Питання прикладної математики і математичного моделювання. Д., 2014

УДК 519.8

В.М. Богомаз
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто проблему побудови ефективних регуляризаторів в одному класі задач оптимізації механічних систем. Запропоновано спосіб апроксимації таких регуляризаторів у нерефлексивних просторах.

Рассмотрена проблема построения эффективных регуляризаторов в одном классе задач оптимизации механических систем. Предложен способ аппроксимации таких регуляризаторов в нерефлексивных пространствах.

The paper is sanctified to the problem of search of effective regularizators in one class of optimization problem of the mechanical systems. The method of approximation such regularizators in non-reflexive spaces is proposed.

Ключові слова: регуляризатор, апроксимація, нерефлексивні простори.

Вступ. Як відомо, динаміка багатьох механічних процесів та об’єктів описується системами звичайних диференціальних рівнянь. Для визначення ефективних режимів протікання таких процесів та функціонування динамічних об’єктів широко залучаються задачі оптимального керування з нескалярним показником якості. Серед такого класу задач особливе місце займають ті, в яких цільове відображення діє в нескінченновимірний простір, наявні обмеження на керування та фазові змінні. За таких умов не можна однозначно стверджувати факт існування ефективних розв’язків. В якості способу доведення існування та побудови ефективних розв’язків у роботі [1] запропоновано залучати ефективні (Λ, μ)-регуляризатори обмежень. У результаті здійснення такого підходу розв’язується сімейство задач векторної оптимізації зі штрафом. У роботі [1] запропоновано загальну схему побудови регуляризаторів такого типу в задачах векторної оптимізації, розв’язки яких є елементами рефлексивних просторів, що в деякій мірі спрощувало процедуру побудови «штрафної» складової цільового відображення.

Основною метою цієї роботи є дослідження питання побудови ефективних регуляризаторів у класі задач векторної оптимізації, які означені на нерефлексивних просторах, та створення алгоритму апроксимації регуляризаторів для конкретних типів обмежень, які найчастіше зустрічаються в практичних задачах.

Основні поняття та постановка задачі. Нехай керування системи є елементами простору $U = L^1(0,T;R^m)$ та функції зміни станів системи належать до класу $X = W^{1,1}(0,T;R^n)$. Позначимо через τ добуток слабкої топології в $L^1(0,T;R^m)$ та топології рівномірної збіжності в $W^{1,1}(0,T;R^n)$. Динаміка розглянутого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь I-го порядку з початковими умовами $x_0 \in R^n$. Якість роботи такого об'єкта оцінюється цільовим відображенням $I : U \times X \to Z$, яке має властивість $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервності знизу. Будемо вважати, що простір образів цільового відображення $Z = L^1(0,T)$ наділений слабкою топологією μ та частково впорядкований конусом невід'ємних елементів $\Lambda = \left\{ f \in L^1(0,T) \mid f(t) \ge 0 \text{ } м.с. \text{ } t \in (0,T) \right\}$.

Частковий порядок у просторі Z позначимо через $\le_\Lambda$, що означає

$$z_1 \le_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \{ \theta_Z \}.$$

Означення 1. [3] Підмножину простору $Z \cup \{\pm\infty\}$ будемо називати Λ_μ-інфімумом відображення $I : U \times X \to Z$ та позначати $\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x)$, якщо вона є ефективним Λ_μ-інфімумом образу $I(\Xi)$, тобто

$$\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x) = \begin{cases} \min(cl_\mu I(\Xi)), & \min(cl_\mu I(\Xi)) \ne \varnothing, \\ \{-\infty\}, & \min(cl_\mu I(\Xi)) = \varnothing, \end{cases}$$

де $cl_\mu I(\Xi)$ – μ-замикання образу цільового відображення $I(\Xi)$.

Нехай $\{I(u_k, x_k)\}_{k\in N}$ – довільна послідовність в Z. Позначимо через $L^\mu\{I(u_k, x_k)\}$ множину всіх μ-граничних точок цієї послідовності. Нехай $(u^0, x^0) \in U \times X$ – деякий фіксований елемент, визначимо множину

$$L^{\tau\times\mu}(I,(u^0,x^0))=\bigcup_{\{(u_k,x_k)\}_{k=1}^{\infty}\in\Theta_\tau(u^0,x^0)} L^{\mu}\{I(u_k,x_k)\},$$

де $\Theta_\tau(u^0,x^0)$ – сукупність усіх послідовностей $\{(u_k,x_k)\}\subset U\times X$ таких, що $(u_k,x_k)\xrightarrow{\tau}(u^0,x^0)$ в $U\times X$.

Означення 2. [3] Відображення $I:U\times X\to Z$ називається $(\Lambda,\tau\times\mu)$-напівнеперервним знизу в точці (v,y), якщо виконується умова:

$$I(v,y)\in\liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(v,y)} I(u,x),$$

де $\liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(v,y)} I(u,x)=\begin{cases}L_{\min}^{\tau\times\mu}(I,(v,y)), & L_{\min}^{\tau\times\mu}(I,(v,y))\neq\varnothing;\\ \inf^{\Lambda,\mu} L^{\tau\times\mu}(I,(v,y)), & L_{\min}^{\tau\times\mu}(I,(v,y))=\varnothing;\end{cases}$

$$L_{\min}^{\tau\times\mu}(I,(v,y))=L_{\min}^{\tau\times\mu}(I,(v,y))\cap\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi} I(u,x).$$

Математичною моделлю задачі визначення ефективних режимів роботи такої системи є задача векторної оптимізації з фазовими обмеженнями:

$$I(u,x)\longrightarrow\inf^{\Lambda,\mu}, \tag{1}$$

$$\dot{x}=f(t,u,x) \text{ на } (0,T), \tag{2}$$

$$u\in U_\partial, \tag{3}$$

$$x(0)=x_0, \tag{4}$$

$$F(u,x)\leq_\Lambda \theta, \tag{5}$$

$$x\in K, \tag{6}$$

де $F:U\times X\to Z$ – задане нелінійне відображення, θ – нульовий елемент в $L^1(0,T)$, система (2) – (4) має такі властивості:

1) $f(t,u,x)=a(t,x)+b(t,x)u$;

2) відображення $a:(0,T)\times R^n\to R^n$ та $b:(0,T)\times R^n\to R^m$:

a) є вимірними за Лебегом відносно t для будь-яких x;

b) є неперервними за x для майже всіх $t\in(0,T)$;

c) існують такі функції $\alpha,\beta\in L^1(0,T)$ та константи $c,d>0$, що для будь-яких $x_1,x_2\in R^n$ виконуються такі нерівності:

$$\left\|a(t,x_1)-a(t,x_2)\right\|_{P^n} \le \alpha(t)\left\|x_1-x_2\right\|_{P^n},\ \left\|a(t,0)\right\|_{P^n} \le \beta(t),$$
$$\left\|b(t,x_1)-b(t,x_2)\right\|_{P^n} \le c\left\|x_1-x_2\right\|_{P^n},\ \left\|b(t,0)\right\|_{P^n} \le d.$$

Нехай надалі U_∂ є слабко компактною підмножиною простору $L^1(0,T;R^m)$ (умови слабкої компактності встановлює теорема Данфорда–Петтіса [4]), K є замкненою відносно топології рівномірної збіжності множиною в $W^{1,1}(0,T;R^n)$. Означимо таку множину допустимих пар:

$$\Xi=\left\{(u,x)\in U\times X \mid \dot{x}=f\left(t,u,x\right), u\in U_\partial,\ x(0)=x_0, x\in K, F(u,x)\le_\Lambda \theta\right\}. \quad (7)$$

Як було показано в роботі [1] для розв'язування подібних задач доречно залучати поняття ефективного (Λ,μ)-регуляризатора. У зв'язку з цим множину Ξ запропоновано представити як перетин двох множин Ξ_1 (включає обмеження (2) – (5)) та K таких, що задача (1) – (5) є регулярною, та розглянути послідовність задач векторної оптимізації зі штрафом:

$$I_\varepsilon\left(u,x\right)=I\left(u,x\right)+\varepsilon^{-1}\beta\left(u,x\right)\longrightarrow \inf\nolimits^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi_1}, \qquad (8)$$

де $\varepsilon>0$ – параметр штрафу, $\beta: U\times X\to Z$ – відображення, яке задовольняє умовам: $\beta(u,x)=\theta$ для всіх $(u,x)\in\Xi$ та $\beta(u,x)>_\Lambda \theta$ для всіх $(u,x)\notin K$.

Означення 3. [3] При фіксованому $\varepsilon>0$ пара $(u^*,x^*)\in\Xi_1$ називається (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (8), якщо виконується умова $(I_\varepsilon(u^*,x^*)-\Lambda)\cap cl_\mu I_\varepsilon(\Xi_1)=\{I_\varepsilon(u^*,x^*)\}$.

Означення 4. [1] Пару $(u^*,x^*)\in\Xi_1$ будемо називати (Λ,μ)-регуляризатором множини K, якщо виконується умова: $\beta(u^*,x^*)\in\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi_1}\beta(u,x)$. Позначимо сукупність всіх (Λ,μ)-регуляризаторів множини K через Δ.

Означення 5. [1] (Λ,μ)-регуляризатор $(\tilde{u},\tilde{x})\in\Xi_1$ множини K будемо називати ефективним, якщо виконується умова $I(\tilde{u},\tilde{x})\not\geq_\Lambda I(u,x),\ \forall(u,x)\in\Delta$.

Слід зауважити, що найчастіше в практичних задачах оптимального керування зустрічаються фазові обмеження такого вигляду:

а) $K_1=\left\{x\in X \mid x(t)\ge c\ \text{м.с. на}\ (0,T)\right\}$, c – задане число;

b) $K_2 = \left\{ x \in X \mid \alpha(t) \le x(t) \le \gamma(t) \ \textit{на} \ (0,T) \right\}$, $\alpha, \gamma \in W^{1,1}(0,T;R^n)$;

c) $K_3 = \left\{ x \in X \mid \left\| x - y \right\|_Y \le \delta \ \textit{на} \ \Omega \subset (0,T) \right\}$, де Y – лінійний нормований простір такий, що $X \subset Y$, $\delta > 0$ – задана константа, Ω – довільний заданий інтервал відрізку $(0,T)$, $y \in Y$ – заданий фіксований елемент;

d) $K_4 = \left\{ x \in X \mid \left| G(x) - G^* \right| \le \eta \right\}$, де Q – лінійний нормований простір такий, що $Q \subset Z$; $G : X \to Q$ – заданий оператор; $\eta, G^* \in Q$ – задані розподілення.

У роботі [3] показано, що за зроблених вище припущень множина Ξ_1, яка включає обмеження (2)-(5) є τ-компактною в просторі $U \times X$.

Існування регуляризатору в означеному класі задач. У роботі [1] доведено результат, який торкається існування ефективних (Λ, μ)-регуляризаторів за умови, що відображення $\beta(u,x)$ є секвенційно напівнепрервним знизу відносно відповідних топологій. Встановимо факт існування ефективних (Λ, μ)-регуляризаторів у задачі (1)–(6), коли відображення $\beta(u,x)$ має більш слабку властивість, зокрема, $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервністю знизу.

Теорема 1. Нехай множина Ξ_1 є τ-компактною в $U \times X$ та відображення $\beta(u,x)$, $I(u,x)$ є $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервними знизу. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ задача (8) має непорожню множину (Λ, μ)-ефективних розв'язків, якщо виконується умова: $\left\{ \beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \right\} = \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x) \xrightarrow{\tau} (u_\varepsilon, x_\varepsilon)} \beta(u,x)$.

Доведення. За аналогією з доведенням теореми 3.2 у роботі [2], маємо: відображення $I_\varepsilon(u,x)$ є обмеженим на множині Ξ_1 при кожному $\varepsilon > 0$.

Нехай ξ є довільним елементом $\inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x) \in \Xi_1} I_\varepsilon(u,x)$. Тоді існує послідовність $\left\{ (u_k, x_k) \right\} \subset \Xi_1$ така, що $I_\varepsilon(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi$ в $L^1(0,T)$ при $k \to \infty$. Із τ-компактності множини Ξ_1 випливає існування допустимої пари $(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Xi_1$ такої, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Таким чином, $\xi \in L^{\tau\times\mu}\left(I_\varepsilon, (u_\varepsilon, x_\varepsilon)\right)$, звідки випливає співвідношення

$$L^{\tau\times\mu}\left(I_\varepsilon, (u_\varepsilon, x_\varepsilon)\right) \cap \inf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi_1} I_\varepsilon(u,x) \neq \varnothing .$$

За попередніми припущеннями відображення $\beta(u,x)$ є $(\Lambda, \tau\times\mu)$-напівнеперервним знизу, отже, воно задовольняє властивості

$$\beta(\tilde{u},\tilde{x}) \in \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(\tilde{u},\tilde{x})} \beta(u,x), \quad \forall (\tilde{u},\tilde{x}) \in \Xi_1 .$$

Тому $\varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \not>_\Lambda \eta, \ \forall \eta \in L^{\tau\times\mu}\left(\varepsilon^{-1}\beta, (u_\varepsilon, x_\varepsilon)\right)$.

Враховуючи початкові припущення, при $k \to \infty$ маємо

$$I(u_k, x_k) + \varepsilon^{-1}\beta(u_k, x_k) = I_\varepsilon(u_k, x_k) \xrightarrow{\mu} \xi \text{ в } L^1(0,T).$$

Покажемо, що виконується співвідношення

$$\xi \not<_\Lambda a + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon), \ \forall a \in \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u_\varepsilon,x_\varepsilon)} I(u,x). \qquad (9)$$

Для цього припустимо, що це не так. Отже, існує елемент $a^* \in \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u_\varepsilon,x_\varepsilon)} I(u,x)$ такий, що виконується умова

$$\xi \leq_\Lambda a^* + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon). \qquad (10)$$

У цьому випадку елемент ξ має подання

(i) $\xi = a_1 + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$;

(ii) $\xi = a_2 + \varepsilon^{-1}\zeta$, $\zeta \in L^{\tau\times\mu}\left(\beta, (u_\varepsilon, x_\varepsilon)\right)$.

Розглянемо випадок (i). Тоді виконується співвідношення $a_1 + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq_\Lambda a^* + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \Rightarrow a_1 \leq_\Lambda a^*$, але це суперечить умові $a^* \in \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u_\varepsilon,x_\varepsilon)} I(u,x)$.

Розглянемо випадок (ii), тоді

$$a_2 + \varepsilon^{-1}\zeta \leq_\Lambda a^* + \varepsilon^{-1}\beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \Rightarrow a_2 + \varepsilon^{-1}\left(\zeta - \beta(u_\varepsilon, x_\varepsilon)\right) \leq_\Lambda a^*. \qquad (11)$$

Другий доданок лівої частини співвідношення задовольняє одній з трьох умов:

1) $\left(\zeta-\beta\left(u_\varepsilon,x_\varepsilon\right)\right)\in\Lambda$, тоді $a_2\le_\Lambda a^*$, що суперечить умові $a^*\in\liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u_\varepsilon,x_\varepsilon)} I(u,x)$;

2) $\left(\zeta-\beta\left(u_\varepsilon,x_\varepsilon\right)\right)\in(-\Lambda)$, тоді відображення β не задовольняє умові $(\Lambda,\tau\times\mu)$-напівнеперервності знизу;

3) випадок $\left(\zeta-\beta\left(u_\varepsilon,x_\varepsilon\right)\right)\notin\Lambda\cup(-\Lambda)$ виключається за рахунок співвідношення $\left\{\beta\left(u_\varepsilon,x_\varepsilon\right)\right\}=\liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u_\varepsilon,x_\varepsilon)}\beta(u,x)$.

Таким чином, приходимо до висновку, що нерівність (10) є хибною, тобто пара $\left(u_\varepsilon,x_\varepsilon\right)$ є (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (8) – (9) при фіксованому $\varepsilon>0$. Теорема доведена.

Залучаючи ідею доведення теореми 3.6 в роботі [2], легко довести наступне.

Теорема 2. Нехай множина Ξ_1 є τ-компактною в $U\times X$ та відображення $\beta(u,x)$, $I(u,x)$ є $(\Lambda,\tau\times\mu)$-напівнеперервними знизу. Тоді задача (1)–(6) має непорожню множину ефективних (Λ,μ)-регуляризаторів множини K.

Очевидно, що при виконанні вищезроблених припущень задача (1)–(6) задовольняє умовам теорем 1, 2. Отже, проблема побудови ефективних (Λ,μ)-регуляризаторів полягає у виборі конструкції відображення β для конкретних обмежень. Для обмежень типу a) та b) залучимо відображення типів

$$\beta(u,x)=\left|x(t)-c\right|-\left(x(t)-c\right), \tag{12}$$

$$\beta(u,x)=\left|x(t)-\alpha(t)\right|-\left(x(t)-\alpha(t)\right)+\left|\gamma(t)-x(t)\right|-\left(\gamma(t)-x(t)\right). \tag{13}$$

Очевидно, що внаслідок властивості неперервності модуля відображення β у вигляді (12) та (13) є неперервним відносно топології рівномірної збіжності в просторі $C\left(0,T;R^n\right)$, а отже, відносно τ-топології в просторі $U\times X$.

Природа обмеження c) пояснюється тим, що в деяких задачах фазова траєкторія об'єкта керування має бути близькою до заданої функції $y(t)$ на величину δ за нормою відповідного простору Y або поточково близькою на інтервалі розглянутого відрізку часу $\Omega \subset (0,T)$. Отже, обмеження K_3 може породжуватися двома типами нерівностей:

1) $\|x-y\|_Y \le \delta$, $Y = L^p\left(0,T;R^n\right)$, ($1 \le p \le \infty$);

2) $\left|x(t)-y(t)\right| \le \delta(t)$ на $\Omega \subset (0,T)$, $\delta \in Y$, $Y = L^p\left(0,T;R^n\right)$, ($1 \le p \le \infty$).

Для обмеження 1) пропонується залучити відображення типу

$$\beta(u,x) = \left(\left|\|x-y\|_{L^p\left(0,T;R^n\right)} - \delta\right| + \|x-y\|_{L^p\left(0,T;R^n\right)} - \delta\right)c, \quad (14)$$

де $c \in \Lambda$, $\forall p \in [1,\infty)$.

З неперервності вкладення простору $W^{1,1}(0,T;R^n)$ в $C(0,T;R^n)$ та властивості неперервності модуля випливає неперервність відображення β відносно топологій τ та μ у відповідних просторах. Для обмеження другого типу рекомендовано обрати неперервне відображення β вигляду

$$\beta(u,x) = \left|\left|x(t)-y(t)\right|\chi_\Omega - \delta(t)\right| + \left|x(t)-y(t)\right|\chi_\Omega - \delta(t), \quad (15)$$

де χ_Ω – характеристична функція інтервалу $\Omega \subset (0,T)$.

Фізичне значення обмеження d) пояснюється тим, що величина, яка є залежною від фазової траєкторії системи, має бути поточково близькою до заданого розподілення G^* на величину $\eta(t)$ на інтервалі розглянутого відрізку часу $\Omega \subset (0,T)$. Покладемо в якості простору Q клас функцій $L^p(0,T)$ ($1 \le p < \infty$). Нехай оператор $G: X \longrightarrow Q$ є неперервним відносно топології τ в $U \times X$ та слабкої топології $L^p(0,T)$. За цих умов для регуляризації обмеження K_4 пропонується розглянути відображення

$$\beta(u,x) = \left|\left|G(x)-G^*\right|\chi_\Omega - \eta(t)\right| + \left|G(x)-G^*\right|\chi_\Omega - \eta(t). \quad (16)$$

Зауваження 1. Відображення (16) можна залучати, якщо $Q = L^\infty(0,T)$ (у цьому випадку необхідно, щоб відображення G було неперервним відносно *-слабкої топології простору Q). Якщо обмеження K_4 породжено рівністю $G(x) = G^*$ на Ω, тоді можна використати відображення $\beta(u, x) = \left|G(x) - G^*\right| \chi_\Omega$.

Висновки. Для означеного класу задач векторної оптимізації з фазовими обмеженнями запропоновано схему апроксимації ефективних (Λ, μ)-регуляризаторів у нерефлексивних просторах, залучаючи ідеї методу штрафів. Доведено результат, який торкається існування таких регуляризаторів, якщо «штрафна» складова цільового відображення є $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервною знизу. Наведено конструкції «штрафної» складової цільового відображення для конкретних типів обмежень.

Бібліографічні посилання

1. **Богомаз В.М.** Про регуляризацію фазових обмежень в одному класі задач векторної оптимізації / В.М. Богомаз, І.В. Нечай // Системні технології. – Д.: Вид-во НМетАУ. 1(78) 2012. – С. 18–25.

2. **Богомаз В.М.** Про оптимізацію одного класу динамічних систем з фазовими обмеженнями : дис. …. канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Богомаз Володимир Миколайович. – Д., 2012. – 126 с.

3. **Богомаз В. Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями / В. Н. Богомаз, П. И. Когут // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №3. – С. 31–45.

4. **Буттацо Дж.** Одномерные вариационные принципы. Введение / Дж. Буттацо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт – Новосибирск : Науч. книга. – 2002. – 248 с.

5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В.А. Треногин – М. : Наука, 1980. – 496 с.

Надійшла до редколегії 01.02.2014