

УДК 624.075

Маневич А.І., д-р техн. наук

Ракша С.В., канд. техн. наук

## ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТОНКОСТІННИХ БАЛОК-СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

Задачі вагової оптимізації тонкостінних стержнів-балок з урахуванням їх стійкості досліджувалися в декількох роботах з використанням різних теоретичних моделей (див. огляд [1], [2]). За останні роки ці дослідження були продовжені з метою отримання рішень на основі точних розв'язків для локальної втрати стійкості ([3-5] та інші). Оптимальні профілі тонкостінних елементів при стисканні та згинанні, що знайдені для окремо розглянутих умов навантаження, можуть суттєво відрізнятись. У реальних конструкціях елементи зазнають, як правило, дію різних навантажень (окремо або в комбінації), і виникає проблема вибору оптимальної конфігурації профілю з урахуванням такого багатоваріантного навантаження. Ця задача вибору “компромісного” оптимального проекту може бути сформульована та вирішена на основі теорії багатокритеріальної оптимізації конструкцій (векторної оптимізації), яка інтенсивно розроблялася останні десятиліття (див. напр. [6]).

У даній статті представлено рішення задачі двокритеріальної оптимізації тонкостінних профілів відкритого перетину з однією віссю симетрії (типу швелера та швелера з відгинами на краях полиць) при стисканні і згинанні (у різних комбінаціях) з урахуванням умов стійкості. Ця стаття є продовженням та розвитком роботи [7]. Вектор цільової функції включає осьове стискальне зусилля і згинальний момент. Для розв'язку задачі оптимізації використовується ефективний метод нелінійного програмування. На першому етапі оптимальні конфігурації тонкостінних профілів отримані для крайніх умов навантаження - осьового стискання і чистого згинання (з використанням точних лінійних рішень для локальної форми втрати стійкості). Оптимальні безрозмірні параметри представлені у вигляді функції одного ведучого параметру - безрозмірного параметру ваги. На другому етапі будувалися Парето-оптимиуми на площині ( $P$ - $M_z$ ), де  $P$  - стискальне зусилля, і  $M_z$  - згинальний момент. Нарешті, на третьому етапі отримано “компромісні” оптимальні проекти з використанням глобального критерію, який включає  $P$  і  $M_z$ . Отримані в “компромісних” оптимальних проектах профілі є

універсальними, на відміну від оптимальних проектів для окремих випадків навантаження, і можуть бути застосовані при довільній комбінації стискання і згинання.

Порівняння профілів із сортаменту з отриманими оптимальними проектами дозволяє виявити стандартні профілі, які не можуть бути оптимальними при будь-яких комбінаціях розглянутих навантажень.

**1. Постановка задачі і метод рішення.** Розглядається тонкостінний елемент відкритого профілю (рис. 1), вільно обпертий на краях, що сприймає осьове стискання і згинання (в площині симетрії) у довільній комбінації. Довжина  $L$  та властивості матеріалу (модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ) вважаються заданими. Товщина профілю  $t$ , ширина стінки, полиці і відгину  $b_1, b_2, b_3$  - змінні проекту (товщина всіх елементів вважається постійною, тобто маються на увазі холодноформовані профілі).

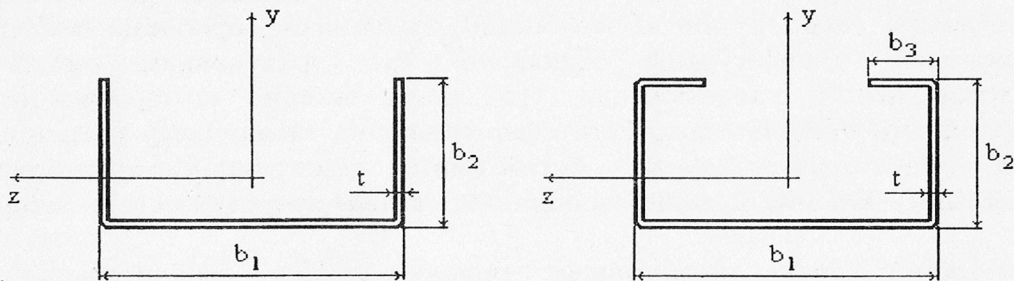


Рис. 1. Перетини профілів і змінні проекту

Цільова функція залежить від формулювання задачі оптимізації. Розглядаються послідовно наступні задачі оптимізації:

1. Однокритеріальна оптимізація - максимум критичного стискального зусилля  $P$  або максимум згинального моменту  $M_z$  при заданій площі перетину (вазі) елемента.

2. Побудова Парето-оптимальних профілів у двокритеріальній постановці задачі оптимізації (при заданій площі перетину).

3. Двокритеріальна оптимізація з використанням глобального критерію, який включає  $P$  і  $M_z$ .

Задачі оптимізації ставляться як задачі нелінійного програмування. В однокритеріальній оптимізації для центрально стиснутого стержня цільова функція формулюється у вигляді -  $P = \max \min (P_{зг}, P_{зг-кр}, P_m)$ , де  $P_{зг}, P_{зг-кр}, P_m$  - критичні сили для згинальної (ейлерової) форми в площині симетрії, згинально-крутильної форми і локальної форми випучування

відповідно (рис. 2). При чистому згинанні балки цільова функція має вигляд  $M_z = \max \min (M_{z32-кр}, M_{zМ})$ , де  $M_{z32-кр}$ ,  $M_{zМ}$  - критичні згинальні моменти для згинально-крутильної форми (бокового випучування) і локальної форми втрати стійкості.

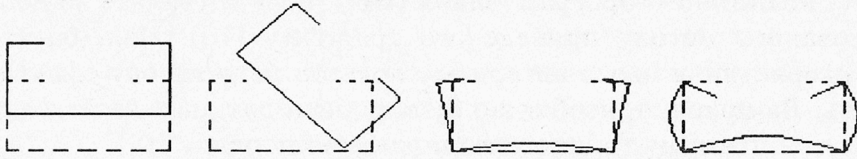


Рис. 2. Форми випучування швелера з відгинами

Напруження загальної форми втрати стійкості стержня при стисканні та згинанні були розраховані відповідно до теорії тонкостінних стержнів Власова [8]. Напруження локального випучування розраховувалися згідно з [9]. Усі пластини, що складають тонкостінний стержень-балку, були розділені на кілька смуг, для яких подовжнє напруження вважалося постійним по ширині смуги, і розв’язок задачі локального випучування було побудовано шляхом об’єднання рішень для кожної смуги, з точними умовами з’єднання на лініях контакту (на відміну від методу кінцевих смуг, у якому використовуються степеневі апроксимації для переміщень). Для кожної смуги з локальними координатами  $(x, y)$  рішення диференціальних рівнянь стійкості було прийнято у вигляді  $w = w(\eta)\sin m\pi\xi$ ,  $\eta = y/L$ ,  $\xi = x/L$  ( $x$  - подовжня координата,  $m$  - число подовжніх напівхвиль). Граничні умови на вільних краях і на лініях контакту пластин приводять до характеристичного рівняння, що визначає локальні критичні напруження (при мінімізації по  $m$ ). Усі деталі обчислень тут опущені.

Спектр критичних напружень для короткохвильових локальних форм розглянутих тонкостінних елементів швелерного та швелерного із відгинами профілів має значну щільність. Крім того, для швелера із відгинами можливі два види локальної втрати стійкості в залежності від відносної ширини відгину (рис. 2), і відповідно спектр напружень в залежності від  $m$  може мати два локальних мінімуми.

Через вказані особливості напруження локальної форми розраховувалися для широкого діапазону чисел напівхвиль (як правило, для значень  $m = 2 - 35$ ).

Обмеження за міцністю не ставилися, тобто передбачалося, що матеріал пружний, і межа текучості - досить висока. Як можна бачити з рішення, це припущення має сенс при відносно низьких значеннях

параметра ваги  $G^*$  або параметра навантаження  $P^*, M_z^*$  (див. нижче), для звичайно використовуваних сталей і сплавів. При більш високих значеннях  $G^*$  представлені рішення визначають ідеалізовані оптимальні конфігурації.

Задача нелінійного програмування (НП) розв’язувалася за допомогою лінеаризованого методу приведенного градієнту [10]. Наш багаторічний досвід використання цього алгоритму показав його високу ефективність і надійність. Як правило, необхідно було робити декілька десятків ітерацій, щоб досягти оптимуму з відносною похибкою порядку  $10^{-3}$ .

Для спільності аналізу використовувалися безрозмірні параметри ваги, навантаження і напруження:

$$G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad P^* = \frac{P}{L^2 \cdot E} 10^6, \quad M_z^* = \frac{M_z}{L^3 \cdot E} 10^8, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3,$$

де  $A$  - площа поперечного перерізу (масштабні множники вводяться, щоб мати справу з параметрами порядку одиниці). Перетин також характеризувався безрозмірними геометричними параметрами  $b_2/b_1, b_3/b_1, t/b_1$ .

**2. Результати рішення.** Всі оптимальні безрозмірні параметри є функцією єдиного параметра ваги  $G^*$  (усі розмірні параметри визначаються додатковим завданням довжини  $L$ ). Був розглянутий інтервал параметра  $G^*$  (0; 0.4), у якому припущення щодо пружних деформацій матеріалу може бути виправданим відповідно до результатів даного рішення (для звичайних матеріалів). У вказаному інтервалі обрано кілька значень  $G^*$ , для яких була вирішена задача оптимізації.

*Однокритеріальна оптимізація. Стержень при стисканні або згинанні.*



Рішення задачі оптимізації, засноване на точному рішенні задачі про локальне випучування центрально стиснутого стержня як з’єднання пластин (для швелера та швелера із відгинами), було отримано в [4]. Нижче для цього випадку наведено лише деякі результати (для балки при чистому згинанні раніше були отримані тільки наближені рішення, засновані на спрощених залежностях для критичних напружень локальної втрати стійкості [1]).

При центральному стисканні оптимальні швелери мають рівні критичні напруження згинально-крутильної форми й однієї з локальних форм. Значення критичних напружень згинальної загальної форми (у площині симетрії, рис. 2) вищі на 15-25 %. Швелери із відгинами при такому ж навантаженні виявляються рівностійкими за трьома формами втрати стійкості: згинальною, згинально-крутильною і локальною.

Оптимальні балки при чистому згинанні також мають рівні критичні моменти згинально-крутильної форми (із площини вигину) і однієї з локальних форм.

Розрахунки показують, що оптимальні профілі при даному виді навантаження (стискання або згинання) мають майже постійні значення відношень ширини елементів, що складають переріз, у всьому розглянутому діапазоні  $G^*$ . Для швелера: при стисканні -  $b_2/b_1 = 0.42-0.43$ , при згинанні  $b_2/b_1 = 0.53-0.56$ ; для швелера із відгинами: при стисканні -  $b_2/b_1 \approx 0.48$ ,  $b_3/b_1 \approx 0.42$ ; при згинанні  $b_2/b_1 = 0.73-0.77$ ,  $b_3/b_1 = 0.22-0.26$ . Параметр товщини стінки  $t/b_1$  залежить від  $G^*$  згідно з таблицею 1.

Таблиця 1  
Параметр  $t/b_1$  в однокритеріальній оптимізації

Параметр $G^*$		0.1	0.2	0.3	0.4
	стискання	0.0139	0.0174	0.0200	0.0219
	згинання	0.0223	0.0283	0.0323	0.0357
	стискання	0,0152	0,0192	0,0220	0,0243
	згинання	0,0127	0,0175	0,0203	0,0210

Параметри перетинів швелерів, оптимальних при стисканні ( $\max P$ ) і чистому згинанні ( $\max M_z$ ), представлені на рис.3 у залежності від параметра ваги  $G^*$ . Оптимальні перетини виявляються досить різними при стисканні і при згинанні.

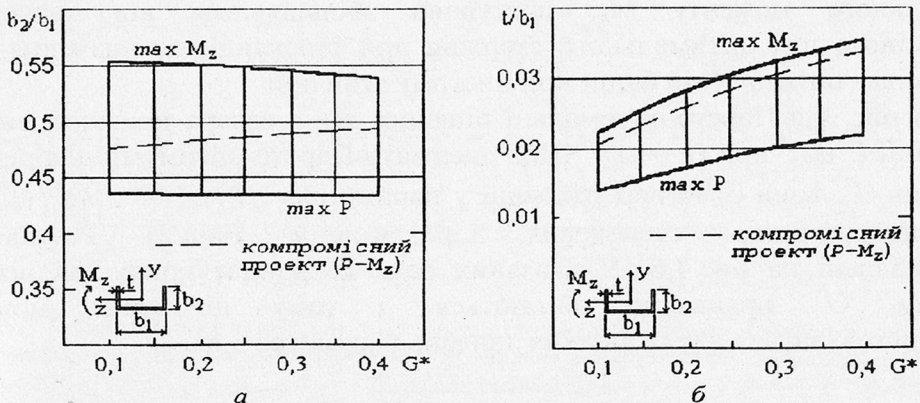




Рис. 3. Безрозмірні геометричні параметри оптимальних стержнів-балок при однокритеріальній оптимізації і в “компромісному” проекті

Залежності критичних зусиль і моментів від параметра ваги  $G^*$  при однокритеріальній оптимізації та отримані в “компромісному” проекті апроксимуються з високою точністю степеневими функціями (похибка менше, ніж 1%). Ці апроксимації представлені в табл. 2. Можна бачити, наприклад, що оптимальний швелер, який відповідає умові  $\max P$ , може сприйняти момент  $M_z$  приблизно на 40% менший, ніж критичний момент для оптимального швелера, отриманого з умови  $\max M_z$ , і, відповідно, останній стержень може сприйняти стискальне зусилля на 12%, менше, ніж оптимальний стержень для  $\max P$ .

Таблиця 2

Апроксимації критичних зусиль і моментів у залежності від параметра ваги  $G^*$  при однокритеріальній оптимізації та для “компромісного” проекту

Профіль	Оптимальний стержень при осьовому стисканні	Оптимальна балка при чистому згинанні	Оптимальний стержень-балка “компромісного” проекту
	$P^* = 2.794G^{*1.668}$	$P^* = 2.453G^{*1.676}$	$P^* = 2.498G^{*1.664}$
	$M_z^* = 3.805G^{*1.978}$	$M_z^* = 6.527G^{*1.995}$	$M_z^* = 6.467G^{*1.994}$
	$P^* = 4.749G^{*1.662}$	$P^* = 3.657G^{*1.691}$	$P^* = 3.845G^{*1.657}$
	$M_z^* = 9.319G^{*1.983}$	$M_z^* = 21.02G^{*1.975}$	$M_z^* = 20.6G^{*1.998}$

### Двокритеріальна оптимізація

#### Парето-оптимуми

Було побудовано Парето-оптимуми при двох критеріях ( $P^*$ ,  $M_z^*$ ) для ряду значень параметра  $G^*$ . Парето-оптимальні проекти отримані за допомогою мінімізації  $P^*$  при обмеженнях по  $M_z^*$ , причому параметр згинального моменту  $M_z^*$  поступово збільшувався від значення, отриманого для оптимального стержня при стисканні, до значення, що відповідає оптимальній балці при чистому згинанні.

На рис. 4,а Парето-оптимальні рішення для швелера представлені на площині  $P^*-M_z^*$  при  $G^* = 0.4$ . Щоб одержати Парето-оптимуми для різних значень  $G^*$ , вони були перераховані у параметрах  $P^*/G^{*1.668}$ ,  $M_z^*/G^{*1.995}$  (з використанням степеневих апроксимацій, табл.2). Результати представлені на рис.4,б. У вказаних осях координат криві для різних значень  $G^*$  практично збігаються, і тому ці криві можуть використовуватися для будь-яких значень параметра ваги  $G^*$ .

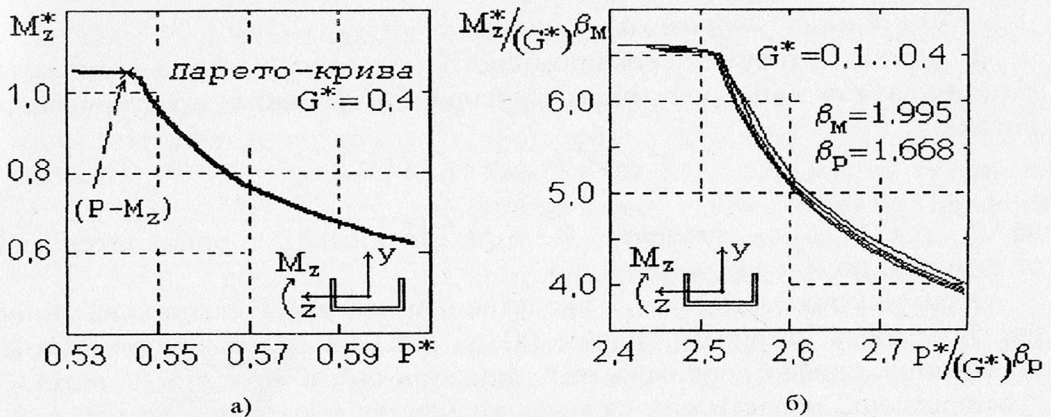


Рис. 4. Парето-оптимальні проекти при двох критеріях -  $P^*$ ,  $M_z^*$

Побудову рішення при двох критеріях ілюструє рис. 5, на якому штрихові лінії представляють оптимальні проекти, отримані в однокритеріальній оптимізації. Показані також Парето-множини для декількох значень  $G^*$ , що відповідають оптимальним рішенням (кожна крапка на кривих представляє межу значень  $P^*$  і  $M_z^*$  для деякого оптимального проекту, отриманого при заданому  $G^*$ ).

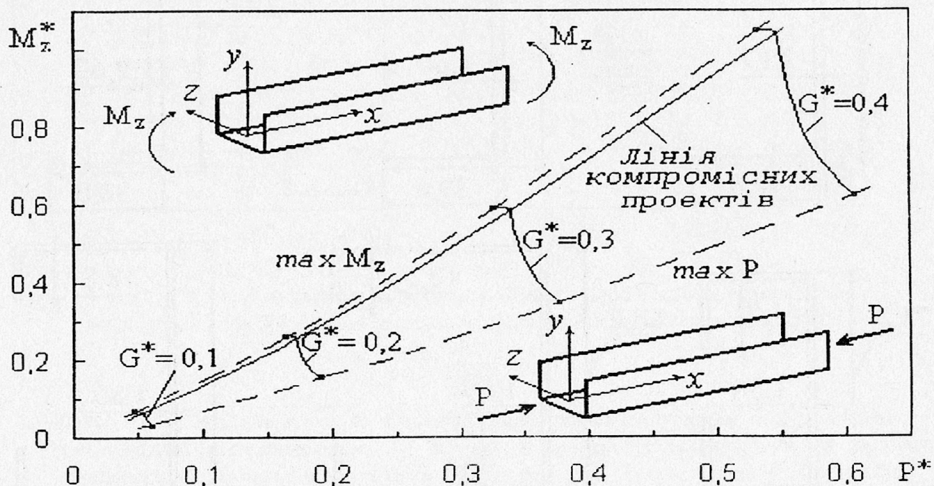


Рис. 5. Значення критичних навантажень для оптимальних проектів за одним критерієм (штрихові лінії), для компромісних проектів (суцільна лінія) і Парето-оптимальні рішення при різних значеннях  $G^*$

“Компромісні” оптимальні проекти

З метою пошуку “компромісного” проекту задача оптимізації розв’язувалася з використанням глобального критерію, представленого у вигляді

$$F = P^*/P_{max}^* + M_z^*/M_{z,max}^*$$

де  $P_{max}^*$  і  $M_{z,max}^*$  - значення  $P^*$  і  $M_z^*$ , отримані в однокритеріальній оптимізації по  $P^*$  і  $M_z^*$  відповідно.

Отримані проекти ( $P$ - $M_z$ ) представлені на рис.3 (штрихова лінія) і рис.5, а також позначені знаком (x) на рис. 4,а. На рис.6 показано для порівняння профілі оптимальних стержнів-балок при  $\max P$ ,  $\max M_z$  та “компромісні” проекти при заданих значеннях параметрів ваги  $G^* = 0.4$  і довжині  $L = 1$  м. “Компромісні” оптимуми близькі до проектів, отриманих при однокритеріальній оптимізації по  $\max M_z$ . Стержні “компромісного” оптимуму можуть сприймати майже такий самий граничний момент, однак гранична сила менше приблизно на 10-15% у порівнянні з проектом, отриманим за умовою  $\max P$  (для того ж  $G^*$ ).

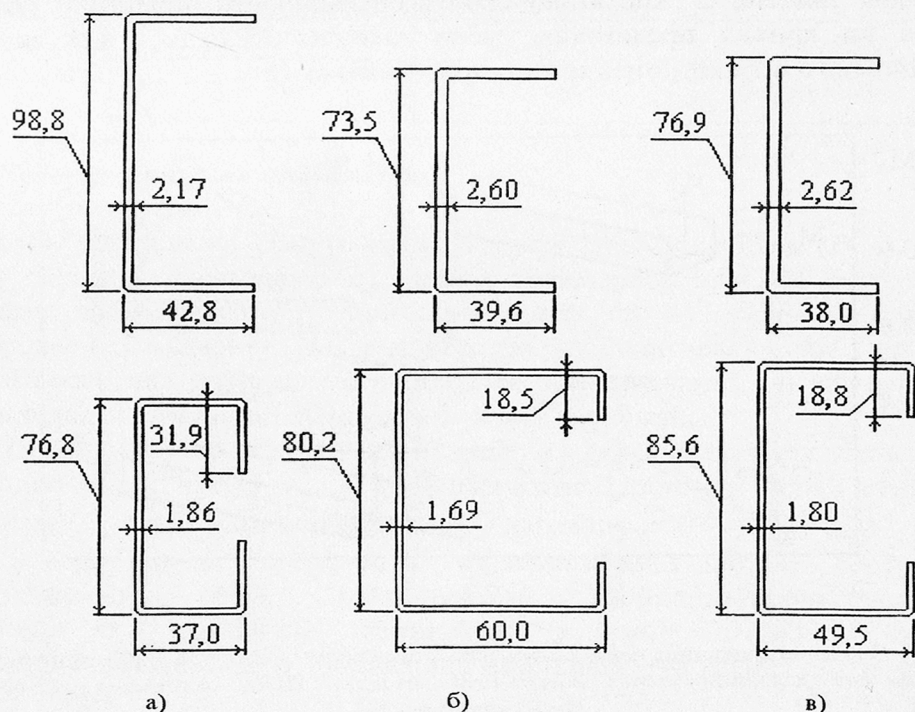
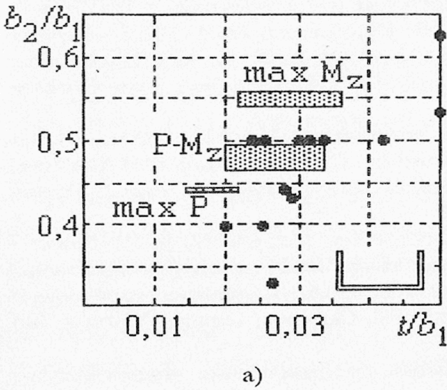
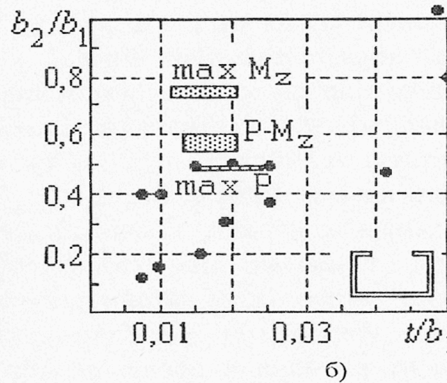


Рис. 6. Профілі, отримані при  $G^* = 0.4$  і довжині  $L=1$  м в однокритеріальній оптимізації  $\max P$  (а),  $\max M_z$  (б) та “компромісні” проекти (в)

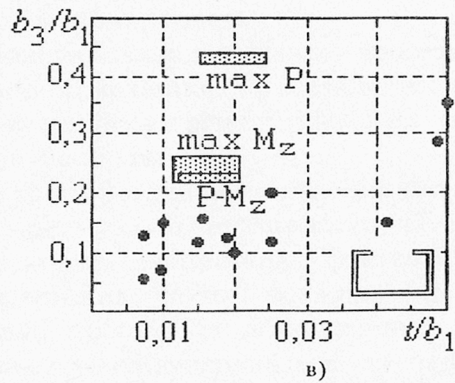
На рис. 7 показані області оптимальних безрозмірних параметрів балок-стержнів на площинах  $(t/b_1, b_2/b_1)$  та  $(t/b_1, b_3/b_1)$  при однокритеріальній ( $\max P, \max M_z$ ) і двокритеріальній ( $P-M_z$ ) оптимізації. Темними крапками позначено відношення параметрів для профілів із сортаменту (ГОСТ 8278-83 та ГОСТ 8282-83). Параметри більшості стандартних швелерних профілів збігаються з оптимальною зоною для компромісних проектів (чи близькі до неї), але співвідношення параметрів деяких профілів досить далекі від цієї зони. Таким чином, можна вказати профілі, які не є оптимальними при довільному випадку навантаження (будь-яка комбінація осевої сили і згинального моменту в площині симетрії).



а)



б)



в)

Рис. 7. Области оптимальних безрозмірних параметрів і параметрів стандартних профілів для швелера (а) та швелера із відгинами (б), (в)

1. Жичковски М., Гаевски А. Оптимальное проектирование конструкций с учётом требований устойчивости. - В кн.: Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред Дж. Томпсона и Г.Ханта. Пер. с англ. / Под ред. Э.И. Григолюка. - М.: Наука, Гл. Ред физ.-мат. лит., 1991.- С. 237-262.
2. Yoshida H., Maegawa K. The Optimum Cross Section of Channel Columns // Int. J. Mech. Sci., V. 21, № 3, 1979. - P. 149-160.
3. Маневич А.И., Рашид С.В. Розрахунок оптимальних параметрів центрально стиснутих стержнів відкритого поперечного перерізу // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. Вип. 67, К.: КНУБА, 2000.- С. 111 – 121.

4. *Маневич А.И., Ракиа С.В.* Оптимальные центрально сжатые стержни открытого профиля. - В сб.: Theoretical Foundations of Civil Engineering. Proc. of the Polish-Ukrainian seminar.- Warsaw, 2000. - С. 484-489.
5. *Manevich A.I., Raksha S.V.* The Optimum Design of Compressed Thin-walled Columns of Open Cross-section. In: Stability of Structures. IX Symposium Zakopane (Poland), 2000.- P. 189-196.
6. Новые направления оптимизации в строительном проектировании / Под ред. Э. Атрека и др.; Пер. с англ. К.Г. Бомштейна.- М.: Стройиздат, 1989.- 592 с. - Перевод изд.: New Directions in Optimum Structural Design / Ed/ by E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, O.C. Zienkewich. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.
7. *Manevich A.I., Raksha S.V.* Two-criteria optimization of thin-walled beams-columns under compression and bending. Proc. of the Third Int. Conf. on Thin-Walled Structures. Advances and Developments/ Ed. by J. Zaráš, K. Kowal-Michalska and J. Rhodes, Cracow (Poland), Elsevier, 2001.- P. 575 – 583.
8. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Изд-е 2-е.- М.:ГИФМЛ. 1959.- 568 с.
9. *Маневич А.И., Ракиа С.В.* Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях. В сб.: Theoretical Foundations of Civil Engineering. 4, V.1, part 2 (Proc. of the Polish-Ukrainian seminar, Warsaw, July 1996).- Днепропетровск, 1996.- С. 270-275.
10. *Маневич А.И.* Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. - Киев-Донецк, 1979. - 152 с.