в основном, в последнее десятилетие после фундаментальных работ профессоров В. В. Болотина и И. И. Гольденблата. В настоящее время этому вопросу посвящено значительное число научных исследований.

В данной работе проводится исследование свободных колебаний, статической и динамической устойчивости прямолинейных стержней и арок при нелинейной зависимости между напряжением и деформацией.

Диссертация состоит из шести глав. В первой главе содержится обзор литературы по динамической устойчивости стержней и арок, расчету стержней на устойчивость в условиях ползучести и устойчивости сжато-изогнутых стержней за пределом упругости при криволинейном очертании диаграммы растяжения.

Во второй главе выводятся выражения для внутреннего изгибающего момента, действующего в сжато-изогнутом стержне прямоугольного поперечного сечения. Нелинейная зависимость между напряжением σ и относительной деформацией апроксимируется степенной функцией с двумя параметрами вида

$$\sigma = K\varepsilon^{1/n} \tag{1}$$

Зависимость (1) использовалась для апроксимирования криволинейного участка диаграммы растяжения в работах А. В. Дятлова, П. А. Лукаша, А. П. Филина, Н. Хоффа и др. авторов.

Данная зависимость является достаточно общей. Так при $n=1$ она соответствует закону Гука и при $n=$ —закону деформирования жестко-пластического тела.

Недостатком указанной зависимостти является плохое совпадение с опытной диграммой работы материала при малых значениях действующих напряжений.

Постоянные К и n, входящие в принятый закон деформирования (1), определяются по методу, разработанному в ЦНИИСКе канд. техн. наук П. А. Лукашем.

Рассмотрены случаи работы всего сечения на сжатие (малые прогибы) и когда в части сечения имеются растягивающие напряжения. Выражения для изгибающих моментов M в безразмерных величинах соответственно имеют вид

$$m=\frac{1}{n\lambda^2\alpha^{n-1}\rho}\left[1-\frac{B_1}{(n\lambda\alpha^n\rho)^2}\right] \qquad (2)$$

$$m=\frac{n}{1+2n}\left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\right)^{1+1/n}\frac{1}{\rho^{1/n}}\left[1-\frac{(n-1)(2n+1)}{2n^2}\left(\frac{\lambda\rho}{\sqrt{3}}\right)^{2/n}\alpha^2-\right.$$
$$\left.-\frac{(n-1)(n-3)(2n+1)}{24n^4}\left(\frac{\lambda\rho}{\sqrt{3}}\right)^{4/n}\alpha^4\right] \qquad (3)$$

где:

$$m=\frac{M}{FKl}, \quad \alpha=\frac{P}{FK}, \quad \lambda=\frac{l}{i}; \quad \rho=\frac{R}{l},$$

$$B_1=0{,}1\,(1-n)(n+2)$$

$F=bh$—площадь поперечного сечения,

P— сжимающая продольная сила,

l—длина стежня,

R—радиус кривизны упругой линии,

i—радиус инерции поперечного сечения.

В третьей главе рассматриваются свободные колебания и динамическая устойчивость сжатых стержней идеализированного двутаврового и прямоугольного поперечных сечений при нелинейной упругой зависимости $\sigma-\varepsilon$ вида (1).

На примере стержня идеализированного двутаврового сечения проводится сравнение влияния нелинейной зависимости $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ на свободные колебания сжатого стержня по отношению к другим нелинейным факторам. Показано, что в ряде случаев нелинейность упругой зависимости $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ является преобладающим нелинейным фактором.

В случае периодической продольной силы

$$P = P_0 + P_t \cos\theta t \tag{4}$$

принимая для перемещений стержня **выражение**

$$y(x,\ t) = f(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (5$$

и используя метод Бубнова-Галеркина, получено уравнение динамической устойчивости стержня идеализированного двутаврового сечения

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\mu\cos\theta t - \mu_1 \cos^2\theta t - \ldots) w(t) -$$

$$- \frac{B}{8}\Omega^2 \eta (1 + \mu_2 \cos\theta t + \ldots)\, w^3(t) = 0 \tag{6}$$

где:

$$w(t) = \frac{f(t)}{i}, \quad \Omega^2 = \omega^2(1 - c^n{}_1), \quad \omega^2 = \frac{k^4\pi^4 KI}{l^4 m}, \quad c_1 \quad \frac{P_0}{P_\tau}$$

$$= \frac{nc^n{}_1}{2(1-c^n{}_1)} \cdot \frac{P_t}{P_0}$$ — **коэффициент возбуждения**,

$$\eta = \frac{c^n{}_1}{1 - c^n{}_1}, \quad \mu_1 = (n-1)\frac{P_t}{P_0}, \quad \mu_2 = n\frac{P_t}{P_0}, \quad B = (n-1)(n-2)$$

$P \quad FK\sqrt{\frac{\pi^2}{n\lambda^2}}$ **критическая сила по теории касательного модуля.**

Определяя положение главной области неустойчивости и приняв для функции $w(t)$ выражение

$$w(t) = a\sin\frac{\theta t}{2} + b\cos\frac{\theta t}{2}$$

методом Бубнова-Галеркина получено следующее выражение, связывающее критическую частоту возмущающей силы θ и безразмерную амплитуду колебаний А:

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 1 \pm \mu - \frac{1}{2}\mu\mu_1 - \frac{3}{32}B\eta A^2. \tag{7}$$

При $n=1$, что соответствует «спрямлению» нелинейной характеристики материала, $\mu_1=B=0$, $P_\tau=P_э$, где $P_э$ — эйлерово значение критической силы, уравнение (7) совпадает с известным уравнением для стержней, материал которых точно следует закону Гука. Так как для значений n, удовлетворяющих неравенству $1<n<2$, что соответствует малой «мягкой» нелинейности, коэффициент В отрицателен, увеличение амплитуды будет вызывать «затягивание» колебаний в сторону больших значений критической частоты θ. При $n>2$ «затягивание» колебаний будет происходить в сторону меньших значений частоты θ.

Для оценки смещения границ главной области динамической неустойчивости, вызванного нелинейностью зависимости $\sigma=\varphi(\varepsilon)$ по сравнению с их положением при $n=1$, выражение (7) представлено в виде

$$\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2}=\frac{K}{E}\,\frac{1-c''_1}{1-c_2}\left(1\quad\mu-\frac{1}{2}\mu\mu_1-\frac{3}{32}B\eta_1A^2\right) \tag{8}$$

где: Ω_1—значение Ω при $n=1$, $c_2=\dfrac{P_0}{P_э}$, $A=\sqrt{a^2+b^2}$

Как следует из проведенных вычислений, для случая малой «мягкой» нелинейности происходит смещение главной области динамической неустойчивости (включая и основание) в сторону меньших значений возбуждающей частоты θ.

В этой же главе рассмотрена динамическая устойчивость стержня прямоугольного поперечного сечения. В первом приближении для критических значений отношения $\theta/2\Omega$ получена формула

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2}=1\pm\frac{1}{2}\gamma\mu_1+\frac{1}{2}\gamma\mu_1^2-\frac{9}{16}B_1\eta_1A^2, \tag{9}$$

где

$$\gamma=1+\frac{n}{n-1}\,\frac{c_1^n}{1-c_1^n},\qquad \eta_1=\frac{1}{c_1^{2n}(1-c_1^n)}$$

В случае малых «мягких» нелинейностей $(1<n<1{,}8)$ коэффициент B_1 отрицателен и увеличение амплитуды будет вызывать «затягивание» колебаний в сторону больших значений критической частоты θ.

Получена поправка, даваемая вторым приближением. Исследован случай линейного сопротивления. Характер смещения границ главной области неустойчивости, вызванного нелинейностью упругой зависимости $\sigma=\varphi(\varepsilon)$, по сравнению с их положением при выполнении для материала закона Гука, аналогичен указанному случаю стержня идеализированного двутаврового сечения.

Полученные уравнения справедливы при отсутствии в крайних фибрах сжатого стержня растягивающих напряжений, что соответствует неравенству

$$z_0 > \frac{h}{2}, \qquad (10)$$

где h — высота сечения,
z_0 — расстояние от центра тяжести сечения до нейтральной линии.

Неравенство (10) будет справедливо для безразмерных амплитуд, удовлетворяющих условию

$$A \quad \frac{2c^{n}{}_{1}}{n\sqrt{3}+\sqrt{n^2+2n}} \cdot \qquad (11)$$

В четвертой главе рассмотрена динамическая устойчивость симметричных колебаний круговой двухшарнирной арки прямоугольного поперечного сечения при нелинейной упругости материала.

При нагружении арки равномерно распеделенной радиальной нагрузкой вида

$$q = q_0 + q_t \cos\theta t \qquad (12)$$

уравнение вынужденных колебаний в плоскости арки представлено в виде

$$\frac{(FK)^n h^2}{12n\, R^{n+2}\, q^{n-1}(t)} (u^{VI} \quad 2u^{IV} \quad u'') - \frac{B_1 (FK)^{3n}\, h^4}{48n^3 R^{3(n+2)}\, q^{3n-1}(t)} [z^2 z' +$$

$$+ z(z')^3 + 6zz'z'' + 2z^2 z''] + q(t)z' + mR \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u'' - u) = 0 \qquad (13)$$

где: R — радиус недеформированной оси арки,
u — тангенциальные перемещения
(здесь для сокращения обозначено $z = u''' + u'$).

Принимая для перемещений выражение

$$u \quad -\frac{\beta}{\pi} f(t) \left(1 + \cos\frac{\pi}{\beta}\varphi\right), \qquad (14)$$

где: β половина центрального угла арки, уравнение динамической устойчивости приведено к виду

$$(1+\nu\cos\theta t)\frac{d^2w(t)}{dt^2}+\Omega^2(1-\eta\nu\cos\theta t)\,w(t)-$$

$$-\frac{3}{4}B_1\Omega^2\eta_1(1-\nu_1\cos\theta t)w^3(t)=0, \qquad (15)$$

где

$$\nu=(n-1)\frac{q_t}{q_0},\quad \Omega^2=\omega^2(1-d^n)p_0^{\,n-1},\quad d=\frac{q_0}{q_\tau}$$

$$\omega^2=\frac{\pi^2 IK(\pi^2-\beta^2)^2}{nR^4m\beta^4(3\beta^2+\pi^2)},\quad \eta=\frac{nd^n}{(n-1)(1-d^n)},\quad \eta_1=\frac{1}{d^{2n}(1-d^n)},$$

$$\nu_1=2n\frac{q_t}{q_0}\qquad p_0=\frac{q_0R}{FK}$$

$$q_\tau=FK\sqrt[n]{\frac{h^2}{12nR^{n+2}}\left(\frac{\pi^2}{\beta^2}-1\right)}$$ — **критическая нагрузка для арки по теории касательного модуля.**

Из последнего уравнения, методом Бубнова-Галеркина, получена формула для определения в первом приближении границ главной области неустойчивости симметричных колебаний арки:

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2}=1\pm\frac{1}{2}\gamma\nu+\frac{1}{4}\gamma\nu^2-\frac{9}{16}B_1\eta_1A^2, \qquad (16)$$

где: $\gamma=\eta+1$.

Как следует из уравнения (16), расположение амплитудно-частотных кривых параметрических колебаний арки аналогично рассмотренному выше случаю стержня прямоугольного поперечного сечения.

Для сравнения положения границ главной области неустойчивости при нелинейной зависимости $\sigma-\varepsilon$ с их положением при выполнении для материала закона Гука, уравнение (16) приведено к виду

$$\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2}=\frac{(1-d^n)\,d_1}{(1-d_1)\,d^n}\left(1\pm\frac{1}{2}\gamma\nu+\frac{1}{4}\gamma\nu^2\right), \qquad (17)$$

где: Ω_1—значение Ω при $n=1$,

$$d_1 = \frac{q_0}{q_*}, \quad q_* \text{—критическая нагрузка при } n=1.$$

Отношения d и d_1 связаны зависимостью

$$d^n = n q_*^{n-1} \left(\frac{E}{K} d_1 \right)^n \tag{18}$$

где: $$q_* = \frac{\overline{q}_* R}{EF}.$$

Так как для малых нелинейностей влияние амплитуды на частоту колебаний незначительно, в уравнение (17) не включен член, содержащий A^2

Наибольшая величина амплитуды колебаний, до достижения которой все сечения арки остаются полностью сжаты и, следовательно, неравенство (10) будет выполнятсья, определяется условием

$$A \quad \frac{2R^n d_1^n}{n\sqrt{3} + \sqrt{n^2+2n}}. \tag{19}$$

Рассмотрим арку, для которой $h=0{,}08R$, $\beta=\pi/3$.
Тогда $q_* = 4{,}27 . 10^{-3}$ Примем $n=1{,}06$, $K=0{,}732E$, $d_1=0{,}75$.
При $q_t = 0{,}2q_0$ находим $d^n=0{,}784$ и из формулы (17) следует

$$0{,}726 \quad \frac{\theta}{2\Omega_1} < 1{,}065.$$

Для этой же арки, при n 1, получим

$$0{,}838 \quad \frac{\theta}{2\Omega_1} \quad 1{,}14.$$

В связи с чем учет данного нелинейного фактора является необходимым при расчете на динамическую устойчивость и колебания конструкция из материалов, имеющих нелинейную упругую зависимость между σ и как, например, ряд типов стеклопластиков и при расчете демпфирующих устройств, имеющих нелинейные элементы.

В пятой главе рассматривается устойчивость сжато-изогнутого стержня прямоугольного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести. Зависимость между напряжением, скоростью деформации и временем принята в виде

$$\sigma = H\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^{1/n} \tag{20}$$

В случае действия на стержень поперечной нагрузки Q, приложенной в среднем сечении стержня, в крайних фибрах материала стержня образуются растягивающие напряжения. Положение границ зоны растягивающих напряжений определяется неравенством

$$\sin\pi x_1 < \frac{\pi^2 p}{n\sqrt{3}\,(\pi^2 pa + 2\lambda q)}\ , \tag{21}$$

где:

$$p = \frac{P}{FH}\ , \qquad q = \frac{Q}{FH}$$

$a = \frac{y}{i}$ — безразмерный прогиб в среднем сечении,

$x_1 = \frac{\bar{x}_г}{i}$ $\bar{x}_1$ — расстояние от опоры до начала растянутой зоны.

Изменение величины x_1 от 0 до 0,2, что соответствует распространению растянутой зоны до 60% длины стержня, незначительно изменяет потенциальную энергию изгиба, приходящуюся на часть стержня, имеющую растягивающие напряжения. Это изменение потенциальной энергии изгиба лежит в пределах от 1,2% до 7,4% по отношению к ее значению при $x_1 = 0{,}1$, что не превосходит точности расчетов на ползучесть. Ввиду чего в дальнейшем принято $x_1 = 0{,}1$.

Используя разложения по степеням $2z_0/h$ и представляя безразмерный прогиб в виде произведения двух функций

$$w(t, x) = a(t)\sin\pi x \tag{22}$$

интегрируем уравнение устойчивости стержня методом Бубнова-Галеркина в пределах растянутой зоны. Указанный приближенный способ интегрирования уравнений устойчивости в пределах растянутой зоны впервые использовался в работах А. В. Дятлова.

Полученное уравнение движения стержня имеет вид

$$D_1\left(\frac{da}{dt}\right)^{1/n} - a - D_2\left(\frac{da}{dt}\right)^{-1/n} - D_3\left(\frac{da}{dt}\right)^{-3/n} - D_4 = 0, \tag{23}$$

где:

$$D_1=\frac{n3^{n_1}\ \pi^{2/n}}{0{,}204(1+2n)\lambda^{2/n}p}\int\limits_{0,1}^{0,5}\sin^{2n_1}\pi x dx$$

$$D_2=\frac{(n-1)3^{n_2}\lambda^{2/n}p}{0.408n\,\pi^{2/n}}\int\limits_{0,1}^{0,5}\sin^{2n_2}\pi x dx$$

$$D_3=\frac{(n-1)(n-3)3^{n_3}\lambda^{6/n}p^3}{4{,}90\,n^3\pi^{6/n}}\int\limits_{0,1}^{0,5}\sin^{2n_3}\pi x dx$$

$$D_4=0{,}246\lambda\frac{Q}{P}\cdot$$

Здесь для сокращения обозначено:

$$\frac{n+1}{2n}=n_1,\qquad \frac{n-1}{2n}=n_2,\qquad \frac{n-3}{2n}=n_3.$$

Для показателей ползучести n, равных 3, 5 и 7 коэффициенты уравнения (23) примут значения

n	D_1	D_2	D_3
3	$\frac{2{,}622}{\lambda^{2/3}p}$	$0{,}3608\lambda^{2/3}p$	0
5	$\frac{1{,}968}{\lambda^{2/5}p}$	$0{,}6175\lambda^{2/5}p$	$1{,}47.10^{-3}\lambda^{1,2}p^3$
7	$\frac{1{,}750}{\lambda^{2/7}p}$	$0{,}7755\lambda^{2/7}p$	$2{,}49.10^{-3}\lambda^{6/7}p^3$

Параметрические уравнения интегральной кривой, без учета членов, содержащих коэффициент D_3, дающий поправку не превосходящую 2%, имеют вид

$$D_1\mu^2-(a+D_4)\mu-D_2=0 \qquad (24)$$

$$T = \frac{D_1}{n-1}\left(\frac{1}{\mu_0^{n-1}} - \frac{1}{\mu^{n-1}}\right) + \frac{D_2}{n+1}\left(\frac{1}{\mu_0^{n+1}} - \frac{1}{\mu^{n+1}}\right) \tag{25}$$

где: $\mu = \left(\frac{da}{dt}\right)^{1/n}$ — параметр,

μ_0—значение параметра при $t = 0$,
T—время достижения стержнем прогиба от a_0 до a.

Причем a_0 является упругим или упруго-пластическим прогибом, образовавшимся при $t=0$ от действия приложенных внешних сил.

Из уравнений (24) и (25) следует выражение для критического времени $T_{кр}$ соответствующего достижению сжато-изогнутым стержнем бесконечно большего прогиба

$$T_{кр} = \frac{D_1}{(n-1)\mu_0^{n-1}} + \frac{D_2}{(n+1)\mu_0^{n+1}}, \tag{26}$$

где начальное значение параметра μ_0 определяется из уравнения (24) по начальному прогибу a_0.

Рассматривается случай действия на стержень малой поперечной нагрузки и малых прогибов, что соответствует работе всего поперечного сечения на сжатие.

Как следует из анализа полученных выражений, небольшая поперечная нагрузка значительно снижает критическое время. Так, поперечная сила, приложенная в среднем сечении и составляющая 3% от продольной нагрузки, снижает критическое время примерно в два раза.

В шестой главе, для зависимости между напряжением и деформацией вида (1) рассматривается статическая устойчивость сжато-изогнутого стержня и круговой двухшарнирной арки, нагруженной гидростатической нагрузкой. Принимается условие реверсивности диаграммы растяжения, что характеризует упруго-нелинейный материал. Для упруго-пластических материалов условие реверсивности диаграммы растяжения соответствует принятию закона нелинейной разгрузки. Указанное допущение в этом случае приводит к меньшим значениям критических сил по сравнению с расчетом по теории приведенного модуля (линейная разгрузка) и большим по сравнению с расчетом по касательному модулю. Таким образом, принятые условия приводят к промежуточным значениям критических сил по сравнению с двумя общепринятыми методами расчета на устойчивость в упругопластической стадии. Ввиду чего полученные результаты могут быть использованы для расчетов как в упругой области, так и за пределом упругости при криволинейном очертании диаграммы растяжения.

В случаях двухшарнирного стержня идеализированного двутаврового сечения, сжатого двумя продольными силами P, нагрузка и прогиб связаны уравнением

$$\frac{Bn\lambda^2}{8\pi^2}\alpha^n a^3 - \frac{n\lambda^2}{\pi^2}\alpha^n a + a = 0. \qquad (27)$$

имеющим решения

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2\sqrt{\frac{2}{B}\cdot\frac{1-c^n}{c^n}}, \qquad (28)$$

где:

$$c = \frac{P}{P_\tau}, \qquad B = (n-1)(n-2).$$

Ввиду того, что при выводе (27) использовалось разложение по степеням y/h полученные выражения для безразмерного прогиба будут справедливы при $a<2$.

Так как в случае «мягкой» характеристики для значений n, лежащих в пределах $1<n<2$, коэффициент B отрицателен, стержень остается прямым до достижения сжимающей силой критического значения по теории касательного модуля ($P=P_\tau$) после чего прогибы растут с увеличением сжимающей силы, что аналогично поведению упругих стержней из материала, подчиняющегося закону Гука.

В случае «мягкой» характеристики при $n>2$ и «жесткой» ($n<1$) коэффициент B положителен. Стержень также остается прямым до достижения сжимающей силой критического значения P_τ, после чего увеличение прогиба сопровождается снижением силы.

При действии на сжатый стержень поперечной нагрузки Q приложенной в среднем сечении стержня, в большинстве случаев сочетания нагрузок в средней части стержня образуется зона растягивающих напряжений. Размер указанной зоны, в случае стержня прямоугольного поперечного сечения, определяется выражением

$$\sin\pi x_1 = \frac{2c^n}{a(\sqrt{3}+\sqrt{n^2+2n})}, \qquad (29)$$

где: x_1 — расстояние от опоры до части стержня, имеющей растягивающие напряжения.

Уравнение, связывающее прогиб с приложенными нагрузками, в этом случае, имеет вид

$$B_1 a^{1/n} - B_2 a^{1/n} - B_3 a^{-3/n} - B_4 - a = 0. \tag{30}$$

Коэффициенты B_{1-4} аналогичны коэффициентам уравнения (23) и могут быть получены из последних заменой величины

$$p = \frac{P}{FH} \quad \text{величиной} \quad a = \frac{P}{FK} \cdot$$

В дальнейшем, как и при исследовании работы стержня в условиях ползучести, принято $x_1 = 0{,}1$.

Рассмотрим более подробно случай $n=3$.

Уравнение (30) при этом примет вид

$$c^2 + (1{,}865\, a^{4/3} + 0.458\, \lambda \beta\, a^{1/3})\, c - 3{,}28\, a^{2/3} = 0, \tag{31}$$

где: $\beta = \dfrac{Q}{P}$

Исследуя последнее уравнение на экстремум, получим выражение для максимального значения отношения $c = \dfrac{P}{P_т}$ соответствующее превышению сжимающей силой ее значение по теории касательного модуля

$$c_{max} = \frac{a_*^{1/3}}{1{,}137\, a_* + 0{,}0698\, \lambda \beta} \tag{32}$$

где a_* величина критического прогиба, определяемого выражением

$$a_* = 3{,}04 . 10^{-2} \lambda \beta + \sqrt{0{,}846 . 10^{-2} \lambda^2 \beta^2 + 0{,}473} \tag{33}$$

При отсутствии поперечной нагрузки ($\beta = 0$) величина безразмерного критического прогиба будет равна $a_* = 0{,}688$. Из формулы (32) при этом следует $c_{max} = 1{,}128$.

При отсутствии поперечной нагрузки и малых прогибах определяемых неравенством

$$a < \frac{2c^n}{n\sqrt{3} + \sqrt{n^2 + 2n}} \tag{34}$$

в крайних фибрах материала стержня не будет возникать растягивающих напряжений. Ввиду чего формулы (30)—(33) не могут быть использованы. Уравнение устойчивости стержня в этом случае имеет вид

$$\frac{B_1 (w'')^3}{n\lambda^3\alpha^{3n}} - \frac{w''}{n\lambda^2\alpha^n} - w = 0. \tag{35}$$

Отсюда, для случая шарнирного крепления опор стержня, используя метод Бубнова-Галеркина, получены выражения для прогибов

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 2c^n\sqrt{\frac{1-c^n}{3B_1}}. \tag{36}$$

Условие отсутствия в материале стержня растягивающих напряжений приводит к неравенству $c > 1$. Ввиду чего выражения (35) и (36) будут справедливы лишь при превышении сжимающей силой ее критического значения.

В случае малой «мягкой» нелинейности $(1 < n < 1{,}8)$ коэффициент B_1 отрицателен и, как следует из выражения (36), стержень остается прямым $(a_1 = 0)$ до достижения сжимающей силой значения $P = P_э$ после чего увеличение сжимающей силы сопровождается образованием и последующим ростом прогиба. Данный предел изменения показателя n соответствует наиболее типичным видам нелинейных характеристик материала.

Рассматривается также устойчивость стержня с жестко закрепленными концами.

Для пологой круговой арки прямоугольного поперечного сечения, нагруженной гидростатической нагрузкой q, при малых прогибах, определяемых неравенством (43), в крайних фибрах материала арки не будет возникать растягивающих напряжений. Уравнение устойчивости арки в этом случае имеет вид

$$\frac{v^{IV}}{n\lambda^2\alpha^{n-1}} + \frac{6B_1 v''}{n^3\lambda^7\alpha^{3n-1}}\left[(v''')^2 + \frac{1}{2}v''v^{IV}\right] + \frac{\alpha}{\lambda}v'' - q\frac{\alpha}{r} = 0$$

где:

$$v = \frac{\bar{v}}{l}, \quad \lambda = \frac{l}{i}, \quad \alpha = \frac{N}{KE}, \quad q = \frac{\bar{q}l}{FK}, \quad r = \frac{R}{l}.$$

$\bar{v}$ — радиальный прогиб,

l — длина стержня арки,

N — сжимающая сила, действующая в поперечном сечении (штрих означает дифференцирование по безразмерной координате $x = x/l$).

Принимая для безразмерного прогиба выражение

$$v = a \sin \pi x, \tag{37}$$

что соответствует изгибу арки по одной полуволне синусоиды и решая уравнение (36) методом Бубнова-Галеркина, находим

$$q = \left(\frac{1}{r} - \frac{\pi^3 a}{4\lambda} + \frac{\pi^5 a}{4n \lambda^3 \alpha^n} - \frac{15 B_1 \pi^9 a^3}{16 n^3 \alpha^{3n}} \right) \alpha \tag{38}$$

Учитывая изменения расстояния между опорам при деформации арки, получим зависимость между прогибом и безразмерной сжимающей силой

$$\alpha^n = \frac{\gamma^n \eta a}{4\pi \lambda^2 r}, \tag{39}$$

где: $\eta = 8\lambda - \pi^3 r a$,

$\gamma = \frac{\beta}{1+\beta}$ — приведенный коэффициент жесткости опор,

$\beta = \frac{\alpha^n}{\varepsilon_1}$, ε_1 — относительное смещение опор.

С учетом последнего выражения, из уравнения (38), пренебрегая как малым последним слагаемым, получим зависимость между прогибом и нагрузкой при симметричных деформациях арки

$$q = \left(\frac{1}{r} - \frac{\pi^3 a}{4\lambda} + \frac{\pi^6 r}{n \lambda \gamma^n \eta} \right) \sqrt{\frac{\eta a}{4\pi \lambda^2 r}}. \tag{40}$$

Для малых значений начального радиуса кривизны ($r = 1 \div 3$) и малых прогибах ($a < 0{,}4$) выражение (40) значительно упрощается. Последние два члена в круглых скобках и второе слагаемое в выражении для η в этом случае дают поправку не более 4% и могут быть отброшены. После чего выражение (40) примет вид

$$q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2a}{\pi \lambda r}}. \tag{41}$$

Так как критическая нагрузка по теории касательного модуля, соответствующая точке бифуркации форм равновесия арки, равна

$$q_{\text{кр}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\frac{4\,\pi^2}{n\,\lambda^2 r^{\mathrm{n}}}} \tag{42}$$

то, приравнивая выражения для нагрузок (41) и (42), получим выражение для критического прогиба

$$a_{\text{кр}} = \frac{2\,\pi^3 r}{n\,\gamma_1^{\mathrm{n}}\,\lambda}$$

при достижении которого арка, изгибаясь в начале по одной полуволне, теряет устойчивость, изгибаясь по двум полуволнам.

Наибольший прогиб, до достижения которого в крайних фибрах материала арки не будет растягивающих напряжений, и, следовательно, полученные выше выражения (38) —(41) будут справедливы, определяется неравенством

$$a \leq \frac{8\,\lambda}{\pi^2 r} - \frac{2\,(n\sqrt{3} + \sqrt{n^2 + 2n})}{n\,\gamma_1^{\mathrm{n}}} \tag{43}$$

В случае распространения растягивающих напряжений на большую часть стержня арки, положение границ растянутой зоны может быть определено из соотношения

$$\sin \pi x_1 = \frac{n\,\gamma_1^{\mathrm{n}}\,\eta}{2\,\pi^3 r\,(n\sqrt{3} + \sqrt{n^2 + 2n})}, \tag{44}$$

где x_1 — расстояние от опоры арки до начала растянутой зоны.

Разлагая результат интегрирования уравнений равновесия по степеням $2z_0/h$, получено уравнение устойчивости справедливое на участке длины арки, имеющем растянутую зону

$$\frac{3^{1/2\,\mathrm{n}_2}(v'')^{\mathrm{n}_1}}{(1 + 2n)\,\lambda^{1+2/\mathrm{n}}}\left[v^{\mathrm{IV}} - n_1\frac{(v''')^2}{v''}\right] + \frac{(n-1)\,\alpha^2}{2\,n^2\,3^{1/2\,\mathrm{n}_1}(v'')^{\mathrm{n}_2}}$$

$$\left[v^{\mathrm{IV}} - n_2\frac{(v''')^2}{v''}\right] - \frac{\mathrm{B}_2\,\alpha^4}{3^{3/2\,\mathrm{n}_1}\,\lambda^{1-6/\mathrm{n}}\,(v'')^{\mathrm{n}_3}}\left[v^{\mathrm{IV}} - n_3\frac{(v''')^2}{v''}\right]$$

$$+ \frac{\alpha}{\lambda}\,v'' - \frac{\alpha}{r} - q = 0. \tag{45}$$

где:

$$\mathrm{B}_2 = \frac{(n-1)(n-3)}{24\,n^4}, \quad n_1 = \frac{1-n}{n}, \quad n_2 = \frac{1+n}{n}, \quad n_3 = \frac{3+n}{n}.$$

Используя, как и в случае работы стержня в условиях ползучести, приближенный метод интегрирования уравнения (45), примем $x_1 = 0{,}1$.

При этом на среднюю часть стержня, имеющую растянутую зону, составляющую 80% длины стержня арки, приходится 98% общей потенциальной энергии изгиба.

Для прямо-симметричных формы потери устойчивости, применяя метод Бубнова-Галеркина, получено уравнение, связывающее прогиб с нагрузкой. В частном случае, при $n=3$, это уравнение примет вид

$$q = 8{,}98\,\frac{a^{1/3}}{\lambda^{5/3}} + \left(\frac{1}{r} - 6{,}64\,\frac{a}{\lambda}\right)\alpha + 1{,}985\,\frac{\alpha^2}{\lambda^{1/3}\,a^{1/3}}, \tag{46}$$

где α определяется из выражения (39).

В случае жесткого крепления опор при отсутствии в крайних фибрах арки растягивающих напряжений для прямо-симметричных форм потери устойчивости, получим

$$q = \left(\frac{1}{r} - \frac{\pi^2 a}{\lambda} - \frac{16\,\pi^4 r}{n\,\lambda\,\gamma''\eta}\right)\gamma\sqrt{\frac{a\,\eta_1}{4\,\lambda^2 r}}, \tag{47}$$

где: $\eta_1 = 2\lambda - \pi^2 r\,a.$

Максимальное значение прогиба, до достижения которого материале не возникает растягивающих напряжений, определется неравенством

$$a \quad \frac{2b\,\lambda\,\gamma'' - r}{\pi^2\,b\,\gamma''\,r}, \tag{48}$$

где:

$$b = \frac{n}{4\,\pi^2(n\sqrt{3} \quad \sqrt{n^2+2n})}.$$

Содержание диссертации излагается в следующих статьях автора:

1. В. П. Капранов. Устойчивость и колебания стержней при нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Труды ДХТИ, вып. XV, 1961, Днепропетровск.

2. В. П. Капранов. Динамическая устойчивость стержня с нелинейной характеристикой. Тезисы докладов на конференции по упругим колебаниям механических систем, изд. АН Латв. ССР, 1961, г. Рига.

3. В. П. Капранов. Устойчивость сжато-изогнутого стержня прямоугольного сечения в условиях ползучести. Труды ДХТИ, вып. XV, 1961 г. г. Днепропетровск.

4. В. П. Капранов. К устойчивости пологой арки за пределом упругости. Труды ДХТИ, вып. XV, 1961 г. Днепропетровск.

г. Днепропетровск, тип. металлургического института.
Заказ 258. Тираж 150. Подписано к печати 29.I.63 г. БТ 00574.
Объем 1,25 физ. п. л., 1,14 усл. п. л.