Міністерство освіти і науки України
Український державний університет науки і технологій

Управління енергетичними процесами

Інтелектуальні системи енергопостачання

Пояснювальна записка
до кваліфікаційної роботи
магістра

на тему: Дослідження теплових втрат через повітряні прошарки огороджуючих конструкцій будівель
за освітньою програмою Теплоенергетика
зі спеціальності: 144 Теплоенергетика

Виконав: студент групи ТЕ2121:
/ Олександр ДОВБИШОВ /

Керівник: / доцент Олександр ЖЕВЖИК /

Нормоконтролер: / доцент Віктор ДЬЯКОВ /

Засвідчую, що у цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент

Дніпро – 2022 рік

Міністерство освіти і науки України
Український державний університет науки і технологій

Факультет: Управління енергетичними процесами
Кафедра: Інтелектуальні системи енергопостачання
Рівень вищої освіти: Другий (магістерський)
Освітня програма: Теплоенергетика
Спеціальність: 144 "Теплоенергетика"

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ІСЕ
_____________ Дмитро БОСИЙ

Дата 05.09.22

З А В Д А Н Н Я
на кваліфікаційну роботу магістр з теплоенергетики

студенту Довбишову Олександру Івановичу

1. Тема роботи: "Дослідження теплових втрат через повітряні прошарки огороджуючих конструкцій будівель".
Керівник роботи: Жевжик Олександр Владиславович, к.т.н., доцент

затверджені наказом від " 14 " 04 " 2022 р. № 318ст

2. Строк подання студентом роботи: 12.12.2022 р.
3. Вихідні дані до роботи:
параметри атмосферного повітря і повітря в приміщенні, геометричні параметри прошарку
4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно опрацювати):
4.1. Вступ
4.2 Огляд літератури за напрямом досліджень
4.3 Математична модель руху та теплообміну газу у прошарку
4.4 Результати розрахунків
4.5 Висновки і рекомендації
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень):
Схема до розрахунку.
Математична модель.
Результати розрахунків.
Висновки.

6. Консультанти розділів роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Завдання видав: (підпис консультанта, дата)	Завдання прийняв: (підпис студента, дата)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	ВСТУП	1.11.2022	10%
2	ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА НАПРЯМОМ ДОСЛІДЖЕНЬ	7.11.2022	20%
3	МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ТА ТЕПЛООБМІНУ ГАЗУ У ПРОШАРКУ	14.11.2022	35%
4	РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ	28.11.2022	10%
5	ВИСНОВКИ І РЕКОМЕНДАЦІЇ	12.12.2022	25%

Студент Олександр ДОВБИШОВ

Керівник роботи Олександр ЖЕВЖИК

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ

Магістерська робота: 63 сторінки, 3 частини, 13 рисунків, 9 використаних джерел.

Об'єкт дослідження – процес конвекції в склопакеті вікна будівель.

Предмет дослідження – втрати теплоти через склопакет вікна.

Методи дослідження – теоретичне дослідження на основі розробленої математичної моделі з розв'язкам системи рівнянь моделі чисельним методом.

Одержані результати – Розроблена математична модель процесу руху та теплообміну у склопакеті вікна будівель. За допомогою математичної моделі визначено поле швидкості, температур та коефіцієнт тепловіддачі в залежності від відносної ширини склопакету.

Результати роботи можливо використовувати при проектуванні нових вікон та дослідженні існуючих прошарків в огороджуючих конструкціях будівель.

Ключові слова: Склопакет, Рівняння руху, теплообмін Математична модель, коефіцієнт теплопередачі.

ВСТУП

Актуальність роботи. Велика увага в теоретичних дослідженнях проблем тепло- і масообміну приділяється вільній конвекції – руху рідини в полі сил тяжіння, обумовленому нерівномірністю температурного поля.

Якщо бічні поверхні вертикального шару, що містить рідину або газ, мають різну температуру, то в шарі виникає циркуляційний конвективний рух. При невеликих перепадах температури конвективне перенесення теплоти значно менше, ніж перенесення шляхом теплопровідності, і відносне число Нуссельта Nu^*, що характеризує відношення загального потоку теплоти до потоку теплоти шляхом теплопровідності, дорівнює 1. Для числа Релея, визначеного по відстані між стінками, межа «слабкого впливу» конвекції знаходиться на рівні $Ra = 10^3$. При перепаді температур $T_2 - T_1$ =10 °C цьому значенню відповідає, для повітря, відстань близько 1 см, а для води – декілька міліметрів. Проте, для багатьох практично важливих випадків, числа Релея значно більші і перенесення теплоти здійснюється в основному шляхом конвекції (Nu^*>>l).

Тобто спроби однозначного визначення меж між режимами як функції тільки від одного параметра (Ra, Ra_H) або навіть від двох параметрів (Ra, H/L), (Ra_H, H/L) приводять до значного розкиду і суперечливості між результатами різних авторів.

Тому створення математичної моделі руху і теплообміну повітря в склопакеті вікна, та проведення дослідження поля швидкості та температур є актуальною задачею.

Зв’язок роботи з науковими програмами. Робота відповідає науковим напрямам роботи кафедри «Інтелектуальні системи енергопостачання» Українського державного університету науки і технологій.

Ціль роботи. Побудувати математичну модель руху і теплообміну повітря в склопакеті вікна, та провести дослідження поля швидкості та температур.

Відповідно до поставленої цілі в роботі вирішені наступні завдання:

- складання замкненої системи рівнянь математичної моделі та розв'язання її за допомогою чисельного методу;
- складання програми для ПЕОМ для розрахунку поля швидкості та температур і проведення розрахунків з аналізом отриманих результатів.

Об’єкт дослідження – процес конвекції в склопакеті вікна будівель.

Предмет дослідження – втрати теплоти через склопакет вікна.

Методи дослідження – теоретичне дослідження на основі розробленої математичної моделі з розв'язком системи рівнянь моделі чисельним методом.

Наукова новизна та основні положення, які виносяться на захист:

1. Розроблена математична модель процесу руху та теплообміну у склопакеті вікна будівель.

2. За допомогою математичної моделі визначено поле швидкості, температур та коефіцієнт тепловіддачі в залежності від відносної ширини склопакету.

Практичне значення отриманих результатів:

Результати роботи можливо використовувати при проектуванні нових вікон та дослідженні існуючих прошарків в огороджуючих конструкціях будівель.

Особистий внесок здобувача. Постановку мети та завдань дослідження виконано спільно з науковим керівником. Здобувачем самостійно проведені розрахунки, зіставлення та аналіз отриманих під час досліджень результатів, формулювання висновків.

Апробація результатів магістерської роботи. Основні положення роботи і результати досліджень доповідалися здобувачем і обговорювалися на 9-ій міжнародній науково-практичній конференції "Modern research in world science" (November 28-30, 2022) SPC "Sci-conf.com.ua", Lviv, Ukraine. 2022.

Публікації.

Дослідження ефективности сепарації краплин в інерційних водоуловлювачах / Довбишов О.І., Потапчук І.Ю., Жевжик О.В., Корніяшик В.І. // Modern research in world science. Proceedings of the 9th International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Lviv, Ukraine. 2022. Pp. 476-479.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА НАПРЯМКОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 Традиційні методи визначення витрат теплоти через прошарки

Значна частина робіт присвячена втратам теплоти через прошарки у будівлях та інших об'єктах. Кількість теплоти, що проходить через багатошарову огороджувальну конструкцію, при різниці температур повітря з внутрішнього і зовнішнього боку і нерухомому середовищі залежить від коефіцієнтів теплопровідності і товщини шару кожного матеріалу, особливо термоізоляційного, а також від умов теплообміну на зовнішній і внутрішній поверхні конструкції. На зовнішніх поверхнях огороджувальних конструкцій виникає вимушена конвекція, визначальне значення для якої має швидкість руху і вітру. У меншій мірі впливає на коефіцієнт тепловіддачі природна конвекція, що виникає унаслідок різниці температур поверхні і повітря. На внутрішніх поверхнях огороджувальних конструкцій відбувається природна конвекція і вимушена при роботі вентиляційної системи або відкритих вікнах.

Для розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі конвекцією від огороджувальних конструкцій відома формула Франка:

$$\alpha_{кн} = 7,34v^{0,656} + 3,78e^{-1,91v},$$

де v – швидкість руху поїзда і вітру, м/с;

e – основа натуральних логарифмів, рівна 2,718.

При v>3 м/с:

$$\alpha_{кв} = 3,49 + 0,09\Delta t_{в},$$

де $\Delta t_{в} = \left| t_{в} - t_{вп} \right|$ – абсолютне значення різниці температур повітря і поверхні огороджувальної конструкції.

Для вікон з подвійним склінням коефіцієнт теплопередачі визначається за традиційними формулами:

$$k_{ок} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_в} + 2\frac{\delta_{ст}}{\lambda_{ст}} + \frac{1}{\alpha_н} + \frac{\delta_п}{\lambda_э}},$$

де $\delta_{ст}, \lambda_{ст}$ – товщина і коефіцієнт теплопровідності скла.

Для вікна з одинарним склінням, також

$$k_{ок} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_в} + \frac{\delta_{ст}}{\lambda_{ст}} + \frac{1}{\alpha_н}}$$

1.2 Теоретичні методи розрахунку природної конвекції в замкнених порожнинах

Велика увага в теоретичних дослідженнях проблем тепло- і масообміну приділяється вільній конвекції – руху рідини в полі сил тяжіння, обумовленому нерівномірністю температурного поля. Рідина зазвичай вважається нестисненою і зміна густини враховується тільки в завданні гравітаційних сил.

З багатьох класів завдань механіки в'язкої рідини останніми роками помітний прогрес був досягнутий в області саме природно-конвективного тепло- і масообміну. Останнім часом терміном «природна конвекція» позначаються також інші – негравітаційні різновиди конвекції, причиною яких є градієнти сил поверхневого натягу на межі розділу газ – рідина або рідина – рідина (термокапілярна або концентраційно-капілярна конвекція). Вказані механізми конвекції універсальні і лежать в основі більшості рухів рідини або газу, що зустрічаються в природі.

Конвективне перенесення тепла обумовлене рухом самого середовища. Наприклад, дуже важливо враховувати конвективне перенесення при розгляді процесів теплопередачі в рідині (газі). Математичні моделі теплопровідності в цьому випадку повинні доповнюватися моделями руху самого середовища.

Розвиток механіки рідини і газу і її застосувань останніми роками пов'язаний із застосуванням загальних математичних моделей, заснованих на рівняннях Навьє-Стокса. Ці рівняння, виведені більше 150 років тому, ще в середині XIX ст., у загальному вигляді мало вивчені і містять величезний запас інформації. Їх окремими випадками є класичні рівняння ідеальної (нев'язкої) рідини і рівняння примежового шару. Наслідком початкових рівнянь Навьє-Стокса є також рівняння акустики, внутрішніх хвиль, теорії стійкості і усереднені рівняння турбулентного руху (рівняння Рейнольдса). Проте всі згадані рівняння, багато з яких мають достатньо складний характер, не виявляють всього багатства фізичних ефектів, властивих початковим рівнянням Навьє-Стоксу.

Розрізняють чисельні та аналітичні методи досліджень цих рівнянь. Аналітичні методи дозволяють отримати рішення в вигляді функціональної залежності температури, швидкостей від координати часу, а чисельні методи дають значення невідомих величин в деяких заданих наперед точках в фіксований момент часу.

Для чисельного вирішення може застосовуватися метод дискретизації, зазвичай іменований методом сіток. Цей метод є в даний час найбільш розповсюдженим методом вирішення завдань тепло- і масообміну. Суть методу полягає в наступному. В області зміни незалежних змінних вводиться сітка – дискретна сукупність вузлових точок. Замість функцій безперервного аргументу розглядаються сіткові функції, значення яких задаються у вузлових точках сітки. Диференціальні рівняння з відповідними краєвими умовами замінюються наближеними сітковими рівняннями, що зв'язують значення шуканих функцій у вузлах сітки.

Метод кінцевих різниць, що застосовується на порівняно регулярних сітках і є різновидом методу сіток, полягає в заміні похідних, що входять в диференціальні рівняння, кінцево-різницевими виразами. Останніми роками все більш широке розповсюдження при конструюванні чисельних алгоритмів набуває метод кінцевих елементів (МКЕ), який має строге математичне формулювання, будучи, з одного боку, різновидом методу сіток, а з іншої – чисельною реалізацією методу Рітца або Бубнова–Галеркина на кінцевому елементі. Високу обчислювальну ефективність методу забезпечує вибір функцій кусково-поліноміального вигляду. Природна можливість застосування нерегулярних сіток в МКЕ дозволяє ефективно апроксимувати криволінійні межі області, а варіаційне формулювання завдання дозволяє легко враховувати різні типи граничних умов. Перевагою цього методу є також можливість автоматичного складання системи рівнянь кінцевих елементів.

Розглянемо деякі відомі приклади застосування чисельних та аналітичних методів досліджень рівнянь Навьє- Стоксу, зважаючи при цьому на те, що при специфічній нелінійності останніх, наявність малого параметра при старшій похідній у поєднанні з просторовим характером руху і нестаціонарністю їх можна вивчати, мабуть, лише за допомогою чисельних методів.

Аж до середини 60-тих років XX ст., тобто до початку широкого розповсюдження ЕОМ і чисельних методів в гідродинаміці, чисельних розв'язань рівнянь Навьє-Стокса та енергії була практично неможливе. В даний час чисельне моделювання на основі рівнянь Навьє-Стокса сформувалося як самостійний напрям в аерогідромеханіці та тепломасообміні.

З багатьох класів завдань механіки в'язкої рідини, які вивчалися на основі рівнянь Навьє-Стокса, останніми роками помітний прогрес був досягнутий в області природно-конвективного тепло- і масообміну і пов'язаних з ним застосувань. Методам чисельного вирішення завдань математичної фізики присвячена різноманітна література.

Прогрес у розвитку чисельних методів був досягнутий зусиллями таких математиків як О. М. Білоцерківський, С. Д. Годунов, А. А. Самарський, В. М. Пасканов, В. І. Полежаєв, Л. А. Чудов. Ряд первинних відомостей і проміжних математичних моделей, починаючи від елементів теорії різницевих схем, міститься в книзі Самарського А. А., Пасканова В. М., Полежаєва В. І., Чудова Л. А..

Книга Госмена А. Д., Ранчеля В. М., Сполдинга Д. Б. та Вольфштейна [1] присвячена розробці і застосуванню простого чисельного алгоритму для вирішення рівнянь Навьє-Стоксу, які описують стаціонарний двовимірний плоский і вісесиметричний ламінарний і турбулентний рух багатокомпонентного рідкого середовища. Основний зміст книги присвячений розробці і обговоренню різних аспектів чисельного методу без достатньо докладного обговорення постановок завдань і фізичних наслідків з їх рішень, детально виводяться рівняння Навьє-Стокса, а також граничні умови в криволінійних ортогональних координатах для плоского і вісесиметричного перебігу багатокомпонентного газу, що стискається, і їм надається вигляд, зручний для застосування чисельного методу. Рівняння дифузії записуються в наближенні бінарної дифузії з одним і тим же коефіцієнтом дифузії для всіх компонентів. А також детально висловлюється суть чисельного методу. Для різницевої апроксимації конвективних членів використовується несиметрична різницева схема першого порядку точності, орієнтована «проти потоку»:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi U)=\begin{cases}\dfrac{(\phi U)_{i+1,j}-(\phi U)_{i,j}}{\Delta x}, \text{при } U<0,\\ \dfrac{(\phi U)_{i,j}-(\phi U)_{i-1,j}}{\Delta x}, \text{при } U>0.\end{cases}$$

Згідно цьому підходу, інформація в елемент передається тільки від елементів, розташованих вище по потоку від даного елементу, і, навпаки, інформація від елементу передається тільки елементам, розташованим нижче по потоку від даного елементу. При зміні знаку швидкості, наприклад, поблизу вузла необхідно модифікувати цю схему відповідно до закону збереження в кожному елементі. Ці міркування фізичного характеру, а також строгі розгляди модельних аналогів рівнянь Навьє-Стокса показують, що несиметрична різницева схема в протилежність симетричній дає безумовно стійку схему розрахунку при достатньо великих числах Рейнольдса. Проте слід відмітити, що ця схема першого порядку точності і має в'язкість апроксимації, яка стає сумірною з фізичною в'язкістю при числах Re ~ 10^3.

У 1974 році була опублікована книга Г. Шліхтінга [2], в якій описані методи точного і наближеного вирішення рівнянь Навьє-Стоксу. Під точними рішеннями розуміли такі рішення, які виходили з рівнянь Навьє-Стоксу при збереженні всіх членів, тотожно не рівних нулю для течій, що вивчалися. В протилежність цьому під наближеними рішеннями розумілися такі рішення, які виходять з рівнянь Навьє-Стоксу шляхом відкидання в них членів, по своїй величині малих в умовах даного завдання. При наближених рішеннях особливу роль грають два граничні випадки: у першому з них сили тертя значно більше, чим сили інерції (повзучий рух), в другому ж вони значно менші, ніж сили інерції (течія в пограничному шарі). Тоді як в першому випадку допустимо повністю відкинути інерційні члени, в другому випадку, тобто в теорії пограничного шару, ні в якому разі не можна одночасно відкинути всі члени, залежні від в'язкості, оскільки це привело б до неможливості виконання фізично істотної граничної умови – умови прилипання рідини до стінок.

Книга П. Роуча [3] присвячена чисельному вирішенню рівнянь гидрогазодинамики. У ній розглядаються різні форми рівнянь і варіанти граничних умов, описуються різноманітні типи кінечно-різницевих схем, обговорюються їх точність, стійкість і збіжність. Даються рекомендації по програмуванню і обробці отримуваної інформації.

Ці рівняння розглядаються в цілому ряді практично цікавих випадків (відрив потоку, кормовий слід, взаємодія в'язкого газу з ударною хвилею), які не охоплюються концепцією пограничного шару. Значна частина книги присвячена чисельній інтеграції рівнянь руху нестискуваної в'язкої рідини в нестаціонарному випадку. У книзі освітлюють питання стійкості і збіжності вирішення кінечно-різницевих рівнянь. Представляє інтерес аналіз різного типу помилок, обумовлених різницевими схемами. Автор приділяє дуже велику увагу чисельному представленню граничних умов, які мають першорядне значення, впливаючи як на точність, так і на стійкість чисельного рішення задачі.

Обговорення цього питання проводиться так детально, що в цьому відношенні книга не має собі аналогів.

В [4] використовуючи єдину форму запису рівнянь переносу, можливо розвинути єдиний метод їх рішення, поступово ускладнюючи його у міру обліку окремих членів загального рівняння, що визначає залежну змінну. Цікаве фізичне трактування параболічного або еліптичного характеру використовуваних рівнянь. Проводячи процес побудови методу, автор прагне показати його тонкощі, які зазвичай не розглядаються, але дуже важливі при практичній реалізації методу. Прикладом цього можуть служити чотири основних правила, що лежать в основі методу. Підхід автора може виявитися надзвичайно корисним і при використанні інших чисельних методів. Схема побудови методу не зовсім звичайна. Виходячи з узагальненого запису початкових рівнянь автор починає з простого випадку завдання теплопровідності, потім переходить, вводячи в розгляд конвективні члени, до завдання конвективного теплообміну і до розвитку методу на завдання визначення поля швидкості рідини. Ця схема дозволяє краще зрозуміти спільність таких змінних, як температура і кількість руху, і дуже корисна для розуміння і інтерпретації результатів розрахунків. Тут, зокрема, проведений чисельний розрахунок параболізованих течії і встановлений зв'язок запропонованого методу з методом кінцевих елементів. Цікаве трактування схемної в'язкості (дифузії), дане автором.

Явища тепло- і масопереносу моделюються на основі рівнянь Навьє-Стокса в наближенні нестискуваної рідини. Розглянуті методи вирішення завдань конвекції при використанні початкових змінних «швидкість, тиск, температура». Для формулювання прийнятного завдання для тиску використовуються адитивні операторно-різницеві схеми.

Для двовимірних задач конвекції традиційно широко використовуються методи, засновані на використанні змінних «функція струму, вихор швидкості і температура». Такий підхід приводить до звичайних рівнянь математичної фізики для невідомих. На основі загальної теорії адитивних різницевих схем будуються безітераційні різницеві схеми із завданням вихора швидкості на границі.

Для моделювання течії в'язкої нестискуваної теплопровідної рідини в каналах, трубах використовуються спрощені моделі, засновані на вирішенні параболізованих рівнянь Навьє-Стокса. Аналізуються особливості вирішення завдань в таких постановках на прикладі завдання про течію на вході в плоский канал.

Задачі конвекції в замкнутих плоских областях і судинах, які були історично першими для моделювання на основі рівнянь Навьє-Стокса, стали вже класичними. Для цього класу завдань (або для так званих моделей загального призначення) встановлені фундаментальні закономірності, до яких належить ефект максимуму температурного (концентраційного) розшарування.

1.3 Експериментальні дослідження конвекції в порожнинах

Величина теплового потоку, що проходить через шар, є основною характеристикою, яка вивчається давно. У цих експериментах встановлені емпіричні залежності виду Nu=a·Ra·b, де a, b — константи, визначувані з дослідів.

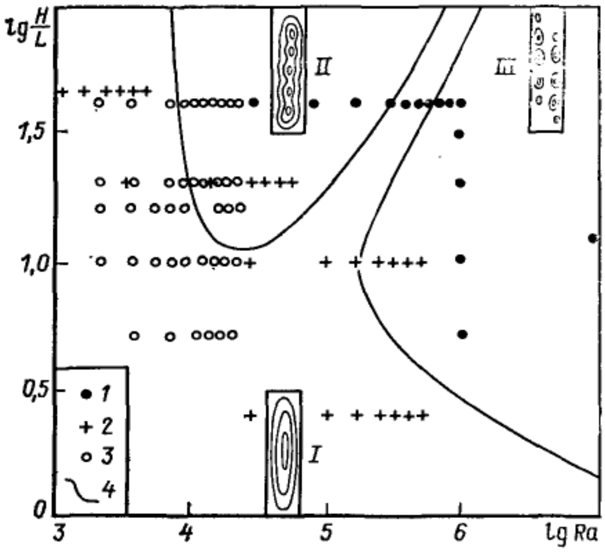
Починаючи з 60-х років вся більша увага приділяється дослідженню локальних характеристик конвекції в шарі – структурі течії і прикордонних шарів, розподілу місцевого потоку тепла, стратифікації. Цей інтерес пов’язаний перш за все з практичними вимогами до підтримки теплового режиму в елементах різних технічних пристроїв.

Виконаний ряд експериментальних робіт, в яких вивчався не тільки теплообмін для шарів різного подовження і різних рідин (газів), але і структура течії за допомогою інтерферометра або стробоскопа з введенням візуалізуючих частинок. Для турбулентного режиму конвекції, перехід до якого можливий при числах Релея $Ra>10^8$. Техніка експериментальних робіт в даний час дозволяє визначати не тільки перенесення тепла через шар, але і локальну температуру і швидкість, зокрема, шляхом використання лазерних систем. Разом з тим розширення діапазону визначальних параметрів і детальні дослідження локального розподілу полів в шарі все ще представляють складне завдання. У експерименті важко змінювати в широкому діапазоні розміри шару, перепад температури, підтримувати задані граничні умови (постійність температури або потоку тепла).

Є також труднощі у визначенні структури і локальних характеристик полів швидкості і температури у всьому робочому об'ємі та ін. Докладні експериментальні дані отримані при відносно невеликій зміні числа Релея (на один-два порядку) для ламинарного і турбулентних режимів. В той же час експерименти, в яких число Релея змінюється на три-п’ять порядків (за рахунок зміни в'язкості теплоносія або температури і розмірів установки), дають сильний розкид.

Розглянемо основні режими конвективної течії і теплообміну у вертикальному шарі із заданим постійним перепадом температури між стінками і теплоізольованими основами. У такій постановці границі між режимами визначаються безрозмірними параметрами Ra, Pr, H/L або їх поєднаннями $Ra_H=Ra(H/L)^3$, Gr=Ra/Pr і тому подібне. В [5] виділені режими теплообміну (теплопровідність, конвекція). Для кожного режиму була побудована своя область в діапазоні всіх визначальних параметрів. Відмічено також, що спроби однозначного визначення меж між режимами як функції тільки від одного параметра Ra, Ra_H або навіть від двох параметрів (Ra, H/L), (Ra_H, H/L) приводять до значного розкиду і суперечливості між результатами різних авторів. На рисунку 1.1 в координатах Ra, H/L приведені межі конвективної стійкості, параметри експериментів [6] та чисельних розрахунків [7].

Поблизу $Ra=10^6$ проходить, як показано нижче, межа між стаціонарним і нестаціонарним режимами і межа між течіями з різною структурою, тому в цій області виконані докладніші чисельні розрахунки. Структура течії є функцією всіх трьох основних параметрів: Ra, Pr, H/L.



1– розрахунки авторів; 2 – експерименти [6]; 3–чисельні розрахунки [7]; 4- межі конвективної стійкості [8]

Рисунок 1.1 – Основні режими конвекції у вертикальному шарі при Pr=0,7; режими: стаціонарний одноосередковий, стаціонарний багатоосередковий, нестаціонарний багатоосередковий

На рисунку 1.2 приведені ізотерми і лінії функції току, що показують вплив числа Ra на структуру цих полів для Pr = 0,7 і H/L = 40. При Ra<<10^3 перенесення тепла відбувається шляхом теплопровідності і в основній частині вертикального шару реалізується перебіг з кубічним профілем швидкості. Збільшення числа Релея (10^4…10^5) приводить до виникнення системи витягнутих по вертикалі осередків. Відстань між осередками (довжина хвилі) залежить від визначальних параметрів. У роботі [9] на основі методу Галеркіна виконано дослідження стійкості стаціонарних рухів для випадку Pr=0 (режим теплопровідності). Як видно з рис. 1.2, для Pr = 0,7 розподіл температури відрізняється від теплопровідного починаючи з Ra<<10^4.

Збільшення Ra веде до формування стійкої температурної стратифікації, яка надає стабілізуючу дію на течію. З взаємодією системи осередків при Ra<<10^4…$2\cdot10^5$ можуть бути зв'язані коливання інтенсивності циркуляції в окремих осередках, проте внесок додаткової циркуляції в осередках в перенесення тепла упоперек шаруючи при даних параметрах малий.

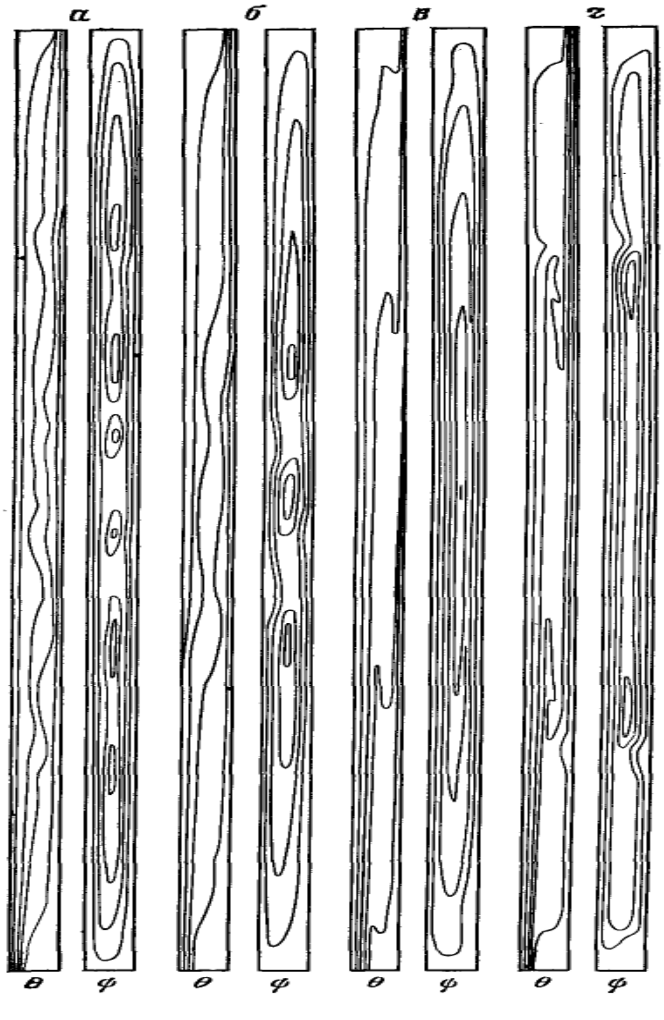


Рисунок 1.2 – Ізотерми і лінії функції току

При Ra≅$2\cdot10^5$ взаємодія зустрічних потоків слабшає: між ними утворюється застійна зона, що веде до зникнення системи вихрів. Вплив стійкої стратифікації посилюється, особливо поблизу торців, де напрям руху змінюється, а інтенсивність падає. Цей вплив полягає в тому, що поблизу торців утворюються зони підвищеної стійкості і основна циркуляція відтісняється від цих областей. При Ra>$3\cdot10^5$ виникає якісно нова форма руху: висхідний уздовж нагрітої стінки потік розділяється приблизно на висоті 0,75H на дві частини, одна з яких продовжує висхідний рух, а інша переходить в зустрічний потік уздовж холодної стінки, який поводиться аналогічно, розщеплюючись на висоті H/4. Такий рух відбивається на розподілі температури і потоків тепла в шарі і буде детально розглянуто нижче.

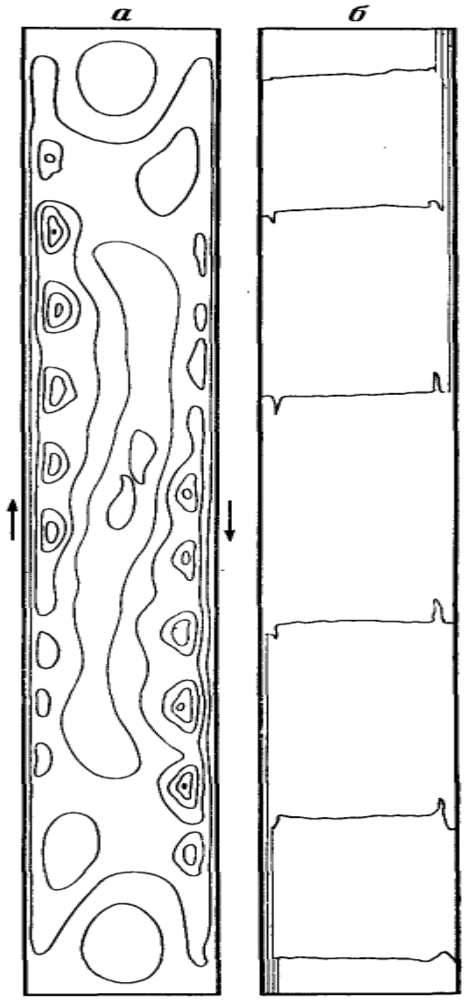


Рисунок 1.3 – Комірчаста структура руху

При $Ra<<7\cdot10^5$ з'являються коливання температури і швидкості в пристіночній області (на нагрітій стінці – поблизу верхнього торця, на холодній – поблизу нижнього). Для $Ra=10^6$ (див. рис. 1.2) ці коливання практично не позначаються на структурі основного потоку, середніх локальних і інтегральних характеристиках.

Подальше збільшення Ra до $(2\ldots4)\cdot10^6\ldots10^8$ і відповідне підвищення інтенсивності руху приводять до появи нерегулярних вихрових структур з масштабом порядку L. Це супроводжується різким зростанням амплітуди коливань інтегральних і локальних характеристик тепломасообміну, що характерний для перехідного до турбулентності режиму.

Комірчаста структура руху, пов'язана з взаємодією зустрічних потоків при помірних числах Релея у вертикальному шарі, досліджувалася як експериментальними, так і теоретичними методами. При Pr~1, що відповідає однаковій товщині теплового і динамічного прикордонних шарів, межі існування такої структури відповідають перехідному режиму (від теплопровідності до режиму прикордонного шару), тобто $Ra << 10^4…10^5$. Проте є окремі експериментальні роботи, з яких можна зробити висновок про наявність при числах Релея $Ra>10^8$ іншого типу вихрового руху, – системи дрібних в порівнянні з шириною шару вихорів, що виникають на деякій висоті і рухомих з рідиною поблизу прикордонного шару уздовж кожної стінки.

Типовий вид такої структури показаний на рис. 1.3 ($Ra=10^5...10^9$, H/L=20, Pr=15). Для стаціонарних режимів лінії функції струму співпадають з траєкторіями руху рідини і дозволяють отримати достатньо повну інформацію про структуру течії.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ТА ТЕПЛООБМІНУ ГАЗУ У ПРОШАРКУ

2.1. Рівняння руху та теплообміну

Розглянемо рух та перенос тепла при природній конвекції в стиснутому газі, замкненому в плоскому вертикальному шарі скінченної висоти H між двома вертикальними поверхнями (склом вікна), розміщеними одна від одної на відстані L з різними температурами та теплоізольованими основами. Сила тяжіння направлена протилежно осі Oy (рисунок 2.1).

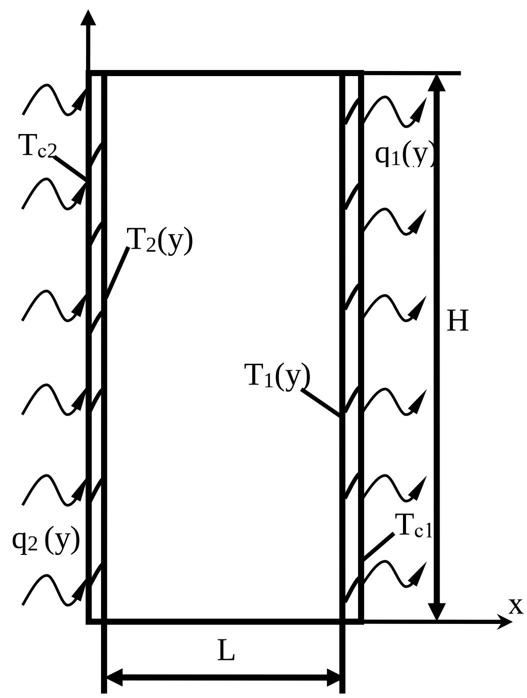


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема до математичної моделі

Для побудови числового методу розв’язання використаємо класичну систему двовимірних рівнянь Навьє-Стокса для конвекції, тепло- і масообміну в приближенні Буссінеске. Ці рівняння виводяться із загальних рівнянь Навьє-Стокса для стиснутої рідини (газу) припускаючи, що рідина (газ) динамічно та статично не стискувальна, тобто її густина не залежить від тиску — розглядається невисокий стовп газу, в якому зміна густини з висотою не суттєва, але густина може залежить від температури, що призводить до появи сил, зумовлюючих конвекційний рух. Припускається також, що відхилення всіх термодинамічних параметрів від їх величин, відповідних умовам статичної рівноваги, малі.

Запишемо рівняння Буссінеске для газу, рівняння стану якого задано в вигляді

$$\rho = \rho(T)$$

З нього видно, що припускається, що густина не залежить від тиску. Припустимо також, що

$$\rho = \rho_0 + \rho', T = T_0 + T', P = P_0 + P' \tag{2.1}$$

де T_0 – деяке постійне середнє значення, від якого відраховується нерівномірність температури T';

P_0 – тиск, відповідний механічній рівновазі при постійній температурі T_0 і густині ρ_0, не є постійною величиною та змінюється з висотою згідно з гідростатичному рівнянню

$$P_0 = -\rho_0 \vec{g} y \text{ чи } gradP_0 = \rho_0 \vec{g} \tag{2.2}$$

Будемо вважати, що $T' < T_0$, а якщо мале T', то мала також викликана ним зміна густини ρ', тобто $\rho' < \rho_0$.

Причому можна записати

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p \cdot T' = -\rho_0 \beta T' \tag{2.3}$$

де $\beta = -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p}$ – температурний коефіцієнт розширення, ($\beta>0$).

Відповідно припускаємо, що відхилення P' також малі, тобто має місце: $P' < P_0$.

Система двовимірних рівнянь Навьє-Стокса для стиснутого газу складається з рівнянь кількості руху, нерозривності та енергії.

Розглянемо спочатку рівняння кількості руху, представленні у наступному нестаціонарному виді і перетворимо їх

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UU)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VU) = -\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho V)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VV) = -\rho g-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тоді з першого рівняння (2.4), використовуючи (2.1)-(2.3), отримаємо

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P_0\text{-}P'\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0 gy+P'\right) = -\frac{\partial P'}{\partial x}$$

Відповідно з другого рівняння (2.4)

$$\begin{gathered}
-\rho g-\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 g\left(1-\beta T'\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho_0 gy+P'\right) =\\
-\rho_0 g+\rho_0 g\beta T'+\rho_0 g-\frac{\partial P'}{\partial y} = \rho_0 g\beta T'-\frac{\partial P'}{\partial y}
\end{gathered}$$

Тоді рівняння (2.4) набудуть вигляду, і разом з рівнянням нерозривності остаточно отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UU)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV)=-\frac{\partial P'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho V)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VV)=-\frac{\partial P'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\rho g\beta T'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V)=0$$

Якщо врахувати, що густина та коефіцієнт кінетичної в'язкості сталі, то

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}(UU)+\frac{\partial}{\partial y}(UV)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

(2.6)

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}(UV)+\frac{\partial}{\partial y}(VV)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+g\beta T'$$

Для повної системи необхідно розглянути рівняння енергії при помірних швидкостях руху, коли робота зовнішніх сил та потік кінетичної енергії малі в порівнянні з його ентальпією (можна знехтувати впливом зміни тиску та кінетичної енергії) [2]:

$$\rho\frac{di}{d\tau}=div(\lambda gradT),$$

чи враховуючи вираз для ентальпії ідеального газу $i=CpT$ та рівняння нерозривності

$$\rho\frac{\partial i}{\partial\tau}+\rho V_x\frac{\partial i}{\partial x}+\rho V_y\frac{\partial i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho i)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho U i)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V i)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho CpT)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UCpT)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VCpT)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Враховуючи (2.1) і якщо $\rho,\lambda,Cp-$ сталі величини, тоді можна записати

$$\rho Cp\left[\frac{\partial T'}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}(UT')+\frac{\partial}{\partial y}(VT')\right]=\lambda\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right). \tag{2.8}$$

Граничними умовами для рівнянь (2.4) та (2.6) будуть умови "прилипання" на границі розрахункової області

$$U=0,V=0 \text{ при } x=0,x=L;y=0,y=H. \tag{2.9}$$

Для температури

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=H}=0;$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{\alpha_2}{\lambda}\left(T_2(y)-T_{c_1}\right),\quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=-\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(T_1(y)-T_{c_2}\right). \tag{2.10}$$

Якщо температура скла підтримується сталою, то

$$T\big|_{x=0}=T_2,\qquad T\big|_{x=L}=T_1. \tag{2.11}$$

Вводячи масштаби для шуканих величин та незалежних змінних, необхідно привести систему до безрозмірного виду. В якості масштабу виберемо відстань між склами L, швидкість $V_1 = \frac{\nu}{L}$. Тоді безрозмірні

$$\bar{X} = \frac{x}{L},\ \bar{Y} = \frac{y}{L}, \bar{T} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1},\ \bar{U} = \frac{U}{V_1} = \frac{UL}{\nu},\ \bar{V} = \frac{V}{V_1} = \frac{VL}{\nu},$$

$$T' = T - T_0,\ \bar{T}_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_1},\ T = \bar{T}\left(T_2 - T_1\right) + T_1,\ T_0 = \bar{T}_0\left(T_2 - T_1\right) + T_1,$$

$$T' = T - T_0 = \bar{T}\left(T_2 - T_1\right) + T_1 - \bar{T}_0\left(T_2 - T_1\right) - T_1 = \left(T_2 - T_1\right)\left(\bar{T} - \bar{T}_0\right) =$$
$$= \left(T_2 - T_1\right)\Delta\bar{T},$$

де $\Delta\bar{T} = \bar{T} - \bar{T}_0$.

$$\bar{\tau} = \tau\frac{V_1}{L} = \tau\frac{\nu}{L^2}.$$

Тоді перше рівняння (2.6) можна записати

$$\frac{\partial\left(\bar{U}V_1\right)}{\partial\bar{\tau}\, L/V_1} + \frac{\partial\bar{U}\bar{U}V_1V_1}{\partial\bar{x}L} + \frac{\partial\bar{U}\bar{V}V_1V_1}{\partial\bar{y}L} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial\bar{x}L} + \nu\left(\frac{\partial^2\bar{U}V_1}{\partial\bar{x}^2L^2} + \frac{\partial^2\bar{U}V_1}{\partial\bar{y}^2L^2}\right),$$

Помножимо на L/V_1^2

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{\tau}} + \frac{\partial\bar{U}\bar{U}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{U}\bar{V}}{\partial\bar{y}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{P'}{\rho V_1^2}\right) + \frac{1}{V_1L/\nu}\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{y}^2}\right),$$

Для другого рівняння (2.6)

$$\frac{\partial\left(\bar{V}V_1\right)}{\partial\bar{\tau}\,{}^{L}\!/\!{}_{V_1}}+\frac{\partial\bar{U}\bar{V}V_1V_1}{\partial\bar{x}L}+\frac{\partial\bar{V}\bar{V}V_1V_1}{\partial\bar{y}L}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial\bar{y}L}+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{V}V_1}{\partial\bar{x}^2L^2}+\frac{\partial^2\bar{V}V_1}{\partial\bar{y}^2L^2}\right)+$$

$$+g\beta\left(T_2-T_1\right)\Delta\bar{T}.$$

Помножимо рівняння на ${}^{L}\!/\!{}_{V_1{}^2}$

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\tau}}+\frac{\partial\bar{U}\bar{V}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{V}\bar{V}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\frac{P'}{\rho V_1{}^2}\right)+\frac{1}{{}^{V_1L}\!/\!{}_{\nu}}\left(\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\bar{y}^2}\right)+\frac{g\beta\left(T_2-T_1\right)}{V_1{}^2}\Delta\bar{T},$$

або

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{\tau}}+\frac{\partial\bar{U}\bar{V}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{V}\bar{V}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{P}'}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\bar{y}^2}\right)+\frac{Gr}{\mathrm{Re}^2}\Delta\bar{T},$$

де

$$\bar{P}'=\frac{P'}{\rho V_1{}^2}=\frac{P'L^2}{\rho\nu^2}=\frac{\left(P-P_0\right)L^2}{\rho\nu^2},$$

$${}^{V_1L}\!/\!{}_{\nu}=\mathrm{Re},\qquad \frac{g\beta\left(T_2-T_1\right)L^3}{\nu^2}=Gr,$$

звідси

$$\frac{g\beta\left(T_2-T_1\right)L^3 \big/ \nu^2}{V_1{}^2 L^2 \big/ \nu^2}=\frac{Gr}{\mathrm{Re}^2},$$

приймаємо $\mathrm{Re}=1$.

Опускаючи риски над безрозмірними величинами, будемо мати

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{\partial UU}{\partial x}+\frac{\partial UV}{\partial y}=-\frac{\partial P'}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right),$$

(2.12)

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{\partial UV}{\partial x}+\frac{\partial VV}{\partial y}=-\frac{\partial P'}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+Gr\Delta T.$$

Тепер приведемо до безрозмірного вигляду рівняння енергії, представлене як

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}(UT)+\frac{\partial}{\partial y}(VT)=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),$$

де a – коефіцієнт температуропровідності, $a=\frac{\lambda}{Cp\rho}$.

Так як $T=\bar{T}\left(T_2-T_1\right)+T_1$, тоді

$$\frac{\partial\left(\bar{T}\left(T_2-T_1\right)+T_1\right)}{\partial\bar{\tau}\, L \big/ V_1}+\frac{\partial}{\partial\bar{x}L}\left(\bar{U}V_1\left(\bar{T}\left(T_2-T_1\right)+T_1\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{V}V_1\left(\bar{T}\left(T_2-T_1\right)+T_1\right)\right)=$$

$$= a\left(\frac{\partial^2\left(\overline{T}\left(T_2 - T_1\right) + T_1\right)}{\partial\overline{x}^2 L^2} + \frac{\partial^2\left(\overline{T}\left(T_2 - T_1\right) + T_1\right)}{\partial\overline{y}^2 L^2} \right),$$

$$\frac{\left(T_2 - T_1\right)V_1}{L}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\tau} + \frac{\left(T_2 - T_1\right)V_1}{L}\frac{\partial\left(\overline{U}\overline{T}\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{V_1 T_1}{L}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{x}} + \frac{\left(T_2 - T_1\right)V_1}{L}\frac{\partial\left(\overline{V}\overline{T}\right)}{\partial\overline{y}} + \frac{V_1 T_1}{L}\frac{\partial\overline{V}}{\partial\overline{y}} =$$

$$= a\frac{T_2 - T_1}{L^2}\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{y}^2} \right).$$

Помножимо рівняння на $\dfrac{L}{\left(T_2 - T_1\right)V_1}$

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial\tau} + \frac{\partial\left(\overline{U}\overline{T}\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\left(\overline{V}\overline{T}\right)}{\partial\overline{y}} = \frac{a}{LV_1}\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{y}^2} \right),$$

Перетворимо $\dfrac{a}{LV_1} = \dfrac{a}{LV_1\nu/\nu} = \dfrac{a}{\nu\,\mathrm{Re}} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}}$, так як $\dfrac{\nu}{a} = \mathrm{Pr}$.

Опускаючи риски над безрозмірними величинами, остаточно будемо мати

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} + \frac{\partial\left(UT\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(VT\right)}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial y^2} \right). \qquad (2.13)$$

Граничні умови

$$U = 0, V = 0, \text{ при } x = 0, x = 1; y = 0, y = H/L.$$

(2.14)

$$T\big|_{x=0} = 1, \qquad T\big|_{x=1} = 0.$$

2.2 Дискретний аналог рівнянь

Запишемо рівняння нерозривності та проінтегруємо його

$$\iiint\left[\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V)\right]dxdyd\tau=$$

$$=\left(\rho_{\mathrm{ij}}-\rho_{\mathrm{ij}}^{0}\right)\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta y_{\mathrm{j}}+\left[(\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}+(\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}\Delta\tau+\left[(\rho V)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}+(\rho V)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta\tau$$

Рівняння переносу

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UU)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV)=-\frac{\partial P'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho V)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VV)=-\frac{\partial P'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\rho g\beta T'$$

1) Інтегруємо по U

$$\iiint\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho UU-\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right]dxdyd\tau=$$

$$=\left[(\rho UU)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-(\rho UU)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}-\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}+\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}\Delta\tau.$$

$$\iiint\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho UV-\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right]dxdyd\tau=$$

$$=\left[(\rho UV)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}-(\rho UV)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}-\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}+\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta\tau.$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho U)\,dxdyd\tau = \left[(\rho U)_{\mathrm{ij}} - (\rho U)^{0}_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta y_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[(\rho UU)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} - \left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} - (\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left[(\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} \frac{U_{\mathrm{i+1j}} + U_{\mathrm{ij}}}{2} - \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}}\left(U_{\mathrm{i+1j}} - U_{\mathrm{ij}}\right) - (\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left[(\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}\left[\frac{1}{2}\left(U_{\mathrm{i+1j}} + U_{\mathrm{ij}}\right) - U_{\mathrm{ij}}\right] - \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}}\left(U_{\mathrm{i+1j}} - U_{\mathrm{ij}}\right)\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left(U_{\mathrm{ij}} - U_{\mathrm{i+1j}}\right)\left[-\frac{1}{2}(\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[-(\rho UU)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} + \left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} + (\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left[-(\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} \frac{U_{\mathrm{ij}} + U_{\mathrm{i-1j}}}{2} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}}\left(U_{\mathrm{ij}} - U_{\mathrm{i-1j}}\right) + (\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left[(\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}\left[U_{\mathrm{ij}} - \frac{1}{2}\left(U_{\mathrm{i-1j}} + U_{\mathrm{ij}}\right)\right] + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}}\left(U_{\mathrm{ij}} - U_{\mathrm{i-1j}}\right)\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left(U_{\mathrm{ij}} - U_{\mathrm{i-1j}}\right)\left[\frac{1}{2}(\rho U)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[(\rho VU)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}} - \left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}} - (\rho V)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}} U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}} =$$

$$=\left[(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}\left[f^{U}_{j+\frac{1}{2}}U_{ij+1}+\left(1-f^{U}_{j+\frac{1}{2}}\right)U_{ij}\right]-\frac{\mu^{U}_{ij+\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j+\frac{1}{2}}}\left(U_{ij+1}-U_{ij}\right)-(\rho\vartheta)_{ij+\frac{1}{2}}U_{ij}\right]\times$$

$$\times\Delta x^{U}_{i}=\left[(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}\left[f^{U}_{j+\frac{1}{2}}U_{ij+1}-f^{U}_{j+\frac{1}{2}}U_{ij}\right]-\frac{\mu^{U}_{ij+\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j+\frac{1}{2}}}\left(U_{ij+1}-U_{ij}\right)\right]\Delta x^{U}_{i}=$$

$$=\left(U_{ij}-U_{ij+1}\right)\left[-f^{U}_{j+\frac{1}{2}}(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}+\frac{\mu^{U}_{ij+\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j+\frac{1}{2}}}\right]\Delta x^{U}_{i}.$$

$$\left[-(\rho VU)_{ij-\frac{1}{2}}+\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{ij-\frac{1}{2}}+(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}U_{ij}\right]\Delta x_{i}=$$

$$=\left[-(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}\left[f^{U}_{j-\frac{1}{2}}U_{ij-1}+\left(1-f^{U}_{j-\frac{1}{2}}\right)U_{ij}\right]+\frac{\mu^{U}_{ij-\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j-\frac{1}{2}}}\left(U_{ij}-U_{ij-1}\right)-(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}U_{ij}\right]\times$$

$$\times\Delta x^{U}_{i}=\left[(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}\left[-f^{U}_{j-\frac{1}{2}}U_{ij-1}+f^{U}_{j-\frac{1}{2}}U_{ij}\right]+\frac{\mu^{U}_{ij-\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j-\frac{1}{2}}}\left(U_{ij}-U_{ij-1}\right)\right]\Delta x^{U}_{i}=$$

$$=\left(U_{ij}-U_{ij-1}\right)\left[f^{U}_{j-\frac{1}{2}}(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}+\frac{\mu^{U}_{ij-\frac{1}{2}}}{\delta y^{U}_{j-\frac{1}{2}}}\right]\Delta x^{U}_{i}.$$

Для нестаціонарного члена

$$\left[(\rho U)_{ij}-(\rho U)^{0}_{ij}\right]\frac{\Delta x^{U}_{i}\Delta y^{U}_{j}}{\Delta\tau}-\left(\rho_{ij}-\rho^{0}_{ij}\right)U_{ij}\frac{\Delta x^{U}_{i}\Delta y^{U}_{j}}{\Delta\tau}=\frac{\Delta x^{U}_{i}\Delta y^{U}_{j}}{\Delta\tau}\rho^{0}_{ij}\left(U_{ij}-U^{0}_{ij}\right).$$

Визначаємо відомі величини

$$\delta x^{U}_{i+\frac{1}{2}}=\Delta x_{i+1};\ \mu^{U}_{i+\frac{1}{2}j}=\mu(T_{i+1j});\ \rho_{i+\frac{1}{2}j}=\rho(T_{i+1j});\ \Delta y^{U}_{j}=\Delta y_{j}.$$

$$\delta x^{U}_{\mathrm{i}-1/2} = \Delta x_{\mathrm{i}};\ \mu^{U}_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}} = \mu(T_{\mathrm{i-1j}});\ \rho_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}} = \rho(T_{\mathrm{i-1j}});\ \ \Delta y^{U}_{\mathrm{j}} = \Delta y_{\mathrm{j}}.$$

$$\delta y^{U}_{\mathrm{j}+1/2} = \frac{1}{2}\left(\Delta y_{\mathrm{j}} + \Delta y_{\mathrm{j}+1}\right);\ \mu^{U}_{\mathrm{ij}+1/2} = \mu(T_{\mathrm{ij}+1});\ \rho_{\mathrm{ij}+1/2} = \rho(T_{\mathrm{ij}+1});\ \ f^{U}_{\mathrm{j}+1/2} = \frac{0.5\Delta y_{\mathrm{j}}}{\delta y_{\mathrm{j}+1/2}}.$$

$$\delta y^{U}_{\mathrm{j}-1/2} = \frac{1}{2}\left(\Delta y_{\mathrm{j}} + \Delta y_{\mathrm{j-1}}\right);\ \mu^{U}_{\mathrm{ij}-1/2} = \mu(T_{\mathrm{ij-1}}); \rho_{\mathrm{ij}-1/2} = \rho(T_{\mathrm{ij-1}});\ f^{U}_{\mathrm{j}-1/2} = \frac{0.5\Delta y_{\mathrm{j-1}}}{\delta y_{\mathrm{j}-1/2}};$$

$$\Delta x^{U}_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left(\Delta x_{\mathrm{i}} + \Delta x_{\mathrm{i}+1}\right).$$

Можна отримати

$$a^{U}_{ij} U_{ij} = a^{U}_{i+1j} U_{i+1j} + a^{U}_{i-1j} U_{i-1j} + a^{U}_{ij+1} U_{ij+1} + a^{U}_{ij-1} U_{ij-1} + b_{ij}.$$

$$a^{U}_{i+1j} = \left[-\frac{1}{2}\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}+1/2}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}},$$

$$1\,a^{U}_{i-1j} = \left[\frac{1}{2}\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}}{\delta x^{U}_{\mathrm{i}-1/2}}\right]\Delta y^{U}_{\mathrm{j}},$$

$$a^{U}_{ij+1} = \left[-f^{U}_{\mathrm{j}+1/2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}+1/2} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{ij}+1/2}}{\delta y^{U}_{\mathrm{j}+1/2}}\right]\Delta x^{U}_{\mathrm{i}},$$

$$a^{U}_{ij-1} = \left[f^{U}_{\mathrm{j}-1/2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}-1/2} + \frac{\mu^{U}_{\mathrm{ij}-1/2}}{\delta y^{U}_{\mathrm{j}-1/2}}\right]\Delta x^{U}_{\mathrm{i}},$$

$$b_{ij} = \frac{\Delta x_{\mathrm{i}}^{U} \Delta y_{\mathrm{j}}^{U}}{\Delta \tau} \rho_{\mathrm{ij}}^{0},$$

$$a_{ij}^{U} = a_{i+1j}^{U} + a_{i-1j}^{U} + a_{ij+1}^{U} + a_{ij-1}^{U} + b_{ij}.$$

2) Інтегруємо по V

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho UV - \mu \frac{\partial V}{\partial x}\right] dx dy d\tau =$$

$$= \left[\left(\rho UV\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} - \left(\rho UV\right)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} + \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}} \right] \Delta y_{\mathrm{j}} \Delta \tau.$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho VV - \mu \frac{\partial V}{\partial y}\right] dx dy d\tau =$$

$$= \left[\left(\rho VV\right)_{\mathrm{ij}+1/2} - \left(\rho VV\right)_{\mathrm{ij}-1/2} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+1/2} + \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}-1/2} \right] \Delta x_{\mathrm{i}} \Delta \tau.$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho V\right) dx dy d\tau = \left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}} - \left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}}^{0} \right] \Delta x_{\mathrm{i}} \Delta y_{\mathrm{j}}.$$

$$\iiint \left(\rho g \beta T'\right) dx dy d\tau = \left(\rho g \beta T'\right) \Delta x_{\mathrm{i}} \Delta y_{\mathrm{j}} \Delta \tau.$$

$$\left[\left(\rho UV\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} - \left(\rho U\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} V_{\mathrm{ij}} \right] \Delta y_{\mathrm{j}} =$$

$$= \left[\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} \left(f_{\mathrm{i}+1/2}^{V} V_{\mathrm{i+1j}} + \left(1 - f_{\mathrm{i}+1/2}^{V}\right) V_{\mathrm{ij}} \right) - \frac{\mu_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}}^{V}}{\delta x_{\mathrm{i}+1/2}^{V}} \left(V_{\mathrm{i+1j}} - V_{\mathrm{ij}}\right) - \left(\rho U\right)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}} V_{\mathrm{ij}} \right] \Delta y_{\mathrm{j}}^{V} =$$

$$=\left[(\rho U)_{i+\frac{1}{2}j}\left(f^{V}_{i+\frac{1}{2}}\vartheta_{i+1j}-f^{V}_{i+\frac{1}{2}}V_{ij}\right)-\frac{\mu^{V}_{i+\frac{1}{2}j}}{\delta x^{V}_{i+\frac{1}{2}}}\left(V_{i+1j}-V_{ij}\right)\right]\Delta y^{V}_{j}=$$

$$=\left(V_{ij}-V_{i+1j}\right)\left[-f^{V}_{i+\frac{1}{2}}(\rho V)_{i+\frac{1}{2}j}+\frac{\mu^{V}_{i+\frac{1}{2}j}}{\delta x^{V}_{i+\frac{1}{2}}}\right]\Delta y^{V}_{j}.$$

$$\left[-(\rho UV)_{i-\frac{1}{2}j}+\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}j}+(\rho U)_{i-\frac{1}{2}j}V_{ij}\right]\Delta y_{j}=$$

$$=\left[-(\rho U)_{i-\frac{1}{2}j}\left(f^{V}_{i-\frac{1}{2}}V_{i-1j}+\left(1-f^{V}_{i-\frac{1}{2}}\right)V_{ij}\right)+\frac{\mu^{V}_{i-\frac{1}{2}j}}{\delta x^{V}_{i-\frac{1}{2}}}\left(V_{ij}-V_{i-1j}\right)+(\rho U)_{i-\frac{1}{2}j}V_{ij}\right]\Delta y^{V}_{j}=$$

$$=\left[(\rho U)_{i-\frac{1}{2}j}\left[f^{V}_{i-\frac{1}{2}}V_{ij}-f^{V}_{i-\frac{1}{2}}V_{i-1j}\right]+\frac{\mu^{V}_{i-\frac{1}{2}j}}{\delta x^{V}_{i-\frac{1}{2}}}\left(V_{ij}-V_{i-1j}\right)\right]\Delta y^{V}_{j}=$$

$$=\left(V_{ij}-V_{i-1j}\right)\left[f^{V}_{i-\frac{1}{2}}(\rho U)_{i-\frac{1}{2}j}+\frac{\mu^{V}_{i-\frac{1}{2}j}}{\delta x^{V}_{i-\frac{1}{2}}}\right]\Delta y^{V}_{j}.$$

$$\left[(\rho VV)_{ij+\frac{1}{2}}-\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{ij+\frac{1}{2}}-(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}V_{ij}\right]\Delta x_{i}=$$

$$=\left[(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left(V_{ij+1}+V_{ij}\right)-\frac{\mu^{V}_{ij+\frac{1}{2}}}{\delta y^{V}_{j+\frac{1}{2}}}\left(V_{ij+1}-V_{ij}\right)-(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}V_{ij}\right]\Delta x^{V}_{i}=$$

$$=\left(V_{ij}-V_{ij+1}\right)\left[-\frac{1}{2}(\rho V)_{ij+\frac{1}{2}}+\frac{\mu^{V}_{ij+\frac{1}{2}}}{\delta y^{V}_{j+\frac{1}{2}}}\right]\Delta x^{V}_{i}.$$

$$\left[-(\rho VV)_{ij-\frac{1}{2}}+\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{ij-\frac{1}{2}}+(\rho V)_{ij-\frac{1}{2}}V_{ij}\right]\Delta x_{i}=$$

$$=\left[-(\rho V)_{ij-1/2}\frac{1}{2}\left(V_{ij-1}+V_{ij}\right)+\frac{\mu^{V}_{ij-1/2}}{\delta y^{V}_{j-1/2}}\left(V_{ij}-V_{ij-1}\right)-(\rho V)_{ij-1/2}V_{ij}\right]\Delta x^{V}_{i}=$$

$$=\left(V_{ij}-V_{ij-1}\right)\left[\frac{1}{2}(\rho V)_{ij-1/2}+\frac{\mu^{V}_{ij-1/2}}{\delta y^{V}_{j-1/2}}\right]\Delta x^{V}_{i}.$$

Для нестаціонарного члена

$$\left[(\rho V)_{ij}-(\rho V)^{0}_{ij}\right]\frac{\Delta x^{V}_{i}\Delta y^{V}_{j}}{\Delta\tau}-\left(\rho_{ij}-\rho^{0}_{ij}\right)V_{ij}\frac{\Delta x^{V}_{i}\Delta y^{V}_{j}}{\Delta\tau}=\frac{\Delta x^{V}_{i}\Delta y^{V}_{j}}{\Delta\tau}\rho^{0}_{ij}\left(V_{ij}-V^{0}_{ij}\right).$$

Визначаємо відомі величини

$$\delta x^{V}_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left(\Delta x_{i}+\Delta x_{i+1}\right);\;\; f^{V}_{i+1/2}=\frac{0.5\Delta x_{i}}{\delta x_{i+1/2}};$$

$$\Delta y^{V}_{j}=\frac{1}{2}\left(\Delta y_{j}+\Delta y_{j+1}\right);\; \mu^{V}_{i+1/2\,j}=\mu(T_{i+1j}).$$

$$\delta x^{V}_{i-1/2}=\frac{1}{2}\left(\Delta x_{i}+\Delta x_{i-1}\right);\;\; \mu^{V}_{i-1/2\,j}=\mu(T_{i-1j});\;\; f^{V}_{i-1/2}=\frac{0.5\Delta x_{i}}{\delta x_{i-1/2}};$$

$$\delta y^{V}_{j+1/2}=\Delta y_{j+1};\;\; \mu^{V}_{ij+1/2}=\mu(T_{ij+1});\; \rho_{ij+1/2}=\rho(T_{ij+1}).$$

$$\delta y^{V}_{j-1/2}=\Delta y_{j};\;\; \mu^{V}_{ij-1/2}=\mu(T_{ij-1});\; \rho_{ij-1/2}=\rho(T_{ij-1});\; \Delta x^{V}_{i}=\Delta x_{i}.$$

Можна отримати

$$a_{ij}^{V}V_{ij}=a_{i+1j}^{V}V_{i+1j}+a_{i-1j}^{V}V_{i-1j}+a_{ij+1}^{V}V_{ij+1}+a_{ij-1}^{V}V_{ij-1}+b_{ij}.$$

$$a_{i+1j}^{V}=\left[-f_{\mathrm{i}+1/2}^{V}\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}+1/2\mathrm{j}}+\frac{\mu_{\mathrm{i}+1/2\mathrm{j}}^{V}}{\delta x_{\mathrm{i}+1/2}^{V}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{V},$$

$$a_{i-1j}^{V}=\left[f_{\mathrm{i}-1/2}^{V}\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}-1/2\mathrm{j}}+\frac{\mu_{\mathrm{i}-1/2\mathrm{j}}^{V}}{\delta x_{\mathrm{i}-1/2}^{V}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{V},$$

$$a_{ij+1}^{V}=\left[-\frac{1}{2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}+1/2}+\frac{\mu_{\mathrm{ij}+1/2}^{V}}{\delta y_{\mathrm{j}+1/2}^{V}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{V},$$

$$a_{ij-1}^{V}=\left[\frac{1}{2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}-1/2}+\frac{\mu_{\mathrm{ij}-1/2}^{V}}{\delta y_{\mathrm{j}-1/2}^{V}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{V},$$

$$b_{ij}=\frac{\Delta x_{\mathrm{i}}^{V}\Delta y_{\mathrm{j}}^{V}}{\Delta\tau}\rho_{\mathrm{ij}}^{0}+\left(\rho g\beta T'\right)\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta y_{\mathrm{j}},$$

$$a_{ij}^{U}=a_{i+1j}^{U}+a_{i-1j}^{U}+a_{ij+1}^{U}+a_{ij-1}^{U}+\frac{\Delta x_{\mathrm{i}}^{V}\Delta y_{\mathrm{j}}^{V}}{\Delta\tau}\rho_{\mathrm{ij}}^{0}.$$

Для знаходження невідомого тиску, розглянемо рівняння кількості руху, до складу яких він входить. При заданому полі тиску, рішення рівнянь кількості руху можливо отримати за допомогою дискретного аналогу узагальненої змінної. В результаті будемо мати для двомірного випадку

$$a^U_{i-1j}U_{i-1j} = \sum a^U_{nb}U_{nb} + \left(P'_{i-1j} - P'_{ij}\right)\Delta y_j,$$

$$a^V_{ij}V_{ij} = \sum a^V_{nb}V_{nb} + \left(P'_{ij} - P'_{ij+1}\right)\Delta x_i, \tag{2.15}$$

$$a^V_{ij-1}V_{ij-1} = \sum a^V_{nb}V_{nb} + \left(P'_{ij-1} - P'_{ij}\right)\Delta x_i.$$

Якщо поле тиску задане приблизно, то знайдене поле не буде задовольняти рівняння нерозривності. Позначимо через $P^*,\ U^*,\ V^*$ ці приблизні значення швидкостей та тиску

$$a^U_{ij}U^*_{ij} = \sum a^U_{nb}U^*_{nb} + \left(P^*_{ij} - P^*_{i+1j}\right)\Delta y_j,$$

$$a^U_{i-1j}U^*_{i-1j} = \sum a^U_{nb}U^*_{nb} + \left(P^*_{i-1j} - P^*_{ij}\right)\Delta y_j,$$

$$(2.16)$$

$$a^V_{ij}V^*_{ij} = \sum a^V_{nb}V^*_{nb} + \left(P^*_{ij} - P^*_{ij+1}\right)\Delta x_i,$$

$$a^V_{ij-1}V^*_{ij-1} = \sum a^V_{nb}V^*_{nb} + \left(P^*_{ij-1} - P^*_{ij}\right)\Delta x_i.$$

Найдемо спосіб покращити приближене поле тиску таким чином, щоб воно відповідало рівнянню нерозривності. Припустимо, що дійсний тиск знаходиться із співвідношення

$$P' = P^* + P'',$$

де P'' назвемо поправкою тиску. Треба з'ясувати, як будуть змінюватися складові швидкостей в відповідності до такої зміни тиску. Аналогічним чином виведемо відповідні поправки складових швидкостей:

$$U' = U^* + U'', V' = V^* + V''.$$

Віднімемо від рівнянь (2.15) рівняння (2.16), та отримаємо такі ж рівняння тільки для поправки

$$a_{ij}^{U} U''_{ij} = \sum a_{nb}^{U} U''_{nb} + \left(P''_{ij} - P''_{i+1\,j}\right)\Delta y_{j},$$

$$a_{i-1\,j}^{U} U''_{i-1\,j} = \sum a_{nb}^{U} U''_{nb} + \left(P''_{i-1\,j} - P''_{ij}\right)\Delta y_{j},$$

$$a_{ij}^{V} V''_{ij} = \sum a_{nb}^{V} V''_{nb} + \left(P''_{ij} - P''_{ij+1}\right)\Delta x_{i},\tag{2.17}$$

$$a_{ij-1}^{V} V''_{ij-1} = \sum a_{nb}^{V} V''_{nb} + \left(P''_{ij-1} - P''_{ij}\right)\Delta x_{i}.$$

В цих рівняннях відкидаємо члені $\sum a_{nb}^{U} U''$, $\sum a_{nb}^{V} V''$. Це можливо здійснити, так як при збіжних рішеннях отримане значення для тиску буде таким, що поле швидкостей буде задовольняти рівняння нерозривності. Та деталі побудови ітераційної структури несуттєві. Тому будемо мати

$$a_{ij}^{U} U''_{ij} = \left(P''_{ij} - P''_{i+1\,j}\right)\Delta y_{j},$$

$$a_{i-1\,j}^{U} U''_{i-1\,j} = \left(P''_{i-1\,j} - P''_{ij}\right)\Delta y_{j},$$

$$a_{ij}^{V} V''_{ij} = \left(P''_{ij} - P''_{ij+1}\right)\Delta x_{i},$$

$$a_{ij-1}^{V} V''_{ij-1} = \left(P''_{ij-1} - P''_{ij}\right)\Delta x_i .$$

Звідси можна отримати

$$U_{ij} = U^*_{ij} + \left(P''_{ij} - P''_{i+1j}\right)\frac{\Delta y_j}{a_{ij}^{U}},$$

$$U_{i-1j} = U^*_{i-1j} + \left(P''_{i-1j} - P''_{ij}\right)\frac{\Delta y_j}{a_{i-1j}^{U}},$$

(2.18)

$$V_{ij} = V^*_{ij} + \left(P''_{ij} - P''_{ij+1}\right)\frac{\Delta x_i}{a_{ij}^{V}},$$

$$V_{ij-1} = V^*_{ij-1} + \left(P''_{ij-1} - P''_{ij}\right)\frac{\Delta x_i}{a_{ij-1}^{V}}.$$

Для знаходження поправки по тиску скористаємося рівняннями для поправки швидкості (2.18) та рівнянням нерозривності, проінтегрованому по контрольному об'ємі

$$\left(\rho_{ij} - \rho_{ij}^{0}\right)\Delta x_i \Delta y_j + \left[\left(\rho U\right)_{i+1/2\,j} - \left(\rho U\right)_{i-1/2\,j}\right]\Delta y_j \Delta\tau + \left[\left(\rho V\right)_{ij+1/2} - \left(\rho V\right)_{ij-1/2}\right]\Delta x_i \Delta\tau = 0.$$

Використовуючи чисто неявну схему, поділивши рівняння нерозривності на $\Delta\tau$ та підставивши вирази для швидкостей в рівняння нерозривності, отримаємо

$$\left(\rho_{ij} - \rho_{ij}^{0}\right)\frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta\tau} + \left[\rho_{i+1/2\,j}\left(U^*_{ij} + \left(P''_{ij} - P''_{i+1j}\right)\frac{\Delta y_j}{a_{ij}^{U}}\right) - \rho_{i-1/2\,j}\left(U^*_{i-1j} + \left(P''_{i-1j} - P''_{ij}\right)\frac{\Delta y_j}{a_{i-1j}^{U}}\right)\right]\times$$

$$\times \Delta y_j + \left[\rho_{ij+1/2} \left(V^*_{ij} + \left(P''_{ij} - P''_{ij+1} \right) \frac{\Delta x_i}{a^V_{ij}} \right) - \rho_{ij-1/2} \left(V^*_{ij-1} + \left(P''_{ij-1} - P''_{ij} \right) \frac{\Delta x_i}{a^V_{ij-1}} \right) \right] \Delta x_i = 0$$

Звідси можна отримати

$$a^P_{ij} P''_{ij} = a^P_{i+1j} P''_{i+1j} + a^P_{i-1j} P''_{i-1j} + a^P_{ij+1} P''_{ij+1} + a^P_{ij-1} P''_{ij-1} + b_{ij}.$$

$$a^P_{i+1j} = \rho_{i+1/2j} \frac{\Delta y_j^2}{a^U_{ij}},$$

$$a^P_{i-1j} = \rho_{i-1/2j} \frac{\Delta y_j^2}{a^U_{i-1j}},$$

$$a^P_{ij+1} = \rho_{ij+1/2} \frac{\Delta x_i^2}{a^V_{ij}},$$

$$a^P_{ij-1} = \rho_{ij-1/2} \frac{\Delta x_i^2}{a^V_{ij-1}},$$

$$a^P_{ij} = a^P_{i+1j} + a^P_{i-1j} + a^P_{ij+1} + a^P_{ij-1},$$

$$b_{ij} = -\left(\rho_{ij} - \rho^0_{ij} \right) \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta \tau} + \left[\rho_{i+1/2j} U^*_{ij} - \rho_{i-1/2j} U^*_{i-1j} \right] \Delta y_j + \left[\rho_{ij+1/2} V^*_{ij} - \rho_{ij-1/2} V^*_{ij-1} \right] \Delta x_i.$$

3) Інтегруємо по T

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho CpT)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UCpT)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VCpT)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Так як для повітря C_P=1007 Дж/(кгК) при температурах від 20 °С до 50 °С, то рівняння для енергії можна записати в вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho T)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UT)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho VT)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

$$\iiint\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho UT-\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right]dxdyd\tau=$$

$$=\left[(\rho UT)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-(\rho UT)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}\Delta\tau.$$

$$\iiint\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho VT-\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right]dxdyd\tau=$$

$$=\left[(\rho VT)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}-(\rho VT)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta\tau.$$

$$\iiint\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho T)dxdyd\tau=\left[(\rho T)_{\mathrm{ij}}-(\rho T)^{0}_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}\Delta y_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[(\rho UT)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-(\rho U)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left[(\rho U)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}}\left(f^{T}_{\mathrm{i}+1/2}T_{\mathrm{i}+1\mathrm{j}}+\left(1-f^{T}_{\mathrm{i}+1/2}\right)T_{\mathrm{ij}}\right)-\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{i}+1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}+1/2}}\left(T_{\mathrm{i}+1\mathrm{j}}-T_{\mathrm{ij}}\right)-(\rho U)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\times$$

$$\times\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}=\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{i}+1\mathrm{j}}\right)\left[-f^{T}_{\mathrm{i}+1/2}(\rho T)_{\mathrm{i}+1/2\,\mathrm{j}}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{i}+1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}+1/2}}\right]\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[-(\rho UT)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}+(\rho U)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left[-(\rho U)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}\left(f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}T_{\mathrm{i}-1\mathrm{j}}+\left(1-f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}\right)T_{\mathrm{ij}}\right)+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{i}-1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}-1/2}}\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{i}-1\mathrm{j}}\right)+(\rho U)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\times$$

$$\times\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}=\left[(\rho U)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}\left[f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}T_{\mathrm{ij}}-f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}T_{\mathrm{i}-1\mathrm{j}}\right]+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{i}-1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}-1/2}}\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{i}-1\mathrm{j}}\right)\right]\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{i}-1\mathrm{j}}\right)\left[f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}(\rho U)_{\mathrm{i}-1/2\,\mathrm{j}}+\frac{\lambda_{\mathrm{i}-1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}-1/2}}\right]\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}.$$

$$\left[(\rho VT)_{\mathrm{ij}+1/2}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+1/2}-(\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}=$$

$$=\left[(\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2}\left(f^{T}_{\mathrm{j}+1/2}T_{\mathrm{ij}+1}+\left(1-f^{T}_{\mathrm{j}+1/2}\right)T_{\mathrm{ij}}\right)-\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}+1/2}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}+1/2}}\left(T_{\mathrm{ij}+1}-T_{\mathrm{ij}}\right)-(\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2}T_{\mathrm{ij}}\right]\times$$

$$\times\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}=\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{ij}+1}\right)\left[-f^{T}_{\mathrm{j}+1/2}(\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}+1/2}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}+1/2}}\right]\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}.$$

$$\left[-(\rho VT)_{\mathrm{ij}-1/2}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}-1/2}+(\rho V)_{\mathrm{ij}-1/2}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}=$$

$$=\left[-(\rho V)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}\left(f^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}T_{\mathrm{ij-1}}+\left(1-f^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}\right)T_{\mathrm{ij}}\right)+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{ij-1}}\right)-(\rho V)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}T_{\mathrm{ij}}\right]\times$$

$$\times\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}=\left(T_{\mathrm{ij}}-T_{\mathrm{ij-1}}\right)\left[f^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}(\rho V)_{\mathrm{ij}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}\right]\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}.$$

Рівняння для нестаціонарного члена

$$\left[(\rho T)_{\mathrm{ij}}-(\rho T)^{0}_{\mathrm{ij}}\right]\frac{\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}}{\Delta\tau}-\left(\rho_{\mathrm{ij}}-\rho^{0}_{\mathrm{ij}}\right)T_{\mathrm{ij}}\frac{\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}}{\Delta\tau}=\frac{\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}}{\Delta\tau}\rho^{0}_{\mathrm{ij}}\left(T_{\mathrm{ij}}-T^{0}_{\mathrm{ij}}\right).$$

Визначаємо відомі величини

$$\delta x^{T}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\Delta x_{\mathrm{i}}+\Delta x_{\mathrm{i+1}}\right);\;\; f^{T}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}=\frac{0.5\Delta x_{\mathrm{i}}}{\delta x_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}}};\;\; \Delta y^{T}_{\mathrm{j}}=\Delta y_{\mathrm{j}};\;\; \lambda_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}=\lambda(T_{\mathrm{i+1j}}).$$

$$\delta x^{T}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\Delta x_{\mathrm{i}}+\Delta x_{\mathrm{i-1}}\right);\;\; \lambda_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}=\lambda(T_{\mathrm{i-1j}});\;\; f^{T}_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}=\frac{0.5\Delta x_{\mathrm{i}}}{\delta x_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}}}.$$

$$\delta y^{T}_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\Delta y_{\mathrm{j}}+\Delta y_{\mathrm{j+1}}\right);\;\; \lambda_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}=\lambda(T_{\mathrm{ij+1}});\;\; f^{T}_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}}=\frac{0.5\Delta y_{\mathrm{j}}}{\delta y_{\mathrm{j}+\frac{1}{2}}};\;\; \Delta x^{T}_{\mathrm{i}}=\Delta x_{\mathrm{i}}.$$

$$\delta y^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\Delta y_{\mathrm{j}}+\Delta y_{\mathrm{j-1}}\right);\;\; \lambda_{\mathrm{ij-1}}=\lambda(T_{\mathrm{ij-1}});\;\; f^{T}_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}=\frac{0.5\Delta y_{\mathrm{j}}}{\delta y_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}}.$$

Можна отримати

$$a^{T}_{ij}T_{ij}=a^{T}_{i+1j}T_{i+1j}+a^{T}_{i-1j}T_{i-1j}+a^{T}_{ij+1}T_{ij+1}+a^{T}_{ij-1}T_{ij-1}+b_{ij}.$$

$$a^{T}_{i+1j}=\left[-f^{T}_{\mathrm{i}+1/2}\left(\rho T\right)_{\mathrm{i}+1/2\mathrm{j}}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{i}+1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}+1/2}}\right]\Delta y^{T}_{\mathrm{j}},$$

$$a^{T}_{i-1j}=\left[f^{T}_{\mathrm{i}-1/2}\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}-1/2\mathrm{j}}+\frac{\lambda_{\mathrm{i}-1/2}}{\delta x^{T}_{\mathrm{i}-1/2}}\right]\Delta y^{T}_{\mathrm{j}},$$

$$a^{T}_{ij+1}=\left[-f^{T}_{\mathrm{j}+1/2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}+1/2}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}+1/2}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}+1/2}}\right]\Delta x^{T}_{\mathrm{i}},$$

$$a^{T}_{ij-1}=\left[f^{T}_{\mathrm{j}-1/2}\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}-1/2}+\frac{1}{Cp}\frac{\lambda_{\mathrm{j}-1/2}}{\delta y^{T}_{\mathrm{j}-1/2}}\right]\Delta x^{T}_{\mathrm{i}},$$

$$b_{ij}=\frac{\Delta x^{T}_{\mathrm{i}}\Delta y^{T}_{\mathrm{j}}}{\Delta\tau}\rho^{0}_{\mathrm{ij}},$$

$$a^{T}_{ij}=a^{U}_{i+1j}+a^{U}_{i-1j}+a^{U}_{ij+1}+a^{U}_{ij-1}+b_{ij}.$$

Рівняння для пограничних точок.

Для U, j=1

$$\left[-\left(\rho VU\right)_{\mathrm{ij}-1/2}+\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}-1/2}+\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}-1/2}U_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}=$$

$$=\left[-\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}1/2}U_{\mathrm{i0}}+\mu_{\mathrm{i}1/2}\frac{U_{\mathrm{i1}}-U_{\mathrm{i0}}}{0.5\Delta y_{1}}-\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}1/2}U_{\mathrm{i1}}\right]\Delta x^{U}_{\mathrm{i}}=$$

$$=\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}1/2}\left(U_{\mathrm{i1}}-U_{\mathrm{i0}}\right)+\mu_{\mathrm{i}1/2}\frac{U_{\mathrm{i1}}-U_{\mathrm{i0}}}{0.5\Delta y_{1}}\right]\Delta x^{U}_{\mathrm{i}}=$$

$$=\left(U_{\mathrm{i1}}-U_{\mathrm{i0}}\right)\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}1/2}+\frac{\mu_{\mathrm{i}1/2}}{0.5\Delta y_1}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{U}.$$

При умові

$$f_{1/2}^{U}=\frac{0.5\Delta y_1}{\delta y_{1/2}}=\frac{0.5\Delta y_1}{0.5\left(\Delta y_1+\Delta y_0\right)}=\frac{0.5\Delta y_1}{0.5\Delta y_1}=1$$

Для V, i=1

$$\left[-\left(\rho UV\right)_{\mathrm{i}\text{-}1/2\,\mathrm{j}}+\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}\text{-}1/2\,\mathrm{j}}+\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}\text{-}1/2\,\mathrm{j}}V_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left[-\left(\rho U\right)_{1/2\,\mathrm{j}}V_{\mathrm{0j}}+\mu_{1/2\,\mathrm{j}}\frac{V_{\mathrm{1j}}-V_{\mathrm{0j}}}{0.5x_1}+\left(\rho U\right)_{1/2\,\mathrm{j}}V_{\mathrm{1j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{V}=$$

$$=\left[\left(\rho U\right)_{1/2\,\mathrm{j}}\left(V_{\mathrm{1j}}-V_{\mathrm{0j}}\right)+\mu_{1/2\,\mathrm{j}}\frac{V_{\mathrm{1j}}-V_{\mathrm{0j}}}{0.5x_1}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{V}=$$

$$=\left(V_{\mathrm{1j}}-V_{\mathrm{0j}}\right)\left[\left(\rho U\right)_{1/2\,\mathrm{j}}+\frac{\mu_{1/2\,\mathrm{j}}}{\Delta x_1}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{V}.$$

При умові

$$f_{1/2}^{V}=\frac{0.5\Delta x_1}{\delta x_{1/2}}=\frac{0.5\Delta x_1}{0.5\Delta x_1}=1$$

Для T

Ліва границя (виключаючи кутові точки), i=1, $2\le \mathrm{j}\le$ M-1.

$$\left[-\left(\rho UT\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}+\left(\rho U\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}T_{\text{ij}}\right]\Delta y_{\text{ j}}$$

Враховуючи граничні умови

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\alpha_{2}}{\lambda}\left(T_{2}(y)-T_{\text{c}_1}\right),$$

будемо мати

$$\left[-\left(\rho UT\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}+\left(\rho U\right)_{\text{i-}1/2\,\text{j}}T_{\text{ij}}\right]\Delta y_{\text{ j}}=$$

$$=\left[-\left(\rho U\right)_{1/2\,\text{j}}T_{0\text{j}}+\left[\frac{\alpha_2}{\lambda}\left(T_2-T_{\text{c}_1}\right)\right]_{1/2\,\text{j}}+\left(\rho U\right)_{1/2\,\text{j}}T_{1\text{j}}\right]\Delta y_{\text{j}}^{T}=$$

$$=\left[\left(\rho U\right)_{1/2\,\text{j}}\left(T_{1\text{j}}-T_{0\text{j}}\right)+\frac{\left(\alpha_2\right)_{1/2\,\text{j}}}{Cp}\left(T_2-T_{0\text{j}}\right)\right]\Delta y_{\text{j}}^{T}.$$

Права границя (виключаючи кутові точки), i=N, $x=L$, $2\leq \text{j}\leq \text{M-1}$.

$$\left[\left(\rho UT\right)_{\text{i+}1/2\,\text{j}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{i+}1/2\,\text{j}}-\left(\rho U\right)_{\text{i+}1/2\,\text{j}}T_{\text{ij}}\right]\Delta y_{\text{ j}}$$

Враховуючи граничні умови

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = -\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(T_1(y) - T_{c_2}\right),$$

будемо мати

$$\left[(\rho UT)_{i+1/2\,j} - \left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2\,j} - (\rho U)_{i+1/2\,j} T_{ij}\right]\Delta y_j =$$

$$\left[(\rho U)_{N+1/2\,j} T_{N+1/2\,j} + \left[\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(T_1 - T_{c_2}\right)\right]_{N+1/2\,j} - (\rho U)_{N+1/2} T_{Nj}\right]\Delta y_j^T =$$

$$\left[(\rho U)_{N+1/2\,j}\left(T_{N+1j} - T_{Nj}\right) + \frac{(\alpha_1)_{N+1j}}{Cp}\left(T_1 - T_{N+1j}\right)\right]\Delta y_j^T.$$

Нижня границя (виключаючи кутові точки), $j=1$, $2 \le i \le N$-1.

$$\left[-(\rho VT)_{ij\text{-}1/2} + \left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ij\text{-}1/2} + (\rho V)_{ij\text{-}1/2} T_{ij}\right]\Delta x_i$$

Враховуючи граничні умови

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = 0, \qquad \frac{T_{i0} - T_{i1}}{\Delta x} = 0,$$

будемо мати

$$\left[-(\rho VT)_{ij\text{-}1/2} + \left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ij\text{-}1/2} + (\rho\vartheta)_{ij\text{-}1/2} T_{ij}\right]\Delta x_i = \left[-(\rho V)_{i\,1/2} T_{i0} + (\rho V)_{i\,1/2} T_{i1}\right]\times$$

$$\times \Delta x_{\mathrm{i}}^{T} = \left[(\rho V)_{\mathrm{i}\,1/2} (T_{\mathrm{i}1} - T_{\mathrm{i}0}) \right] \Delta x_{\mathrm{i}}^{T}.$$

Верхня границя (виключаючи кутові точки), j=M , $y = H$, $2 \le \mathrm{i} \le N$-1.

$$\left[(\rho VT)_{\mathrm{ij}+1/2} - \left(\frac{\lambda}{Cp} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\mathrm{ij}+1/2} - (\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2} T_{\mathrm{ij}} \right] \Delta x_{\mathrm{i}}$$

Враховуючи граничні умови

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=H} = 0;$$

будемо мати

$$\left[(\rho VT)_{\mathrm{ij}+1/2} - \left(\frac{\lambda}{Cp} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\mathrm{ij}+1/2} - (\rho V)_{\mathrm{ij}+1/2} T_{\mathrm{ij}} \right] \Delta x_{\mathrm{i}} = \left[(\rho V)_{\mathrm{iM}+1/2} T_{\mathrm{iM}+1} - (\rho V)_{\mathrm{iM}+1/2} T_{\mathrm{iM}} \right] \Delta x_{\mathrm{i}}^{T} =$$

$$= \left[(\rho V)_{\mathrm{iM}+1/2} (T_{\mathrm{iM}+1} - T_{\mathrm{iM}}) \right] \Delta x_{\mathrm{i}}^{T}.$$

Можна отримати

$$a_{ij}^{T} T_{ij} = a_{i+1j}^{T} T_{i+1j} + a_{i-1j}^{T} T_{i-1j} + a_{ij+1}^{T} T_{ij+1} + a_{ij-1}^{T} T_{ij-1} + b_{ij}.$$

$$a_{i+1j}^{T} = \left[(\rho U)_{N+1/2\,\mathrm{j}} - \frac{(\alpha_1)_{\mathrm{N+1j}}}{Cp} \right] \Delta y_{\mathrm{j}}^{T},$$

$$a_{i-1j}^{T}=\left[\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}\mathrm{j}}+\frac{\left(\alpha_{2}\right)_{\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{Cp}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{T},$$

$$a_{ij+1}^{T}=\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{iM}+\frac{1}{2}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{T},$$

$$a_{ij-1}^{T}=\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{i}\frac{1}{2}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{T},$$

$$b_{ij}=\left[T_{1}\left(\frac{\left(\alpha_{1}\right)_{\mathrm{N+1j}}}{Cp}\right)\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{T}+\left[T_{2}\left(\frac{\left(\alpha_{2}\right)_{\frac{1}{2}\mathrm{j}}}{Cp}\right)\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{T},$$

$$a_{ij}^{T}=\left[\left(\rho U\right)_{N+\frac{1}{2}\mathrm{j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{T}+\left[\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}\mathrm{j}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}^{T}+a_{ij+1}^{T}+a_{ij-1}^{T}.$$

Для кутових точок:

i=1, j=1.

$$\left[-\left(\rho UT\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}+\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left[-\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}1}T_{01}+\left[\frac{\alpha_{2}}{\lambda}\left(T_{2}-T_{\mathrm{c}_{1}}\right)\right]_{\frac{1}{2}1}+\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}1}T_{11}\right]\Delta y_{1}^{T}=$$

$$=\left[\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}1}\left(T_{11}-T_{01}\right)+\frac{\left(\alpha_{2}\right)_{\frac{1}{2}1}}{Cp}\left(T_{2}-T_{01}\right)\right]\Delta y_{1}^{T}.$$

i=N, j=1.

$$\left[\left(\rho UT\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}-\left(\rho U\right)_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{j}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta y_{\mathrm{j}}=$$

$$=\left[\left(\rho U\right)_{N+\frac{1}{2}1}T_{N+\frac{1}{2}1}+\left[\frac{\alpha_{1}}{\lambda}\left(T_{1}-T_{\mathrm{c}_{2}}\right)\right]_{N+\frac{1}{2}1}-\left(\rho U\right)_{N+\frac{1}{2}1}T_{\mathrm{N1}}\right]\Delta y_{1}^{T}=$$

$$=\left[\left(\rho U\right)_{\frac{1}{2}1}\left(T_{\mathrm{N}+11}-T_{\mathrm{N}1}\right)+\frac{\left(\alpha_1\right)_{\mathrm{N}+11}}{Cp}\left(T_1-T_{\mathrm{N}+11}\right)\right]\Delta y_1^T.$$

j=M , $\mathrm{i}=1.$

$$\left[-\left(\rho VT\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}+\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}+\left(\rho\vartheta\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_1=\left[-\left(\rho VT\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}T_{1\mathrm{M}}+\left(\rho V\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}T_{\mathrm{iM}+1}\right]\Delta x_{\mathrm{M}}^{T}=$$

$$=\left[\left(\rho VT\right)_{1\mathrm{M}-\frac{1}{2}}\left(T_{1\mathrm{M}+1}-T_{1\mathrm{M}}\right)\right]\Delta x_{\mathrm{i}}^{T}.$$

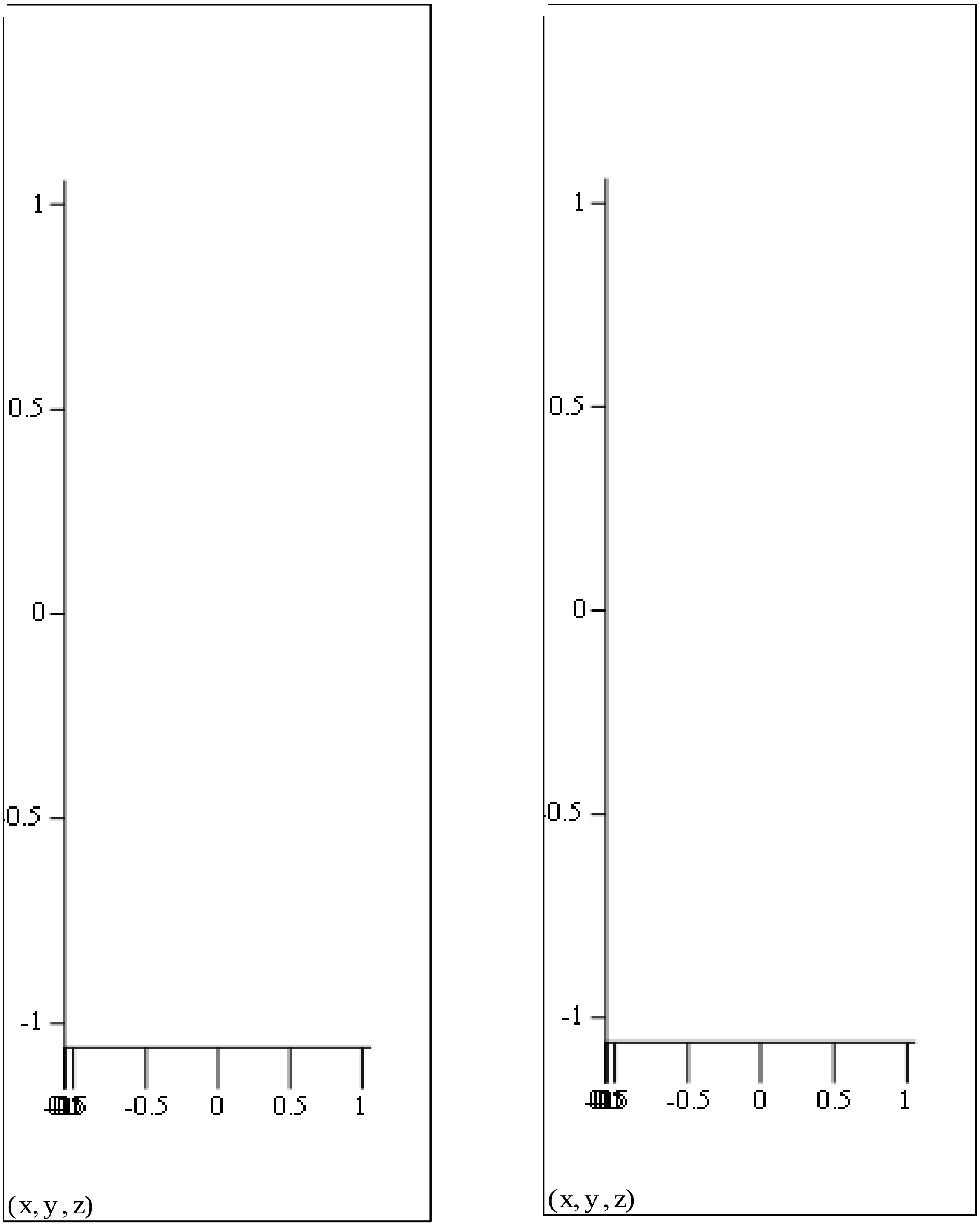
j=M , $\mathrm{i}=N.$

$$\left[\left(\rho VT\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}-\left(\frac{\lambda}{Cp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}-\left(\rho V\right)_{\mathrm{ij}+\frac{1}{2}}T_{\mathrm{ij}}\right]\Delta x_{\mathrm{i}}=\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{NM}+\frac{1}{2}}T_{\mathrm{NM}+1}-\left(\rho V\right)_{\mathrm{NM}+\frac{1}{2}}T_{\mathrm{NM}}\right]\Delta x_{\mathrm{N}}^{T}=$$

$$=\left[\left(\rho V\right)_{\mathrm{NM}+\frac{1}{2}}\left(T_{\mathrm{NM}+1}-T_{\mathrm{NM}}\right)\right]\Delta x_{\mathrm{N}}^{T}.$$

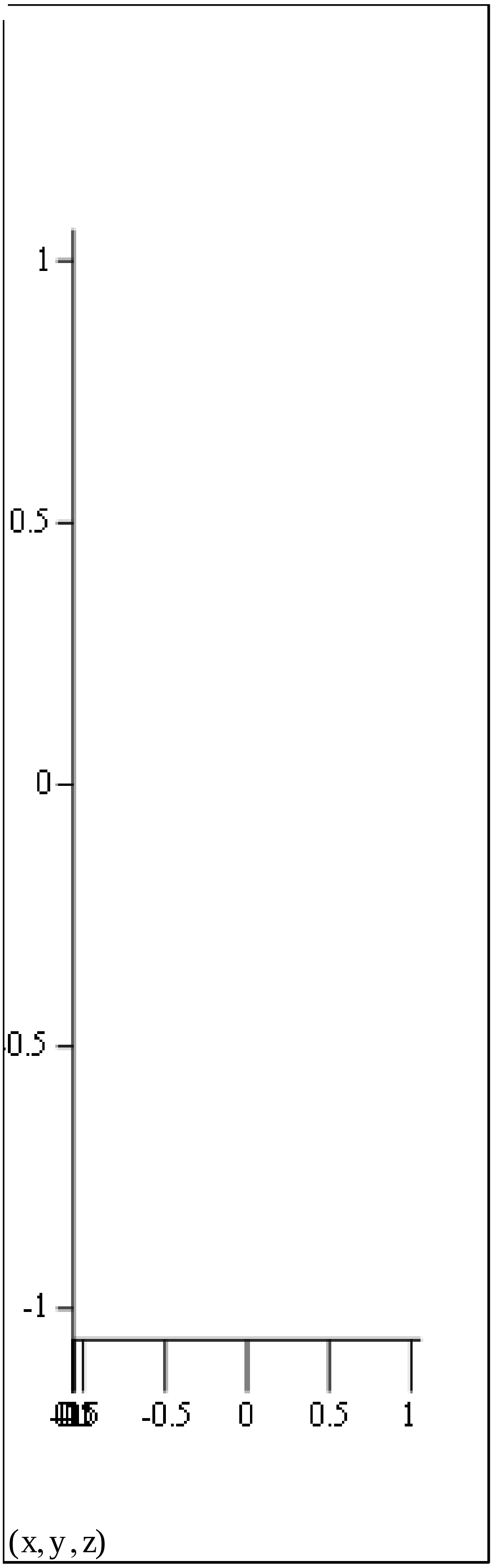
3. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

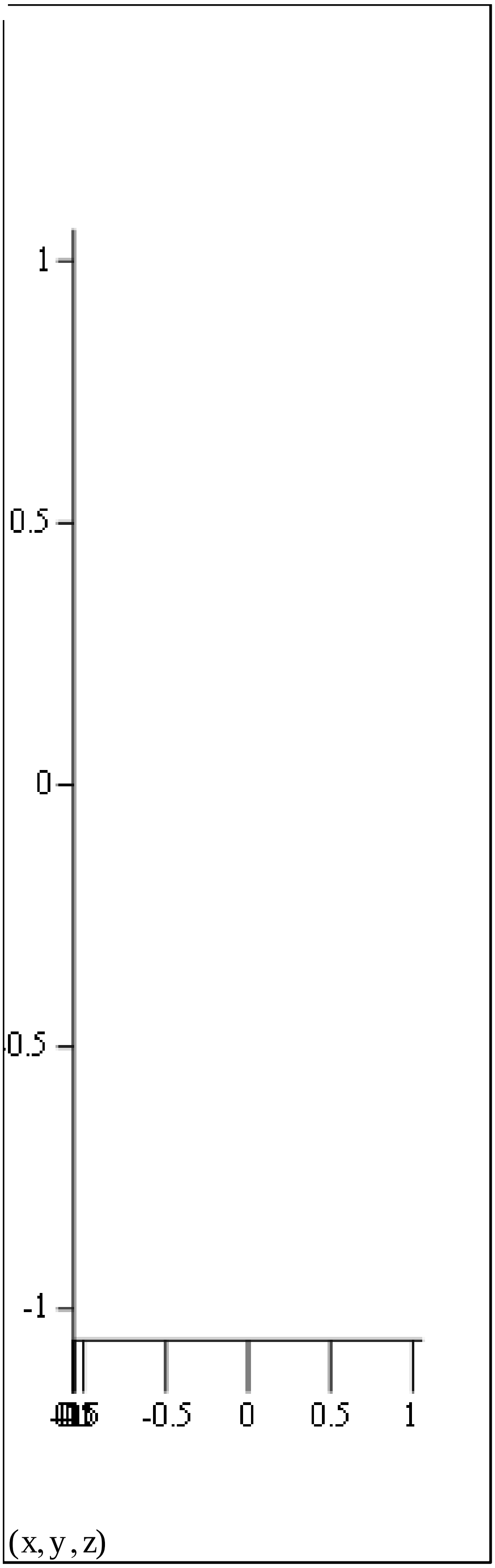
В результаті розрахунку одержано поля швидкості і температури по яким побудовано лінії току та ізотерми (рис. 3.1–3.8), з яких випливає, що вплив конвекції на теплопередачу суттєво збільшується при збільшенні відстані між вертикальними поверхнями.



а) L=8 мм б) L=16 мм

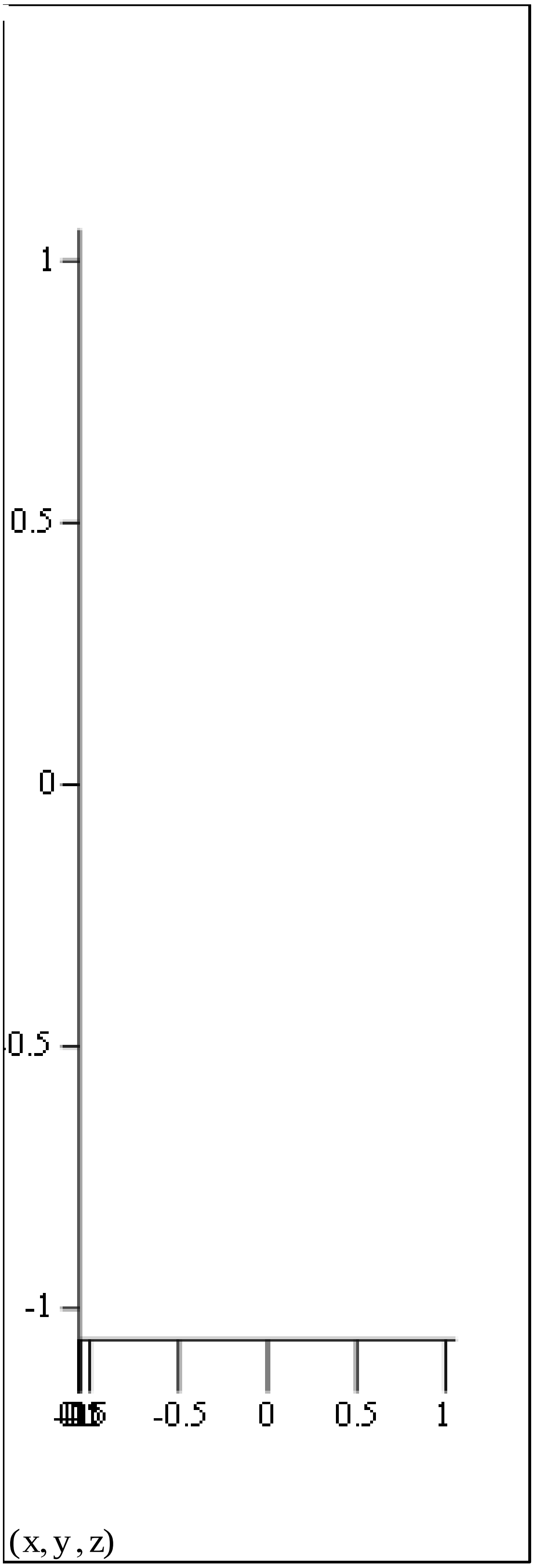
Рисунок 3.1 – Ізотерми



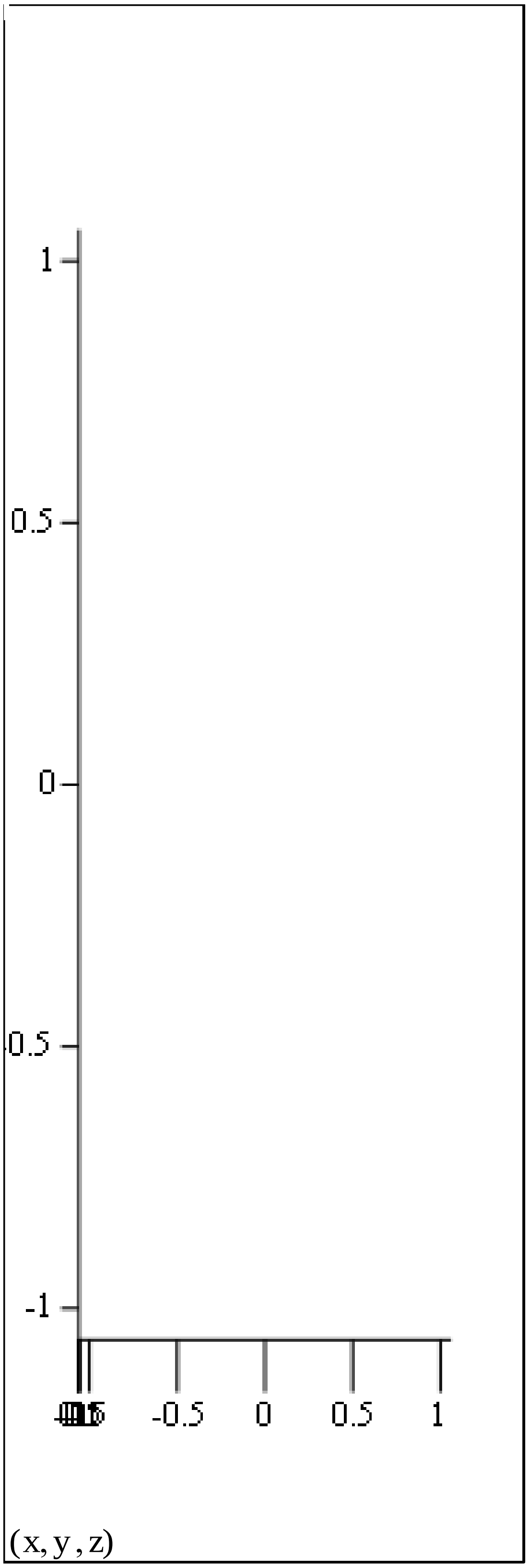


а) *L*=20 мм б) *L*=32 мм

Рисунок 3.2 – Ізотерми

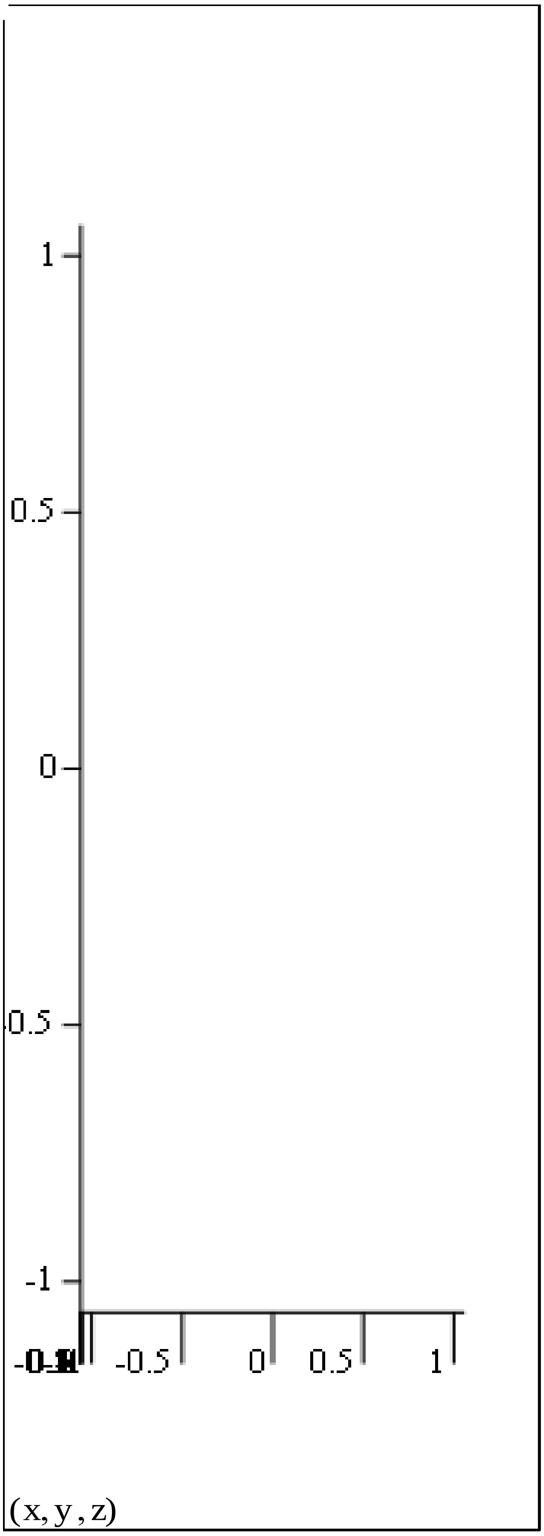


а) L=42 мм



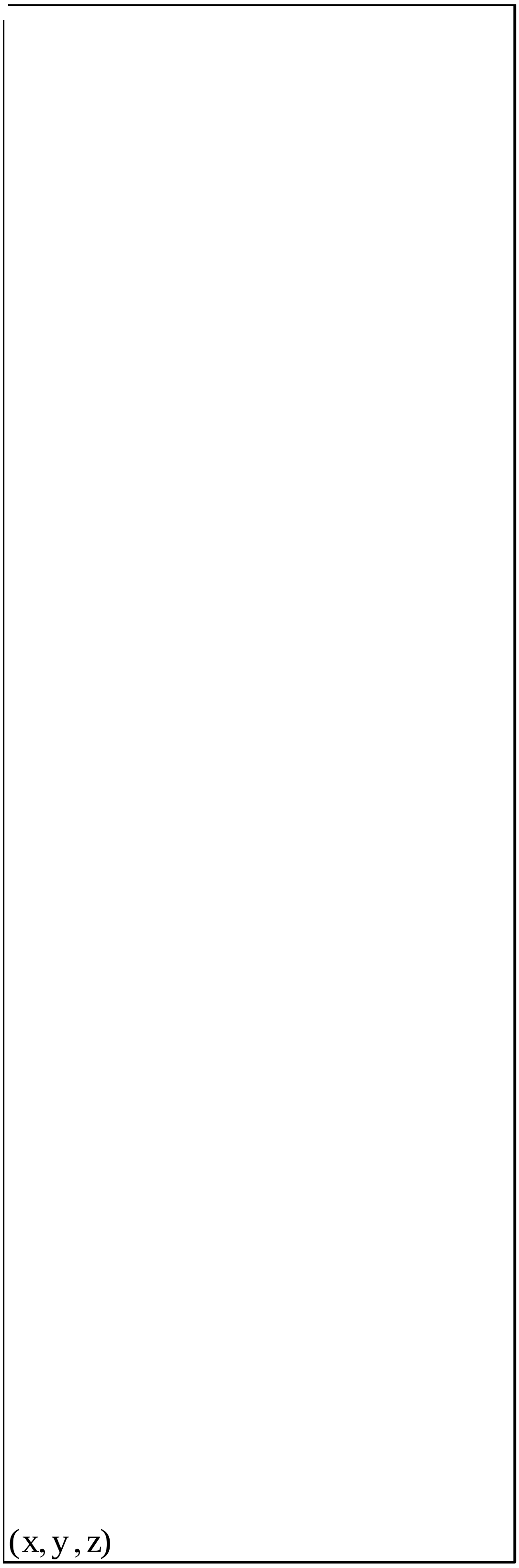
б) L=52 мм

Рисунок 3.3 – Ізотерми

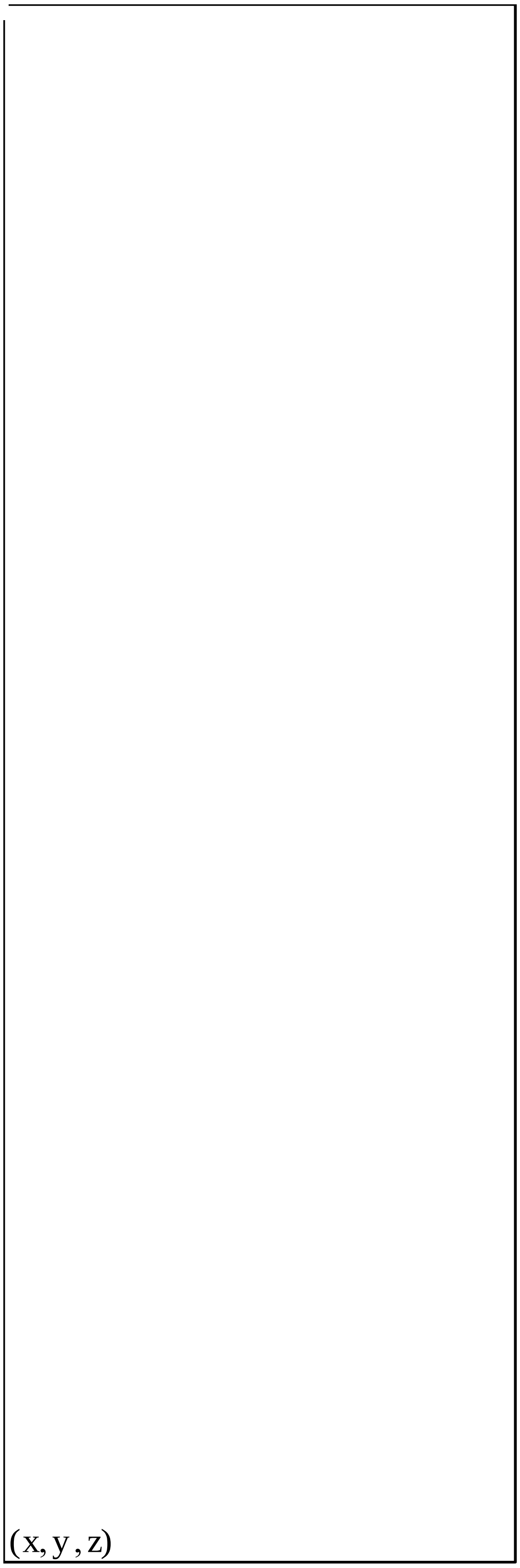


L=60 мм

Рисунок 3.4 – Ізотерми

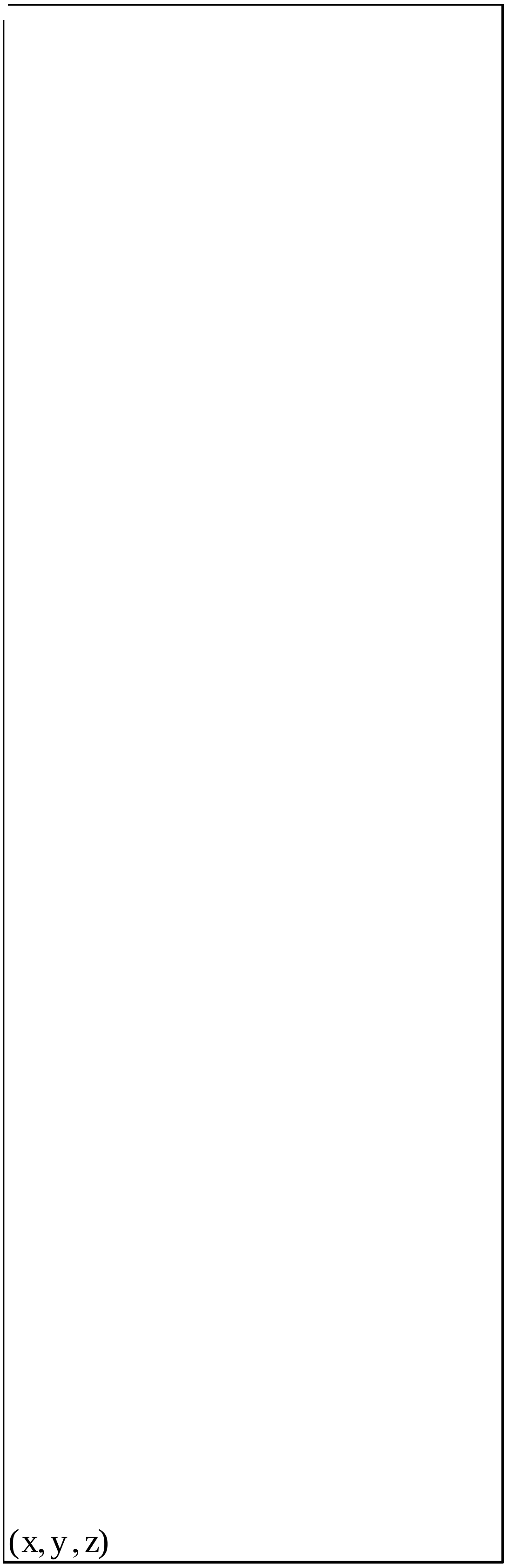


а) *L*=8 мм

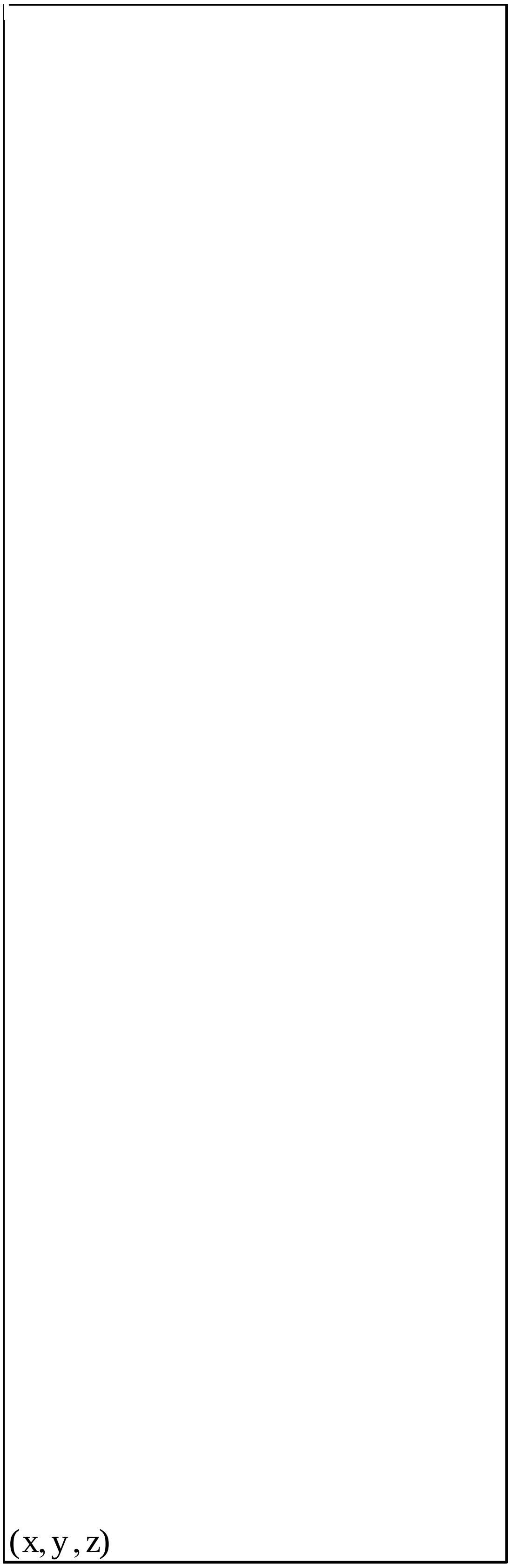


б) *L*=16 мм

Рисунок 3.5 – Лінії току

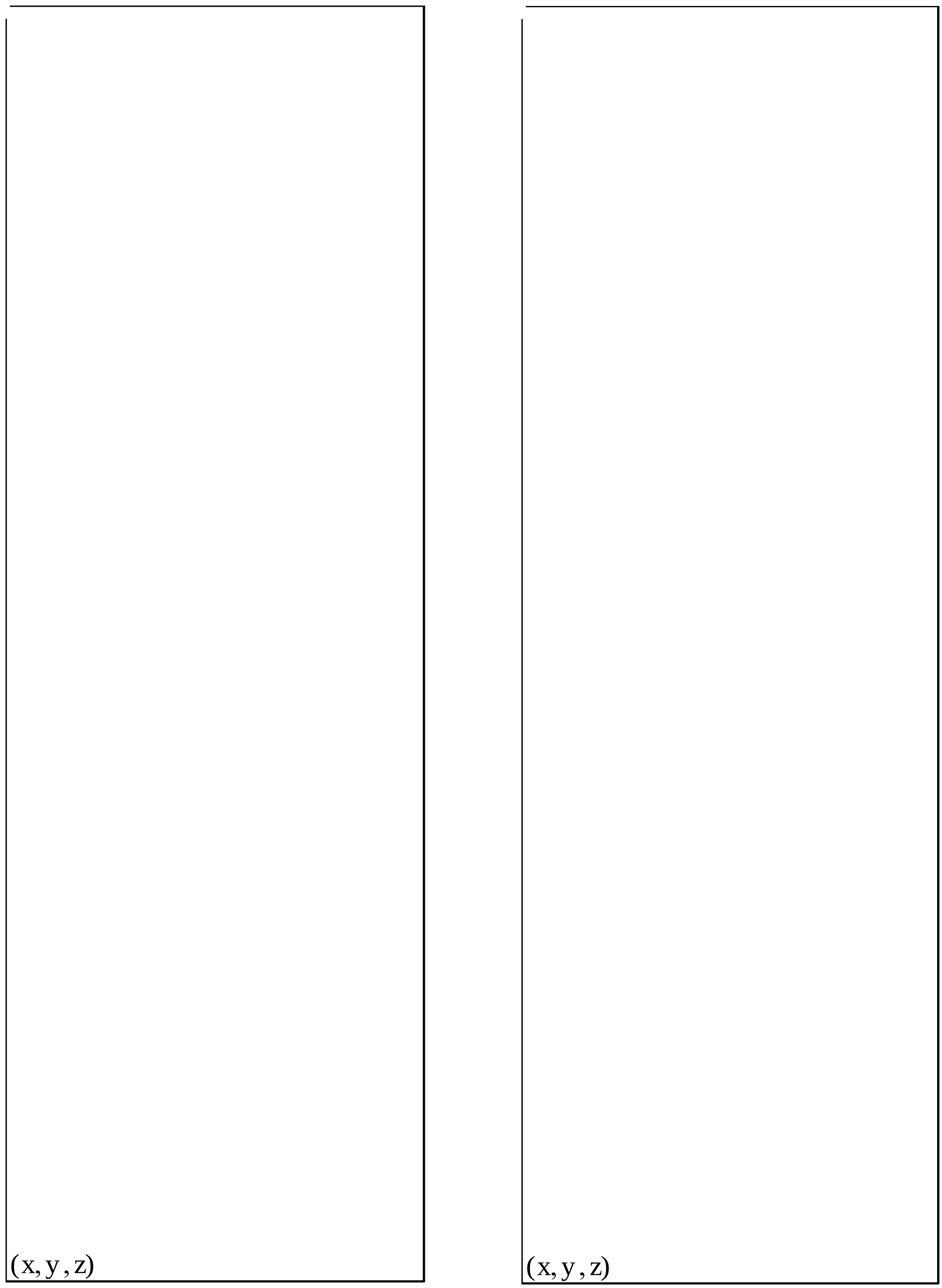


а) L=20 мм



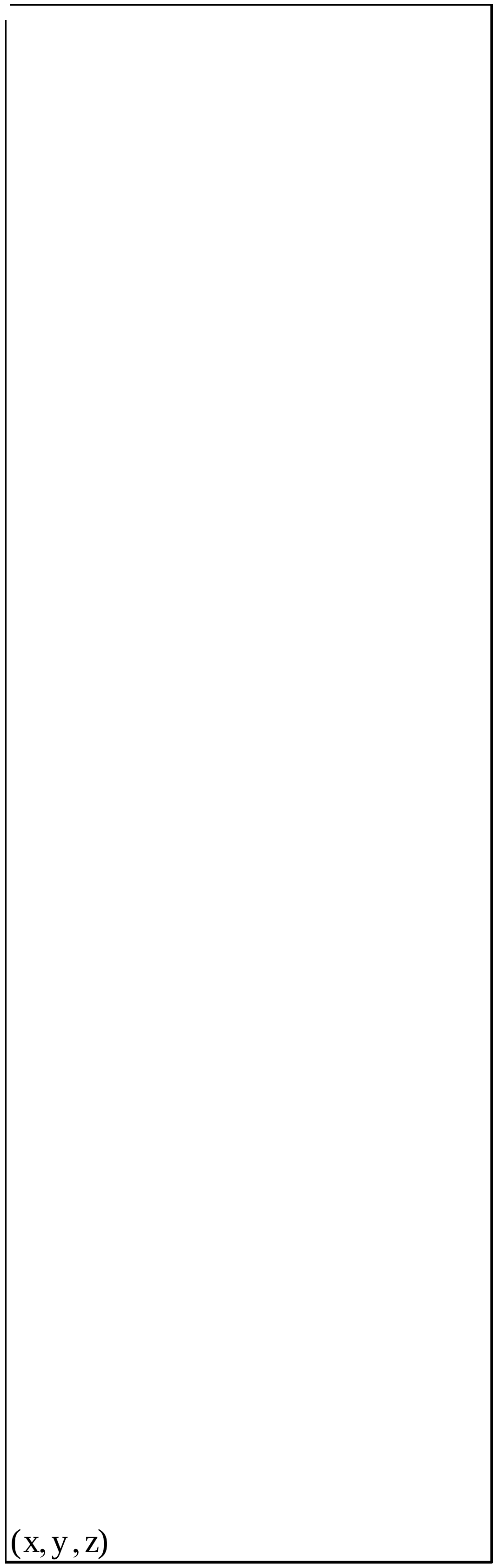
б) L=32 мм

Рисунок 3.6 – Лінії току



а) L=42 мм б) L=52 мм

Рисунок 3.7 – Лінії току



L=60 мм

Рисунок 3.8 – Лінії току

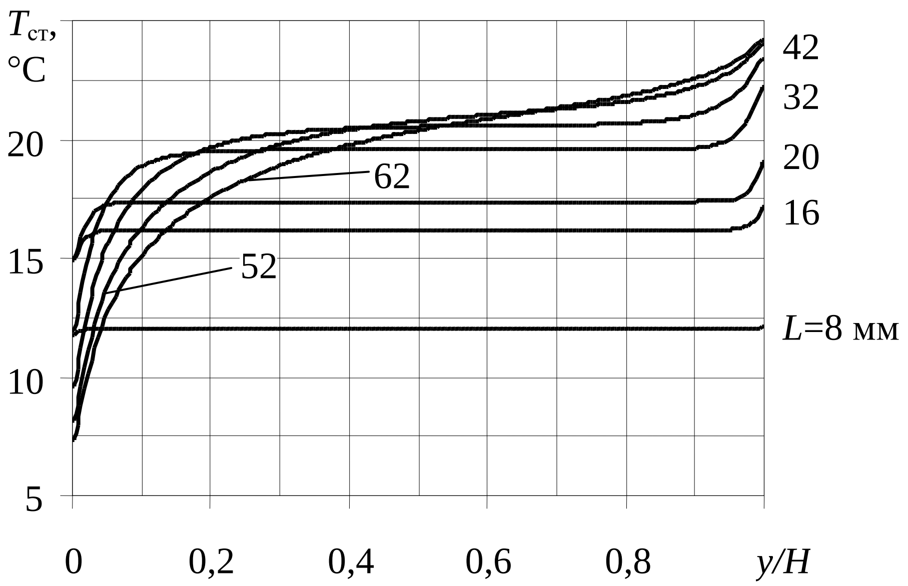


Рисунок 3.9 – Температура скла в залежності від висоти вікна

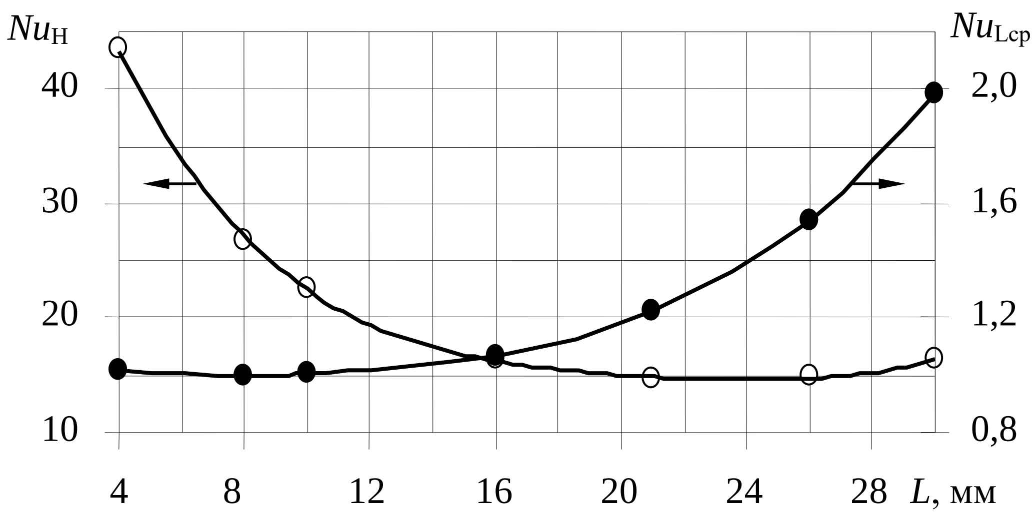


Рисунок 3.10 – Залежність чисел Нусельта від відстані між стеклами

При відстані *L*<16...20 мм конвекція у склопакеті суттєво пригнічується силами в'язкості у потоці і теплообмін між вертикальними поверхнями здійснюється майже тільки за рахунок теплопровідності

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

В роботі побудована математична модель руху і теплообміну повітря в склопакеті вікна, та провести дослідження поля швидкості та температур та вирішені наступні завдання: складання замкненої системи рівнянь математичної моделі та розв'язання її за допомогою чисельного методу; складання програми для ПЕОМ для розрахунку поля швидкості та температур і проведення розрахунків з аналізом отриманих результатів.

За допомогою математичної моделі визначено поле швидкості, температур та коефіцієнт тепловіддачі в залежності від відносної ширини склопакету.

Результати роботи можливо використовувати при проектуванні нових вікон та дослідженні існуючих прошарків в огороджуючих конструкціях будівель.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1 Heат and mass transfer in recirculating flow / Gosman A.D. Pun W.M., Runchal A.K., Spalding D.B., Wolfshtein M. - Academic Press.: London New York, 1969, P.323

2 H. Schlichting Gren Grenzschicht-Teorie.- Verlag G. Braun: Karlsruhe, 1970, P. 712.

3 Роуч П. Вычислительная гидродинамика, 1977, - 606 с

4 Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow, New York: Hemispere Publishing Corporation, 1980, P. 152

5 Математическое моделирование конвективного тепломасообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб и др.- М.: Наука, 1987.

6 Eckert E/R.G.,Carlson W.O. Natural convection in air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1961. Vol. 2. P.106–120.

7 Lee Y., Korpela S.A. Multicellular natural convection in a vertical slot // J.Fluid Mesh. 1983. Vol. 126. P. 91-121

8 Polezhaev V.I., Bune A.V., Griaznov V.L. Structure, characteristics of transition and of turbulence in the thermal convection given by the direct numercalmodelling / Laminar-turbulent transition/Ed. V. V. Kozlov. Berlin: Springer, 1985. P. 741-747

9 Непомнящий А.А. О нестационарных вторичных конвективных движениях в вертикальном плоском слое // Конвективные течения. Пермь: ПГПИю 1979ю Сю 61-66