

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Технічна механіка»

В авторській редакції

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ**

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять

ДНІПРО
2024

Упорядники:
О. Л. Янгулова, Л. О. Недужа

*Електронний аналог
друкованого видання*

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
133 «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання»,
«Експлуатація та ремонт техніки Держспецтрансслужби»,
273 «Локомотиви та локомотивне господарство», «Вагони та вагонне господарство»,
274 «Автомобілі та автомобільне господарство»
Протокол № 4 від 25 квітня 2024

Т 33 Теоретична механіка. Коливання матеріальної точки : навчально-методичні рекомендації до практичних занять / упоряд. : О. Л. Янгулова, Л. О. Недужа ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 33 с.

У навчально-методичних рекомендаціях до практичних занять наведено загальні теоретичні поняття. Детально розглянуто розв'язання прикладів на тему «Коливання матеріальної точки». Приведені запитання та завдання для самоперевірки. Є список рекомендованої літератури, яким варто скористатися для поглибленого вивчення матеріалу.

Видання сприяє кращому засвоєнню теми «Коливання матеріальної точки» дисципліни «Теоретична механіка», розвитку навичок виконання інженерних розрахунків, допомагає скоротити час до підготовки контрольних заходів.

Для здобувачів освіти всіх форм навчання тих спеціальностей, освітніми програмами яких передбачено вивчення дисципліни «Теоретична механіка».

Іл. 17. Бібліогр.: 16 назв.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	5
2. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ	6
3. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ	11
4. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ	15
5. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ	20
6. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ	29
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	32

ВСТУП

Метою даних навчально-методичних рекомендацій до практичних занять є допомога здобувачу освіти в опануванні та систематизації знань теми «Коливання матеріальної точки» завдяки детальному розгляду й засвоєнню методики розв'язання задач.

Видання сприяє досягненню очікуваних результатів навчання. Це допоможе кращому засвоєнню загальних теоретичних понять та набуття практичних навичок з розділу «Коливання матеріальної точки». Такі приклади надані в методичних вказівках (рекомендаціях) та підручниках, які пропонуються лектором або керівником практичних занять.

Особливостями видання є те, що для більш поглибленого дослідження коливання матеріальної точки наведено загальні теоретичні відомості, детально розглянуто приклади розв'язання задач; наведено запитання та завдання для самоперевірки.

Навчально-методичні рекомендації до практичних занять на тему «Коливання матеріальної точки» підготовлені для здобувачів освіти всіх форм навчання за спеціальностями:

133 Галузеве машинобудування

Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання

Експлуатація та ремонт техніки Держспецтрансслужби

141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Електричний транспорт

Електромеханічні системи автоматизації та електропривод

Електротехнічні системи електроспоживання

192 Будівництво та цивільна інженерія

Мости і транспортні тунелі

Промислове і цивільне будівництво

Архітектурне проєктування будівель і споруд

Автомобільні дороги і аеродроми

Відновлення та будівництво штучних споруд на об'єктах національної транспортної системи

Будівництво та експлуатація будинків і споруд спеціального та загальновійськового призначення

273 Залізничний транспорт

Локомотиви та локомотивне господарство

Вагони та вагонне господарство

Залізничні споруди та колійне господарство

Відновлення та будівництво об'єктів національної транспортної системи

Морально-психологічне забезпечення підрозділів Держспецтрансслужби

274 Автомобільний транспорт

Автомобілі та автомобільне господарство

1. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Теоретична (або загальна) **механіка** – це наука, яка вивчає загальні закони рівноваги, руху та взаємодії матеріальних точок і твердих тіл. Теоретична механіка є частиною теоретичної фізики, це основа інших розділів механіки: опору матеріалів, теорії пружності, гідродинаміки, теорії пластичності, теорії машин і механізмів та інших наук.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, що має масу, але формою і розмірами якого можна знехтувати.

Тверде тіло в теоретичній механіці не характеризується його агрегатним станом (газ, рідина, тверде тіло). У цьому тілі відстань між двома будь-якими точками не змінюється ні під час руху, ні при діючих на нього силах – далі, коли ми говоримо про тіло, то маємо на увазі таке тверде тіло.

Сила – це узагальнене поняття, яке характеризує міру взаємодії двох матеріальних точок чи тіл.

Відновлююча сила – це сила, яка повертає точку в положення рівноваги.

Сила опору – це сила, яка перешкоджає руху тіла.

Дослідженням руху матеріальної точки є коливальний рух – це рух, який повторюється через рівні інтервали часу.

Постановка задачі.

Розв’язання всіх задач розглянуто на наступному прикладі.

Механічна система (рис. 1.1,а) складається з двох тіл масою m_1 і m_2 , двох пружин жорсткістю c_1 і c_2 . Тіло 1 знаходиться на гладкій площині, яка розташована під кутом α до горизонту, і здійснює поступальний рух. В подальшому будемо нехтувати розмірами тіла 1 і розглядати його як матеріальну точку, маса якої дорівнює масі тіла 1 ($m = m_1$), що зосереджена в центрі маси тіла.

Розглянемо рух тіла вздовж осі x , проведеної з положення статичної рівноваги (рис. 1.1,а). Беручи до уваги початкові умови, будемо досліджувати:

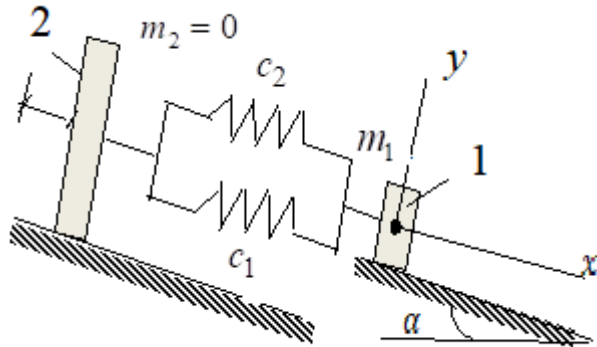
- 1) вільні коливання тіла;
- 2) вимушені коливання тіла при дії гармонійної, збурювальної сили $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$;
- 3) вимушені коливання тіла на резонансній частоті.

Параметри системи і збурювальної сили мають такі значення: $\alpha = 90^\circ$, $m_1 = m = 0,306m$, $m_2 = 0$, $c_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$, $c_2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$, $F_0 = 18 \text{ кН}$, $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$, $\delta = 0$ (рис. 1.1,б).

У початковий момент часу пружини розтягнуті на величину $\Delta \ell_0 = 0,04 \text{ м}$ і тілу надана швидкість $V_0 = 0,15 \text{ м/с}$ у від’ємному напрямку осі x . Коефіцієнт в’язкого опору підберемо з умови, що коливання згасають до 0,1 почат-

кової амплітуди за час $t_y = 3T$, де T – період вільних коливань (без опору руху).

а)



б)

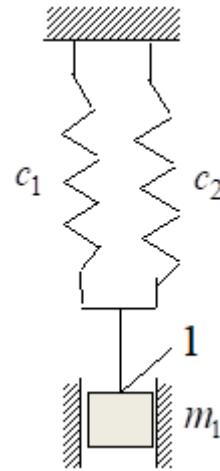


Рис. 1.1

Закон руху тіла $x(t)$ будемо визначати аналітично і за допомогою стандартної комп'ютерної програми (для деяких варіантів розрахунку зіставлення результатів).

2. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ

Вільними (або власними) **коливаннями** матеріальної точки називаються її коливання під дією відновлюючої сили, яка визначається початковим відхиленням точки від положення рівноваги або надання їй початкової швидкості. До основних характеристик коливального процесу відносяться амплітуда, початкова фаза і період коливань.

Диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки отримасмо за допомогою **другого** (головного) **закону динаміки**:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (2.1)$$

де m – маса точки; c – коефіцієнт жорсткості пружини; x – координата точки; $\ddot{x}$ – друга похідна. Розв'язання цього диференціального рівняння можливе тоді, коли хоча б одна з початкових умов буде ненульовою:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \quad (2.2)$$

Якщо розглядається не одна, а декілька пружин різного виду з'єднання (рис. 2.1), то коефіцієнт жорсткості пружин зводиться до однієї пружини з еквівалентною жорсткістю $c_{екв}$ і визначається як:

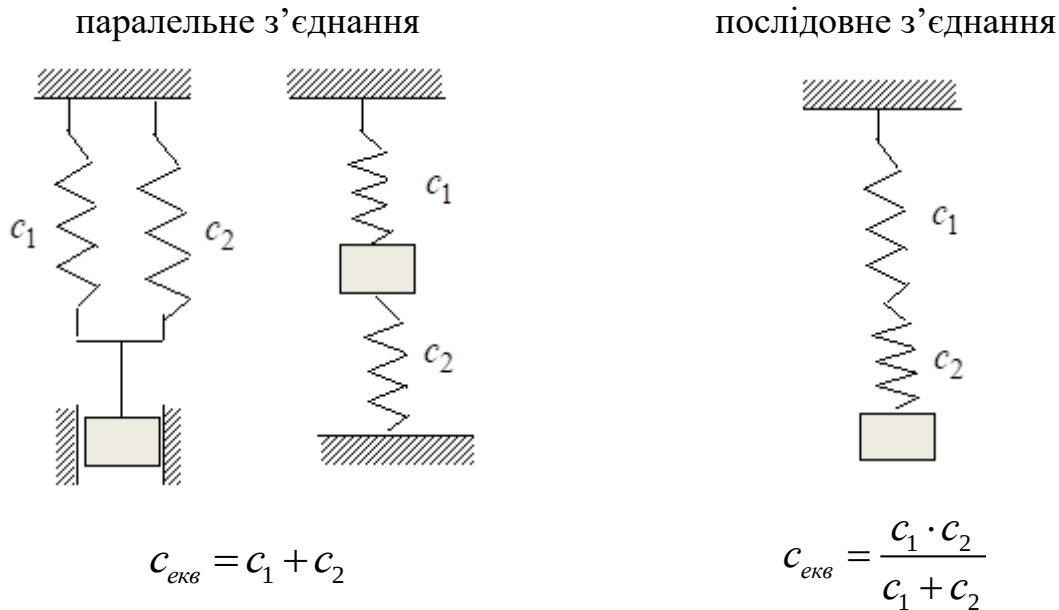


Рис. 2.1

Розділимо диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки (2.1) на m :

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.3)$$

Позначимо через $k^2 = \frac{c}{m}$, де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ називається **круговою частотою** вільних коливань – це кількість коливань точки за інтервал часу 2π секунди.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (2.3) другого порядку має вигляд

$$x = A \cos kt + B \sin kt \quad (2.4)$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (2.5)$$

де A, B – сталі інтегрування, які пов'язанні між собою співвідношенням

$$\operatorname{tg} = \frac{A}{B};$$

a – амплітуда коливань, тобто найбільше відхилення точки від положення рівноваги, $a = \sqrt{A^2 + B^2}$;

α – початкова фаза коливань.

З урахуванням початкових умов (2.2) маємо:

$$A = x_0, \quad B = \frac{\dot{x}_0}{k}, \quad A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}.$$

Знайдені сталі інтегрування a і α за фізичним змістом являють собою амплітуду і початкову фазу коливань.

Проміжок часу між двома послідовними проходженнями точкою положення рівноваги в одному й тому ж напрямку називається періодом коливань T , який визначається за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.6)$$

Період T і частота k не залежать від початкових умов. Ця властивість називається ізохронністю коливань.

Приклад.

Схема сил, що діють на тіло, приведена на рис. 2.2. Замінімо пружини з жорсткістю c_1 і c_2 однією пружиною з еквівалентною жорсткістю $c_{екв} = c_1 + c_2 = 10 + 20 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$ (рис. 2.3).

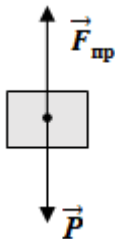


Рис. 2.2

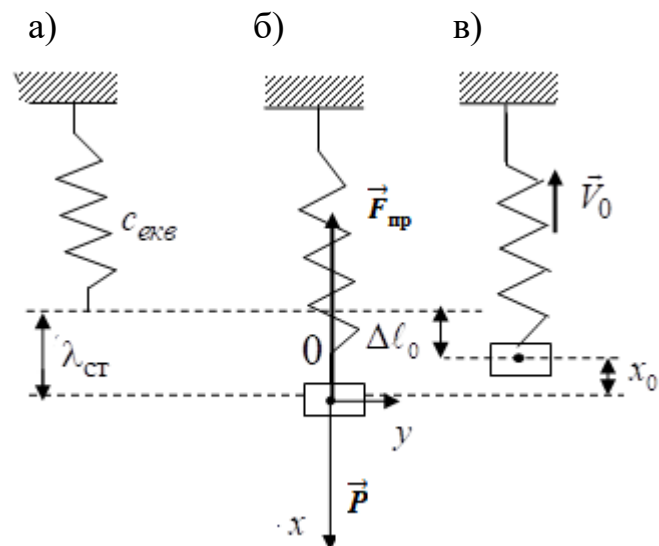


Рис. 2.3

Тут $P = mg$ – сила тяжіння тіла; $F_{\text{пр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$ – сила пружності пружини; а) пружина не деформована: б) положення статичної рівноваги: в) $t = 0$. Використовуючи другий закон Ньютона, складемо диференціальне рівняння руху тіла як матеріальної точки і представимо у вигляді (2.3)

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – кругова частота вільних коливань. Для даної системи

$$k = \sqrt{\frac{30}{0,306}} = \sqrt{98} = 9,89 \text{ с}^{-1}.$$

За вихідними даними запишемо початкові умови (початкове відхилення центру мас тіла від положення статичної рівноваги x_0 і початкову швидкість $\dot{x}_0$) (рис. 2.3):

$$x_0 = -(\lambda_{\text{ст}} - \Delta \ell_0); \quad \dot{x}_0 = -V_0, \quad (2.7)$$

де $\lambda_{\text{ст}}$ – статична деформація пружини, $\Delta \ell_0$ – початкова деформація пружини. Оскільки $\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} = \frac{3}{30} = 0,1$ м, то

$$x_0 = -(0,1 - 0,04) = -0,06 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = -0,15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.3) можна представити у вигляді:

$$x = A \cos kt + B \sin kt \quad (2.8)$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (2.9)$$

де A, B, a, α – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов (2.7).

Скористуємося (2.8) і знайдемо сталі інтегрування A й B :

$$A = x_0 = -0,06 \text{ м}, \quad B = \frac{\dot{x}_0}{k} = \frac{-0,15}{9,89} = -0,015 \text{ м}.$$

Отримані числові значення підставимо до (2.8)

$$x = -0,06 \cos(9,89t) - 0,015 \sin(9,89t) \text{ м}. \quad (2.10)$$

Амплітуду a і початкову фазу коливань α визначимо наступним чином:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \quad \text{або} \quad a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-0,06)^2 + \frac{(-0,15)^2}{9,89^2}} = 0,062 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{B} = \frac{-0,06}{0,015} = 4,$$

звідки $\alpha = \arctg 4 = 1,33 + \pi = 4,47$ рад.

Тоді вираз (2.9) матиме вигляд

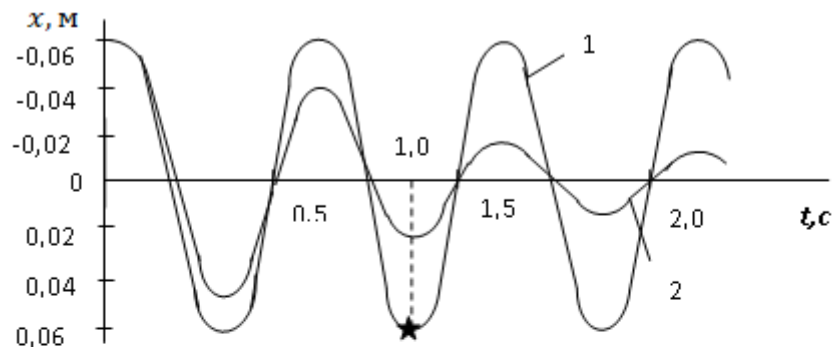
$$x = 0,062 \sin(9,89t + 4,47) \text{ м.} \quad (2.11)$$

Обчислимо період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{9,86} = 0,636 \text{ с.}$$

Для розглянутого випадку знайдемо розв'язок $x(t)$ за допомогою стандартної комп'ютерної програми, яка реалізує метод чисельного (покрокового) інтегрування системи диференціальних рівнянь. Графік зміни координати x від часу t зображений на рис. 2.4,а (лінія 1).

а)



б)

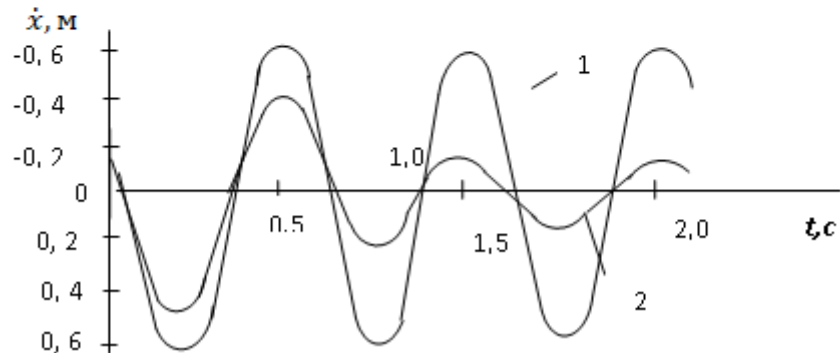


Рис. 2.4

Контроль отриманого комп'ютерного розв'язку можна виконати за допомогою рівнянь (2.10) або (2.11). Наприклад, скористаємося рівнянням (2.11) і знайдемо значення x_1 (м) при $t_1 = 1$ с:

$$x_1 = 0,062 \sin(9,89 \cdot 1 + 4,47) = 0,062 \sin 14,36 = 0,062 \cdot 0,978 = 0,06.$$

Це значення практично збігається з комп'ютерним розв'язком (рис. 2.4,а – ордината x помічена зіркою «*»). З графіка також видно, що амплітуда коливань з часом не змінюється і дорівнює $a \approx 0,062$ м, а період коливань $T = 0,064$ с, що добре узгоджується з теоретичними результатами.

На рис. 6,б лінією 1 показано графік зміни швидкості $\dot{x}(t)$ від часу t . Видно, що швидкість приймає найбільші (за абсолютною величиною) значення $|\dot{x}|_{\max}$ в моменти переходу через положення статичної рівноваги ($x = 0$). Значення $|\dot{x}|_{\max}$ з часом не змінюється і приблизно дорівнює $0,6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ($|\dot{x}|_{\max} \approx 0,6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$), що відповідає добутку $a \cdot k$. Нульові ж значення швидкості приймає в ті моменти часу, коли тіло відхиляється на найбільшу величину від положення статичної рівноваги (тобто, відхилення дорівнює амплітудному значенню).

3. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

Диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки з урахуванням сил опору, які пропорційні швидкості V , має вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0, \quad (3.1)$$

де β – коефіцієнт пропорційності сили опору $R = \beta\dot{x} = \beta V$.

Розділимо рівняння (3.1) на m і отримаємо:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (3.2)$$

де $b = \frac{\beta}{2m}$ – коефіцієнт згасання, $k^2 = \frac{c}{m}$.

Загальне розв'язання диференціального рівняння (3.2) в залежності від співвідношення між параметрами b та k може мати три випадки. Розглянемо кожен із них:

1) випадок **малого опору** $k > b$. Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.2) має вигляд:

$$x = e^{-bt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t) \quad (3.3)$$

або

$$x = a e^{-bt} (\sin(k_1 t + \alpha)), \quad (3.4)$$

де введено позначення $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$.

У цьому випадку сталі інтегрування для заданих початкових умов визначаються як:

$$A = x_0, \quad B = \frac{\dot{x}_0 + x_0 b}{\sqrt{k^2 - b^2}}.$$

Рух, що відповідає розв'язку (3.4), є коливальним з амплітудою, яка зменшується з часом, тобто відбуваються згасаючі коливання. Період цих коливань визначається так:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \quad (3.5)$$

Значення амплітуд a_1, a_2, a_3 змінюється за геометричною прогресією (рис. 3.1).

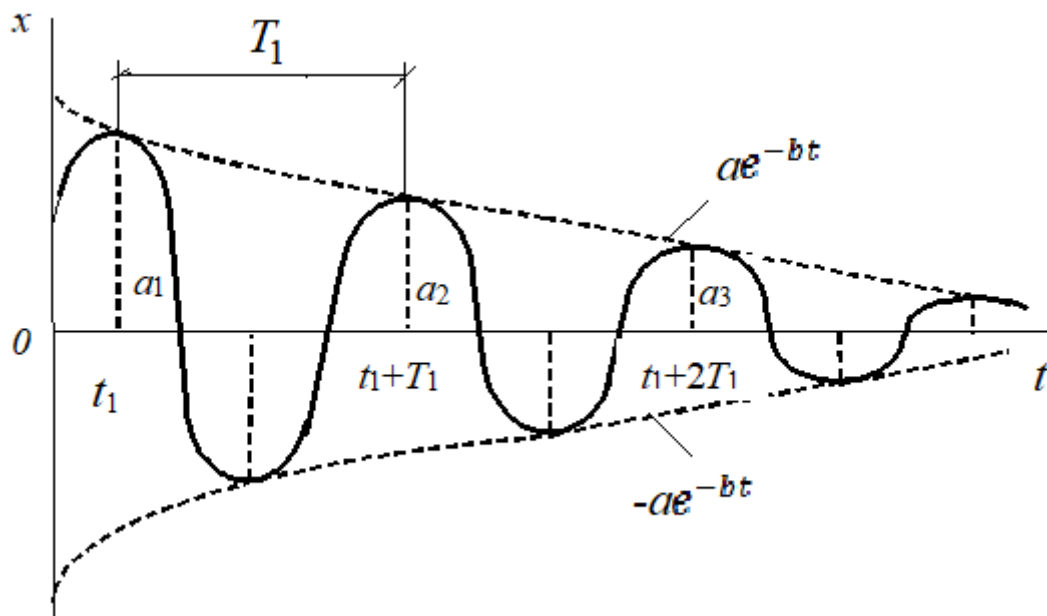


Рис. 3.1

Величина e^{-bT_1} називається **декрементом згасання**, а величина bT_1 є логарифмічним **декрементом згасаючих коливань**;

2) випадок **великого опору** $k < b$ (корні відповідного характеристичного рівняння дійсні). Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$x = Ae^{-(b+k_1)t} + Be^{-(b-k_1)t}. \quad (3.6)$$

Рух, який відповідає (3.6), носить неколивальний характер і тому називається **аперіодичним**. Сталі інтегрування A, B визначаються з початкових умов:

$$A = \frac{x_0(k_1 + b) + \dot{x}_0}{2k_1}, \quad B = \frac{x_0(k_1 - b) + \dot{x}_0}{2k_1};$$

3) випадок **кратних корнів характеристичного рівняння** $k = b$, тоді загальний розв'язок рівняння (3.2) записується у формі

$$x = e^{-bt}(A + Bt), \quad (3.7)$$

а сталі інтегрування визначаються з виразів:

$$A = x_0, \quad B = \dot{x}_0 + bx_0.$$

Приклад.

Виконаємо дослідження вільних коливань тіла (рис. 3.2) з урахуванням сили опору R , яка пропорційна першій степені швидкості $R = \beta\dot{x}$ (β – коефіцієнт в'язкого опору) при заданих початкових умовах.

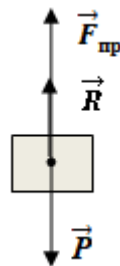


Рис. 3.2

Диференціальне рівняння руху тіла в цьому випадку має вигляд:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (3.8)$$

де $b = \frac{\beta}{2m}$.

Розв'язок рівняння (3.8) може бути представлено у вигляді

$$x = e^{-bt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t) \quad (3.9)$$

або

$$x = a e^{-bt} (\sin(k_1 t + \alpha)), \quad (3.10)$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$.

Сталі інтегрування A і B (або a і α) визначаються з початкових умов (2.7).

Підберемо коефіцієнт β з умови, щоб коливання згасали до 0,1 початкової амплітуди за час $t = 3T$.

У першому наближенні можна вважати, що період коливань (при наявності опору) $T_1 \approx T$. У цьому випадку формула для визначення β така

$$\beta = 2m \frac{|\ln 0,1|}{3T} = \frac{2 \cdot 0,306 \cdot 2,3}{3 \cdot 0,636} = 0,738 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (3.11)$$

При зазначеному значенні β знайдемо частоту k_1 і період T_1 згасаючих коливань: оскільки $b = \frac{0,738}{2 \cdot 0,306} = 1,2 \text{ с}^{-1}$, а $k_1 = \sqrt{98 - 1,44} = 9,8 \text{ с}^{-1}$, то

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{6,28}{9,8} = 0,64 \text{ с}.$$

Як видно, кругова частота коливань за рахунок опору зменшилася, а період коливань збільшився в порівнянні з T , але незначно.

За допомогою стандартної комп'ютерної програми побудуємо графік $x(t)$ (рис. 2.4,а, лінія 2). Як видно з графіка, амплітуда коливань з часом зменшується, що пояснюється наявністю коефіцієнта e^{-bt} у виразах (3.9) або (3.10). В кінці третього періоду (при $t_1 \approx 3T = 1,9 \text{ с}$) амплітуда дорівнює 0,005 м.

На рис. 2.4,б лінією 2 показаний графік зміни швидкості тіла, з якого видно, що в усі моменти часу не перевищують аналогічних значень при (див. лінію 1 на рис. 2.4,б). Крім того, амплітудне значення швидкості з часом зменшується до 0.

4. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ

Вимушеними коливаннями називають коливання точки, якщо на неї (крім відновлюваної сили) діє збурююча сила, яка змінюється з часом за гармонійним законом. У найпростішому випадку збурююча сила має вигляд $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$. Тут F_0 – максимальне значення збурюючої сили, ω – її частота, δ – початкова фаза коливань.

Диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору має вигляд

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \sin(\omega t + \delta).$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння на m і отримаємо:

$$\ddot{x} + k^2 x = F \sin(\omega t + \delta), \quad (4.1)$$

де прийняті такі обозначення $F = \frac{F_0}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (4.1) запишемо у вигляді суми:

$$x = x_1 + x_2, \quad (4.2)$$

де x_1 – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (2.3), x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок x_1 однорідного диференціального рівняння запишемо так:

$$x_1 = A \cos kt + B \sin kt.$$

Щоб визначити частинний розв'язок x_2 неоднорідного рівняння треба розглянути такі випадки:

- 1) частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили $k \neq \omega$. Частинний розв'язок x_2 має вигляд

$$x_2 = D \sin(\omega t + \delta), \quad (4.3)$$

де $D = \frac{F}{k^2 - \omega^2}$ – амплітуда вимушених коливань.

Загальний розв'язок (4.2) є таким

$$x = A \cos kt + B \sin kt + D \sin(\omega t + \delta). \quad (4.4)$$

Таким чином, при одночасній дії відновлювальної та збурювальної сил, матеріальна точка здійснює рух, який складений з двох гармонійних коливань: перше (x_1) називається власним або вільним коливанням, а друге (x_2) вимушеним.

Сталі інтегрування A та B визначаються з урахуванням початкових умов ($t_0 = 0$), $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$:

$$A = x_0 - \frac{F}{k^2 - \omega^2} \sin \delta, \quad B = \frac{1}{k} \left(\dot{x}_0 - \frac{F \omega}{k^2 - \omega^2} \cos \delta \right);$$

2) частота вільних коливань близька за значенням до частоти збурювальної сили $\omega/k \approx 1$, $k + \omega \approx 2\omega$ і $k^2 - \omega^2 \neq 0$. Тоді при нульових початкових умовах $[x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0]$ вираз (4.4) записується так:

$$x = D(t) \cos(\omega t + \delta), \quad (4.5)$$

де $D(t) = \frac{2F}{k^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - k}{2}t\right)$.

Рух, що відповідає виразу (4.5), є коливальним. Його частота дорівнює частоті збурювальної сили. Амплітуда повільно змінюється з частотою, що дорівнює половині різниці частоти збурювальної сили та частоти вільних коливань (рис. 4.1). Це явище називається **биттям**.

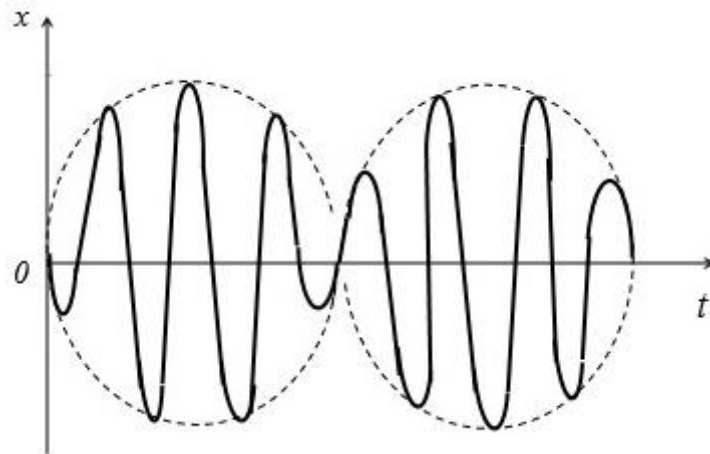


Рис. 4.1

3) частота вільних коливань дорівнює частоті збурювальної сили $k = \omega$. При цьому якісно змінюється характер коливань – виникає **резонанс**. За та-

ких умов загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння x_1 та частинного розв'язку x_2 неоднорідного рівняння записується у формі

$$x_2 = tD \cos(\omega t + \delta), \quad (4.6)$$

де $D = -\frac{F}{2\omega} = -\frac{F}{2k}$.

У випадку резонансу загальний розв'язок диференціального рівняння (4.1) має вигляд

$$x = A \cos kt + B \sin kt - \frac{F}{2\omega} t \cos(\omega t + \delta). \quad (4.7)$$

Сталі інтегрування A та B , які визначаються з початкових умов, дорівнюють:

$$A = x_0, \quad B = \frac{1}{\omega k} \left(\dot{x}_0 + \frac{F}{2\omega} \cos \delta \right).$$

Тепер розв'язок (4.7) можна записати так

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\dot{x}_0 + \frac{F}{2\omega} \cos \delta \right) \sin \omega t - \frac{F}{2\omega} t \sin \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.8)$$

Складова $\frac{F}{2\omega} t \sin \left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right)$ відповідає вимушеним коливанням у випадку резонансу. Частота ω та період T цих коливань дорівнюють частоті $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ і періоду $T = \frac{2\pi}{k}$ вільних коливань. Фаза вимушених коливань при резонансі $\left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2} \right)$ відстає від фази збурювальної сили $(\omega t + \delta)$ на величину $\frac{\pi}{2}$. Амплітуда вимушених коливань у випадку резонансу $D = -\frac{F}{2\omega}$ зростає пропорційно часу (рис. 4.2).

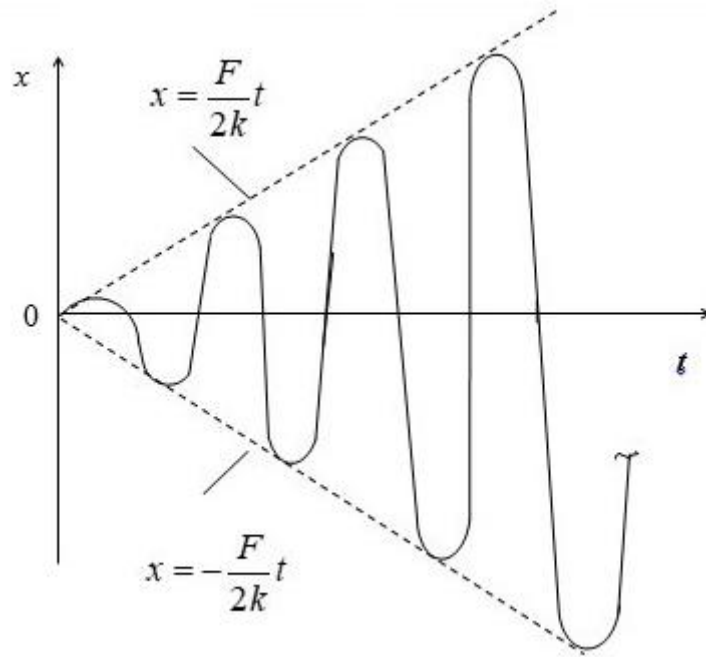


Рис. 4.2

Приклад.

Виконаємо дослідження вимушених коливань тіла (як матеріальної точки) без урахування опору руху при заданих початкових умовах (2.7). Схема діючих сил приведена на рис. 4.3, де $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$, де F_0 – амплітуда, ω – частота, δ – початкова фаза вимушених коливань.

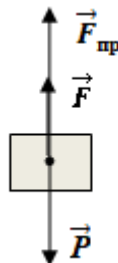


Рис. 4.3

Диференціальне рівняння руху запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \delta). \quad (4.9)$$

Відзначимо, що частота вимушених коливань $\omega = 30 \text{ c}^{-1}$ не збігається з частотою вільних коливань $k = 9,89 \text{ c}^{-1}$. У цьому випадку розв'язок цього рівняння можна представити так:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + D \sin(\omega t + \delta) \quad (4.10)$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha) + D \sin(\omega t + \delta). \quad (4.11)$$

Коефіцієнт D в цих виразах визначається шляхом підстановки складової $D \sin(\omega t + \delta)$ до рівняння (4.9). Тоді $D = \frac{\lambda_0}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}$, де $\lambda_0 = \frac{F_0}{c}$ – статичне по-

довження пружини від дії амплітудного значення збурювальної сили. Оскільки $F_0 = 18$ кН, то $\lambda_0 = \frac{18}{30} = 0,6$ м і $\frac{\omega}{k} = \frac{30}{9,89} = 3,03$,

$$\text{тоді} \quad D = \frac{0,6}{1 - 3,03^2} = -\frac{0,6}{8,2} = -0,073 \text{ м.}$$

Сталі інтегрування A та B визначаються з початкових умов, скористаємося виразом (4.10) і знайдемо їх.

Врахуємо, що $\dot{x} = -Ak \sin kt + Bk \cos kt + D\omega \cos(\omega t + \delta)$.

До виразів $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ підставимо початкові умови:

$$x_0 = A \cos 0 + B \sin 0 + D \sin \delta,$$

$$\dot{x} = -Ak \sin 0 + Bk \cos 0 + D\omega \cos \delta.$$

Оскільки за умовою $\delta = 0$, то

$$A = x_0 = -0,06 \text{ м}, \quad B = \frac{\dot{x}_0 - D\omega}{k} = \frac{-0,15 + 0,073 \cdot 30}{9,89} = 0,207 \text{ м.}$$

Тоді

$$x = -0,06 \cos 9,89t + 0,207 \sin 9,89t - 0,073 \sin 30t \text{ м.} \quad (4.12)$$

За допомогою стандартної комп'ютерної програми визначимо закон зміни $x(t)$ і побудуємо графік (рис. 4.4,б, лінія 1).

Для контролю отриманого рішення підрахуємо значення x_1 при $t_1 = 0,5$ с по формулі (4.12). Для чого замість t підставимо $t_1 = 0,5$ с:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,06 \cos 4,94 + 0,207 \sin 4,94 - 0,073 \sin 15 = \\ &= -0,06 \cdot 0,225 - 0,207 \cdot 0,96 - 0,073 \cdot 0,642 = -0,256 \text{ м.} \end{aligned}$$

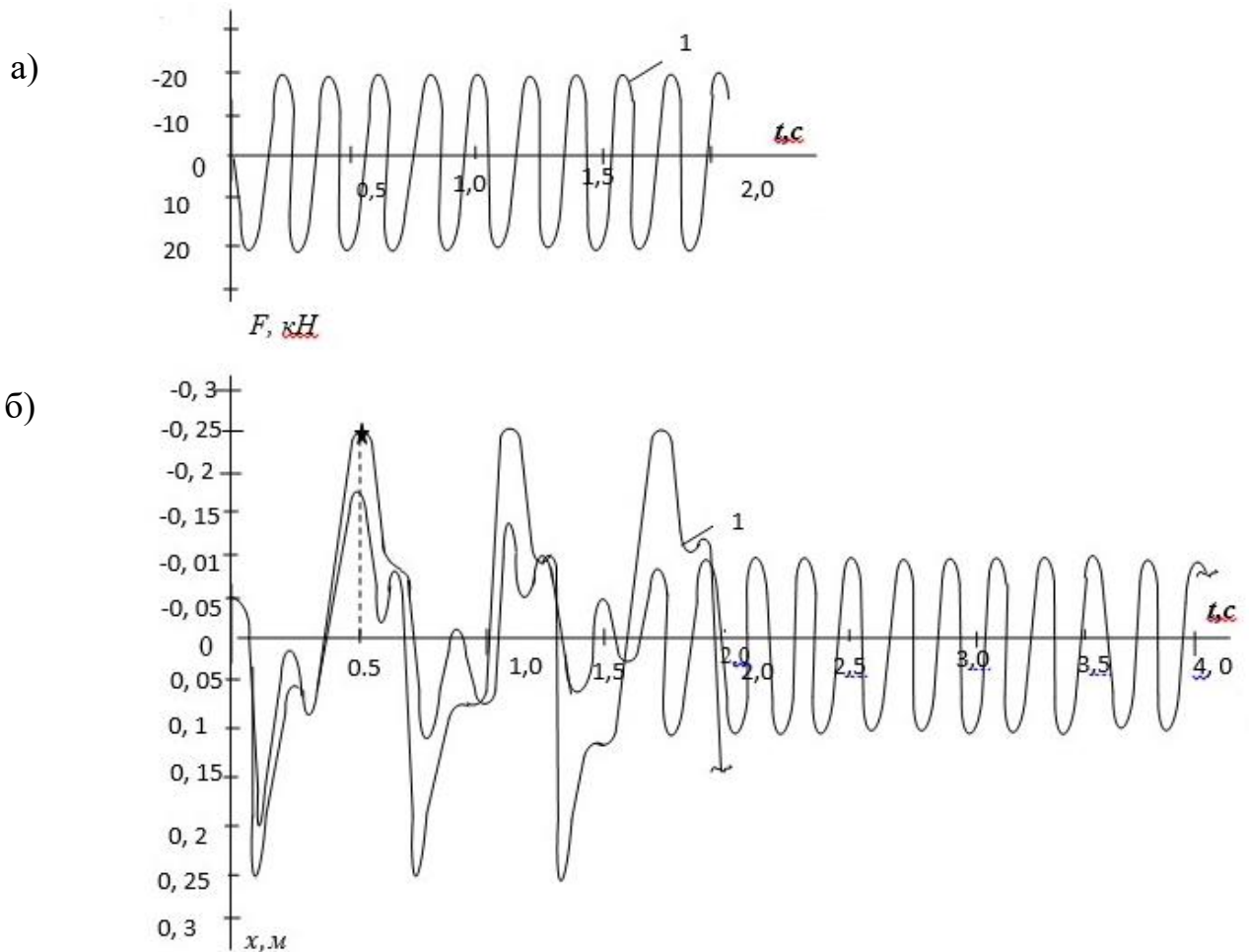


Рис. 4.4

Як видно, результат добре узгоджується з комп'ютерним розв'язком (див. рис. 4.4,б). На рисунку ордината відповідного рішення помічена зіркою «*».

5. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

Диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки з урахування сил опору має вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = F_0 \sin(\omega t + \delta).$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння на m і отримаємо:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = F \sin(\omega t + \delta), \quad (5.1)$$

де введені обозначення $F = \frac{F_0}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, $b = \frac{\beta}{2m}$ – коефіцієнт згасання.

Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (5.1) запишемо у вигляді суми:

$$x = x_1 + x_2,$$

де x_1 – загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння (3.2), x_2 – частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Як вже зазначалося, в залежності від співвідношення між параметрами b і k загальний розв’язок x_1 може бути в одній з форм (3.3), (3.6), (3.7). Частинний розв’язок x_2 неоднорідного диференціального рівняння (5.1) запишемо так:

$$x_2 = B_1 \cos(\omega t + \delta) + B_2 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.2)$$

або

$$x_2 = B \sin(\omega t + \delta + \varepsilon), \quad (5.3)$$

де B_1 , B_2 , B – сталі інтегрування що пов’язанні між собою співвідношеннями.

Залежність амплітуди вимушених коливань B^* ($B^* = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$) від частоти збурювальної сили ω (5.4) називається **амплітудно-частотною характеристикою**. І визначається підстановкою частинного розв’язку (5.2) до диференціального рівняння (5.1):

$$B^* = \frac{F}{\sqrt{(k^2 - \omega^2) + 4b^2\omega^2}}. \quad (5.4)$$

Тепер загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (5.1) має вигляд:

$$x = x_1 + \frac{F}{\sqrt{(k^2 - \omega^2) + 4b^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta + \varepsilon), \quad (5.5)$$

де x_1 набуває однієї з форм (3.3), (3.6), (3.7). Для визначення сталих інтегрування A і B треба до виразу (5.5) підставити початкові умови за координатою $[t_0 = 0, x(t_0) = x_0]$ та за швидкістю $[t_0 = 0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0]$ і розв’язати систему двох алгебраїчних рівнянь відносно A і B .

У виразі (5.5) складові руху (що відповідають розв'язку x_1) з часом згасають і через достатньо довгий інтервал часу залишаються тільки вимушені коливання, які є розв'язком x_2 .

Введемо величину $\lambda_0 = \frac{F}{k^2} = \frac{F_0}{c}$, яка визначає статичне відхилення (деформацію) при дії сталої сили. Відношення амплітуди вимушених коливань B^* на частоті ω до статичного відхилення λ_0 називається **коефіцієнтом динамічності**:

$$\alpha_\omega = \frac{B^*}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (z)^2]^2 + 4v^2(z)^2}}, \quad (5.6)$$

Де введені такі обозначення $z = \frac{\omega}{k}$, $v = \frac{b}{k}$.

Залежність зсуву фази вимушених коливань ε від частоти збурювальної сили ω , називається *фазо-частотною характеристикою*.

Графік залежності коефіцієнта динамічності α_ω та фази вимушених коливань ε від частоти збурювальної сили ω для різних значень v наведено на рис. 5.1 і 5.2 відповідно.

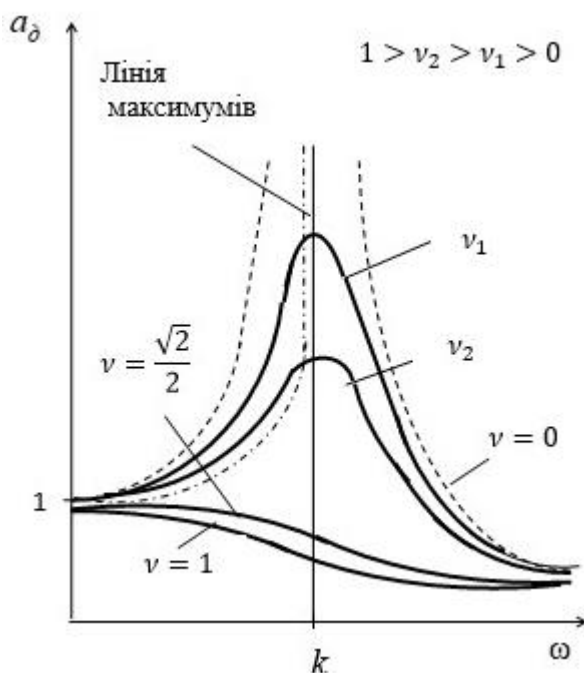


Рис. 5.1

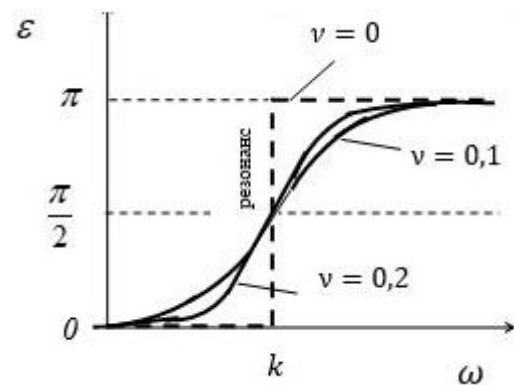


Рис. 5.2

Приклад.

Проведемо дослідження вимушених коливань тіла при опорі, пропорційному першій степені швидкості, з огляду на задані початкові умови (2.7) (рис. 5.3). Тут $R = \beta \dot{x}$ – сила опору руху.

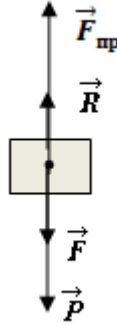


Рис. 5.3

Диференціальне рівняння руху тіла запишемо у вигляді:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t + \delta). \quad (5.7)$$

Розв'язок диференціального рівняння можна представити так:

$$x = e^{-bt}(A\cos k_1t + B\sin k_1t) + D\sin(\omega t + \delta - \varepsilon) \quad (5.8)$$

або

$$x = ae^{-bt}\sin(k_1t + \alpha) + D\sin(\omega t + \delta - \varepsilon), \quad (5.9)$$

D – коефіцієнт (амплітуда вимушених коливань), який визначається за формулою

$$D = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]^2 + 4h^2\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}},$$

де введені обозначення $h = \frac{\beta}{2mk}$,

$$\varepsilon - \text{зсув фази } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2b\omega}{k^2 - \omega^2} = \frac{2h\left(\frac{\omega}{k}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}.$$

Наявність множника e^{-bt} у виразах (5.8) і (5.9) говорить про те, що з часом вільні коливання загасають і залишаються вимушені з амплітудою D .

Сталі інтегрування A і B визначаються з початкових умов.

Знайдемо рішення $x(t)$ за допомогою стандартної комп'ютерної програми – на рис. 2.4,б лінія 2. З рисунка видно, що на відрізку часу $0 \div 2,5$ с коливання відбуваються з амплітудою, що зменшується (в силу того, що вільні коливання за рахунок опору загасають). При $t > 2,5$ с залишаються вимушені коливання з постійною амплітудою $D = 0,07$ м і частотою, що дорівнює частоті збудовувальної сили (рис. 2.4,а).

Приклад.

Проведемо доослідження вимушених коливань тіла на резонансній частоті $\omega = k = 9,89 \text{ с}^{-1}$ без урахування опору (рис. 4.3).

В цьому випадку розв'язок диференціального рівняння (4.9) має вигляд:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + D^* t \cos(\omega t + \delta) \quad (5.10)$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha) + D^* t \cos(\omega t + \delta). \quad (5.11)$$

Коефіцієнт D^* обчислюється за формулою $D^* = -\frac{F_0}{2m\omega}$, а сталі інтегрування A і B визначаються з початкових умов. Тоді, після підстановки, отримаємо:

$$D^* = -\frac{18}{2 \cdot 0,306 \cdot 9,89} = -2,88 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Скористаємося виразом (5.10)

$$x = -Ak \sin kt + Bk \cos kt + D^* [\cos(\omega t + \delta) - t\omega \sin(\omega t + \delta)].$$

Для знаходження A і B врахуємо, що

$$x_0 = A \cos 0 + B \sin 0 + 0,$$

$$\dot{x}_0 = -Ak \sin 0 + Bk \cos 0 + D^* [\cos \delta + 0].$$

Оскільки $\delta = 0$, то $A = x_0 = -0,06$ м, $B = \frac{\dot{x}_0 - D^*}{k} = \frac{-0,15 + 2,88}{9,89} = 0,277$ м.

Тоді вираз (5.10) набуває вигляд

$$x = -0,06 \cos 9,89t + 0,277 \sin 9,89t - 2,88t \cos 9,89t, \text{ м.}$$

Визначимо за допомогою стандартної комп'ютерної програми розв'язок $x(t)$, це буде графік на рис. 5.4 (лінія 1). Графік ілюструє наростання амплітуди коливань пропорційно часу.

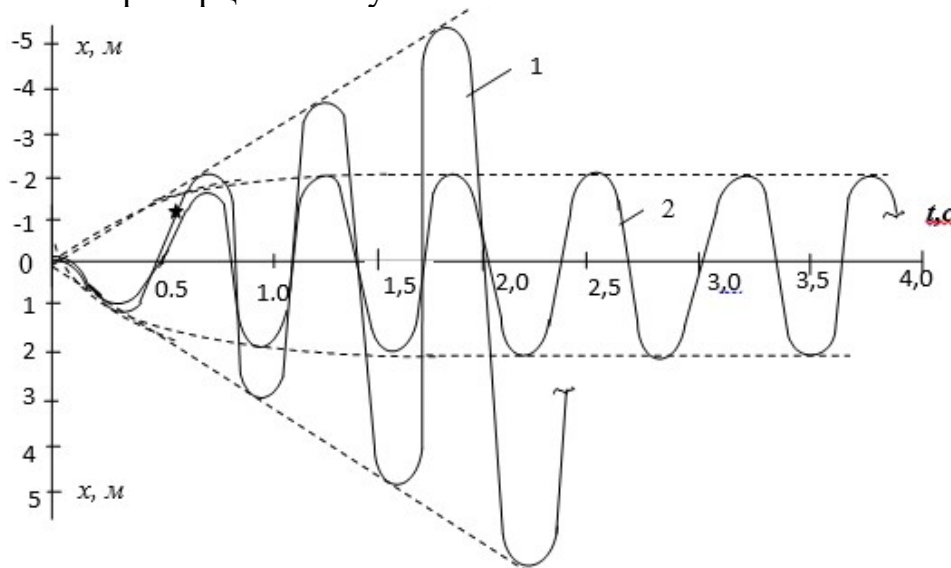


Рис. 5.4

Порівняємо аналітичний і комп'ютерний розв'язки при $t_1 = 0,5$ с. Згідно з (5.10)

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,06 \cos 4,94 + 0,277 \sin 4,94 - 2,88 \cdot 0,5 \cos 4,94 = \\ &= 0,06 \cdot 0,27 + 0,277 \cdot (-0,955) - 1,44 \cdot 0,27 = -0,669 \text{ м.} \end{aligned}$$

Значення x_1 добре узгоджується з рішенням, отриманим стандартною комп'ютерною програмою (рис. 5.4, де ордината x_1 помічена зіркою «*»).

Дослідимо вимушені коливання тіла на резонансній частоті при опорі, який пропорційний першій степені швидкості (схема діючих сил показано на рис. 5.3). Розв'язок диференціального рівняння (5.7) відповідає формулам (5.8) або (5.9).

На рис. 5.4 лінія 2 – графік зміни координати x з часом, який відповідає рішенням, отриманим стандартною комп'ютерною програмою. З рисунку видно, що протягом часу $t \approx 2,5$ с амплітуда коливань постійно збільшується, а далі залишається постійною (за час t вільні коливання практично загасають).

При $t > 2,5$ с відбуваються коливання, що встановилися з постійною амплітудою і частотою $\omega = k = 9,89 \text{ с}^{-1}$.

Приклад. Визначення амплітудних і фазочастотних характеристик

Побудуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) досліджуваної системи, використовуючи формулу

$$\alpha_{\partial} = \frac{D}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]^2 + 4h^2\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}}, \quad (5.12)$$

де α_{∂} – коефіцієнт динамічності.

На рис. 5.5 наведені залежності α_{∂} від співвідношення частот $\frac{\omega}{k}$ при $\beta = 0$ (лінія 1) і $\beta = 0,738 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ (лінія 2). Як видно, на інтервалах $\frac{\omega}{k} < 0,8$ і $\frac{\omega}{k} > 1,2$ приведені залежності практично не відрізняються один від одного, тобто, в зазначених межах опір майже не впливає на амплітуду вимушених коливань. При частотах, близьких до резонансної частоти (інтервал $0,8 < \frac{\omega}{k} < 1,2$), опір значно впливає на амплітуду вимушених коливань. Так, у разі відсутності опору ($\beta = 0$) і $\frac{\omega}{k} = 1$ амплітуда коливань може наростати до нескінченності (лінія 1 на рис. 5.5).

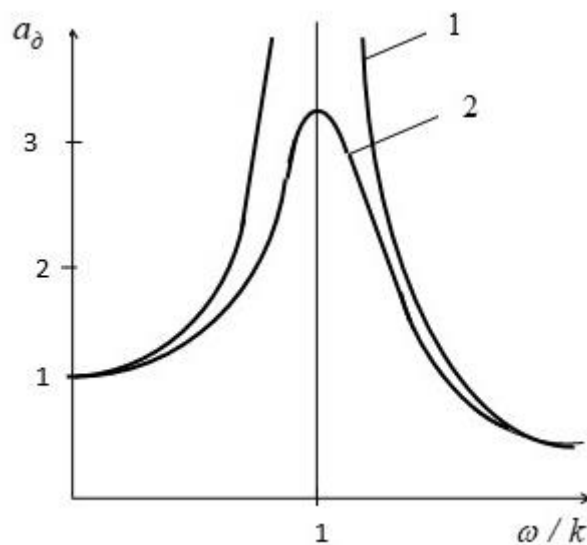


Рис. 5.5

При $\beta \neq 0$ амплітуда коливань D (у випадку $\frac{\omega}{k} = 1$) може також приймати великі значення, але кінцевої величини (лінія 2).

Відповідно до лінії 2 (рис. 5.5) при $\frac{\omega}{k} = 1$ відношення $\frac{D}{\lambda_0} = 4,1$. Звідси $D = 4,1 \cdot \lambda_0 = 4,1 \cdot 0,6 = 2,46$. З графіка також видно, що при $\frac{\omega}{k} > 1,4$ відношення $\frac{D}{\lambda_0} < 1$. Це говорить про те, що амплітуда D в цій області менше $\lambda_0 = 0,6$ м.

Для даної системи при $\frac{\omega}{k} \approx 3$ відношення дорівнює $\frac{D}{\lambda_0} = 0,12$. Звідси $D = 0,12 \cdot 0,6 = 0,072$ м, що відповідає розв'язку на ділянці $t = 2,5$ с. Тут амплітуда вимушених коливань більш ніж у 8 разів менша λ_0 . Це говорить про те, що навіть при великих значеннях вимушеної сили $\left(\frac{F_0}{mg} = \frac{18}{3} = 6\right)$ можливо підібрати такі параметри системи c і m (відповідно і співвідношення частот $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{c}} = \sqrt{m}$), що амплітуда сталих вимушених коливань буде малою. В даному випадку $D \approx 0,07$ м такого ж порядку, як і амплітуда вільних коливань $a = 0,06$ м.

Побудуємо фазо-частотну характеристику (ФЧХ) системи, використовуючи формулу

$$\varepsilon = \arctg \frac{2h\left(\frac{\omega}{k}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}, \quad (5.13)$$

де ε – зсув між коливаннями, що встановилися, і збуреною силою.

На рис. 5.6 наведені залежності ε від співвідношення частот $\frac{\omega}{k}$ при $\beta = 0$ (лінія 1) і $\beta = 0,738 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ $\beta \neq 0$ (лінія 2).

Графік є розривною функцією $\varepsilon\left(\frac{\omega}{k}\right)$, причому при $\frac{\omega}{k} < 1$ — $\varepsilon = 0$, а при $\frac{\omega}{k} > 1$ — $\varepsilon = \pi$. У випадку $\beta \neq 0$ при резонансі зсув фаз $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, при $\frac{\omega}{k} < 1$ — $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, а при $\frac{\omega}{k} > 1$ зсув фаз ε прагне до π .

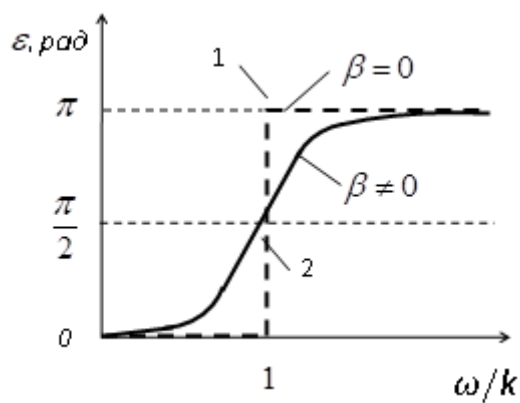


Рис. 5.6

6. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Який рух матеріальної точки називається коливальним?
2. Які коливання матеріальної точки називаються вільними?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху?
4. Який вигляд має розв'язок диференціального рівняння вільних коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху?
5. Як обчислюється амплітуда вільних коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху?
6. Як обчислюється циклічна частота та період вільних коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху?
7. Які характеристики коливального процесу (у випадку вільних коливань матеріальної точки) залежать від початкових умов задачі? Які від цих умов не залежать?
8. Які коливання матеріальної точки називаються вимушеними? Під дією яких сил вони відбуваються?
9. Який вигляд має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху, якщо збурювальна сила F змінюється за законом $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$?
10. Яке явище називається резонансом? Коли воно виникає?
11. Який вигляд має частинний розв'язок x_2 диференціального рівняння, що описує вимушені коливання матеріальної точки в середовищі без опору руху, якщо $\omega \neq k$ і $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$? Яку властивість має амплітуда вимушених коливань?
12. Який вигляд має частинний розв'язок x_2 диференціального рівняння, що описує вимушені коливання матеріальної точки в середовищі без опору руху, якщо $\omega = k$ і $F = F_0 \sin(\omega t + \delta)$? Яку властивість має амплітуда вимушених коливань?
13. Що характеризує коефіцієнт динамічності? Як він обчислюється, якщо вимушені коливання матеріальної точки в середовищі без опору руху?
14. Як впливає співвідношення частот на значення коефіцієнта динамічності та амплітуду вимушених коливань матеріальної точки в середовищі без опору руху?
15. Чи залежить амплітуда вимушених коливань матеріальної точки від початкових умов задачі? Від яких параметрів вона залежить?

В завданнях вказати правильну відповідь. Важати прискорення вільного падіння $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Завдання 1. Тіло масою $m = 2 \text{ кг}$ підвісили до кінця вертикальної пружини з коефіцієнтом пружності $c = 200 \text{ Н/м}$, в початковий момент часу пружина була недеформована і тіло відпустили без початкової швидкості. Амплітуда вільних коливань a вказаної системи дорівнює:

- 1) 0,1 м; 2) 0,2 м; 3) 0; 4) 1 м

Завдання 2. Диференціальне рівняння коливань тіла має вигляд $\ddot{x} + 25x = 0$, коефіцієнт пружності $c = 200 \text{ Н/м}$. Маса тіла m дорівнює:

- 1) 8 кг; 2) 6 кг; 3) 4 кг; 4) 2 кг

Завдання 3. Тіло масою $m = 1 \text{ кг}$ підвісили до кінця вертикальної пружини з коефіцієнтом пружності $c = 100 \text{ Н/м}$, в початковий момент часу пружина була розтягнута на 4 см і тіло відпустили без початкової швидкості. Амплітуда вільних коливань a вказаної системи дорівнює:

- 1) 0,078 м; 2) 0,098 м; 3) 0,058 м; 4) 0,048 м

Завдання 4. Диференціальне рівняння коливань тіла має вигляд $\ddot{x} + 25x = 0$, коефіцієнт пружності $c = 150 \text{ Н/м}$. Маса тіла m дорівнює:

- 1) 6 кг; 2) 30 кг; 3) 5 кг; 4) 25 кг

Завдання 5. Закон коливального руху матеріальної точки має вигляд $x = 3\cos 10t + 4\sin 10t$ (см). Амплітуда коливань a дорівнює:

- 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см; 4) 7 см

Завдання 6. Тіло масою $m = 4 \text{ кг}$ підвісили до кінця вертикальної пружини і здійснює вільні коливання з амплітудою $a = 0,5 \text{ м}$. Коливання почались з положення статичної рівноваги з початковою швидкістю $V_0 = 2 \text{ м/с}$. Жорсткість пружини c дорівнює:

- 1) 64 Н/м; 2) 48 Н/м; 3) 76 Н/м; 4) 12 Н/м

Завдання 7. Диференціальне рівняння вимушених коливань тіла має вигляд $2\ddot{x} + 32x = 20\sin 6t$. Амплітуда вимушених коливань a дорівнює:

- 1) 1 м; 2) 0,5 м; 3) -1 м; 4) -0,5 м

Завдання 8. Диференціальне рівняння вимушених коливань тіла має вигляд $2\ddot{x} + 32x = 20\sin \omega t$. При резонансі частота збурювальної сили ω дорівнює:

- 1) 16 рад/с; 2) 32 рад/с; 3) 4 рад/с; 4) 20 рад/с

Завдання 9. Статична деформація пружини становить 20 см. Період власних коливань T матеріальної точки дорівнює:

- 1) 1,55 с; 2) 0,438 с; 3) 0,888 с; 4) 0,333 с

Завдання 10. Диференціальне рівняння вимушених коливань тіла має вигляд $3\ddot{x} + 48x = 10\sin 4t$. Його частинний розв'язок має вигляд:

- 1) $x_2 = D \cos 4t$; 2) $x_2 = D \sin 4t$; 3) $x_2 = D^* t \cos 4t$; 4) $x_2 = D^* t \sin 4t$

Завдання 11. Тіло масою $m = 10$ кг здійснює вільні вертикальні коливання на пружині жорсткістю $c = 100$ Н/м з амплітудою $a = 0,1$ м з положення статичної рівноваги. Початкова швидкість V_0 дорівнює:

- 1) 0,316 м/с; 2) 0,421 м/с; 3) 0,212 м/с; 4) 0,842 м/с

Завдання 12. Диференціальне рівняння вертикальних коливань тіла має вигляд $\ddot{x} + 16x = 12\sin(6t + 0,2)$, максимальне значення збурювальної сили $F_0 = 96$ Н. Коефіцієнт жорсткості пружини c дорівнює:

- 1) 128 Н/м; 2) 422 Н/м; 3) 296 Н/м; 4) 12 Н/м

Завдання 13. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд $\ddot{x} + 16x = 50\sin(8t + 0,4)$. Коефіцієнт динамічності α_d дорівнює:

- 1) 0,248; 2) 0,333; 3) 0,433; 4) 0,122

Завдання 14. Тіло масою $m = 20$ кг підвісили до вертикальної пружини з коефіцієнтом пружності $c = 20$ Н/м. Період його вільних коливань T дорівнює:

- 1) 6,28 с; 2) 0,15 с; 3) 3,49 с; 4) 1,00 с

Завдання 15. Диференціальне рівняння вимушених коливань тіла має вигляд $3\ddot{x} + 36x = 2\sin 12t$. Амплітудне значення збурювальної сили F_0 дорівнює:

- 1) 12 Н; 2) 2 Н; 3) 3 Н; 4) 6 Н

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Янгулова О. Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка : навч. посіб. Дніпро : Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. ак. В. Лазаряна, 2019. 75 с.
2. Теоретична механіка : підручник / І. В. Кузько та ін. Харків : Фолія, 2017. 576 с.
3. Теоретична механіка : навч. посіб. / В. І. Векерик та ін. Івано-Франківськ : Факел, 2006. 459 с.
4. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник. Київ : Техніка, 2002. 512 с.
5. Теоретична механіка : метод. рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи на тему «Динаміка матеріальної точки» / уклад.: О. Л. Янгулова, Л. О. Недужа. Дніпро : Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2023. 33 с.
6. Теоретична механіка. Збірник задач / О. С. Апостолук та ін. ; за ред. М. А. Павловського. Київ : Техніка, 2007. 400 с.
7. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка : підручник : у 2 ч. Київ : Знання, 2004. Ч. 2 : Динаміка. 590 с.
8. Теоретична механіка : розділ «Динаміка» : методичні вказівки до виконання курсової роботи / уклад. О. Л. Янгулова. Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2015. 42 с.
9. Мямлін С. В., Янгулова О. Л. Теоретична механіка. Збірник задач з прикладами розв'язання із розділу «Динаміка точки та системи». Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2004. 32 с.
10. Янгулова О. Л., Колбун В. В. Методичні вказівки до виконання розрах.-граф. робіт з дисципліни «Теоретична механіка» розділ «Динаміка». Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2015. 48 с.
11. Теоретична механіка. Розділ «Динаміка точки» : метод. вказ. та завдання для самост. підготов. студентів до тест. контролю / уклад.: Л. Г. Маслєєва та ін. Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2012. 39 с.
12. Буров В. С. Теоретична механіка : метод. вказ. та приклади розв'язування задач. Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2008. 39 с.
13. Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка : метод. вказ. до виконання РГР для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / уклад. В. Г. Савін та ін. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 35 с.
14. Комп'ютерне моделювання залізничних транспортних засобів : метод. вказ. до виконання практ. робіт, курс. та диплом. проектування / уклад.: М. І. Капіца, та ін. Дніпро : Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2018. 59 с.

Інформаційні ресурси

15. Дистанційний курс «Теоретична механіка». Український державний університет науки і технологій. URL: <http://lider.diit.edu.ua> (дата звернення: 18.04.2024)
16. Наукова бібліотека УДУНТ: Електронна бібліотека. URL: <https://library.ust.edu.ua/uk/catalog> (дата звернення: 18.04.2024)

Навчально-методичне видання

Янгулова Ольга Леонідівна,
Недужа Лариса Олександрівна

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ**

навчально-методичні рекомендації
до практичних занять

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка Л. О. Недужа

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 723 від 04.06.2024 р.)

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,88.
Зам. № 49

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010