УДК 539.4

М. О. КУЗІН (ДТГО «Львівська залізниця»),
Т. М. МЕЩЕРЯКОВА (Львівська філія ДІІТу)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРІДНИХ МЕТАЛІЧНИХ СИСТЕМ

З використанням підходів термодинаміки запропоновано варіант математичної моделі механіки опису параметрів втомної міцності в процесі експлуатації. Показано зв'язок отриманих співвідношень із сучасними критеріями довговічності тіл.

Ключові слова: структурно-неоднорідна металічна система, параметри втомної міцності, термодинаміка, математичне моделювання, сучасні критерії довговічності тіл

С использованием подходов термодинамики предложен вариант математической модели механики описания параметров усталостной долговечности в процессе эксплуатации. Показана связь полученных соотношений с современными критериями долговечности тел.

Ключевые слова: структурно-неоднородная металлическая система, параметры усталостной прочности, термодинамика, математическое моделирование, современные критерии долговечности тел

With use of thermodynamic approaches the variant of mathematical model of mechanics of the description of parameters of fatigue strength while in service is offered. The connection of the obtained relationships with the modern criteria of durability of bodies is shown.

Keywords: structural non-uniform metallic system, parameters of fatigue strength, thermodynamics, mathematical simulation, modern criteria of durability of bodies

1. Вступ

Важливими проблемами сучасної інженерії є обґрунтування параметрів роботи обладнання ще на стадії його проектування, оцінка і прогноз залишкового ресурсу конструкцій з метою подовження терміну експлуатації діючих вузлів і деталей.

Особливу актуальність ці проблеми мають для об'єктів рухомого складу залізничного транспорту, які експлуатуються протягом тривалого часу [1]. Умови їх роботи характеризуються складними нестаціонарними навантаженнями різної природи, що призводить до суттєвої деградації початкових параметрів міцнісних властивостей матеріалів.

Необхідність економії ресурсів вимагає пошуку шляхів управління параметрами довговічності матеріалів вузлів залізничного транспорту з метою відновлення або максимального подовження їх експлуатаційних характеристик.

Одним із можливих шляхів прогнозування та управління ресурсом роботи деталей є метод математичного моделювання процесів знеміцнення металічних середовищ з врахуванням зовнішніх навантажень.

Зростання кількості наукових робіт присвячених цим питанням дозволяє говорити про формування нового наукового напрямку в механіці деформівного твердого тіла – механіки пошкоджуваних середовищ (МПС) [2], яка з використанням підходів фізики міцності матеріалів, металознавства проводить оцінку параметрів надійності експлуатації конструктивних елементів в умовах багатопараметричних нестаціонарних зовнішніх навантажень.

Суттєвою відмінністю методів МПС від класичних підходів є те, що процеси деформування і накопичення пошкоджуваності необхідно розглядати з врахуванням їх взаємного впливу [2].

Різноманітність сучасних підходів, критеріїв та способів оцінки довговічності металічних систем пов'язана зі складністю процесів, що відбуваються в матеріалах при зовнішніх змінних навантаженнях, та чутливістю цих процесів до різних технологічних, конструктивних та експлуатаційних факторів.

Як відмічається в роботі [3], в ніякому іншому випадку не спостерігається такої суттєвої зміни характеристик опору руйнуванню одного і того ж матеріалу в залежності від умов випробовувань як це відбувається у випадку з втомним руйнуванням.

Враховуючи складність явищ, що супроводжують зміну довговічності металічних систем, їх міцнісних параметрів в процесі експлуатації, в даній роботі пропонується підхід до моделювання зміни довговічності з позицій термодинаміки та запропонована математична модель механіки оцінки зміни цього параметру в процесі експлуатації.

2. Аналіз сучасних підходів моделювання втомної міцності металічних систем з позицій континуальної механіки

2.1. Теоретичні аспекти побудови математичних моделей. Розгляд металічної системи як багаторівневого континууму.

Одним з природних шляхів для побудови математичних моделей механіки металічних систем є використання підходів термодинаміки нерівноважних процесів та концепції твердих розчинів [4].

Приймають, що внутрішня енергія системи є функція параметрів стану і задається наступною формулою [4 – 7]:

$$dU = \delta Q + \delta A + \delta Z\ , \qquad (1)$$

де δQ – сума кількості теплоти, що передана системі; δA – сума кількості роботи, що здійснена над системою; δZ – енергія, що передається системі при обміні масою. У виразі (1) внутрішня енергія є повним диференціалом, а диференціальні форми δQ, δA, δZ – неповні диференціали (тобто не є функціями параметру стану).

Необхідно відмітити, що в деяких роботах, зокрема [8], не вважають внутрішню енергію за функцію параметрів стану.

Оскільки термін «параметри стану» можна відносити тільки до рівноважних процесів [6], для опису нерівноважних процесів будемо використовувати поняття локальної термодинамічної рівноваги, яка запропонована Лоренцом [9]: «Локальним називається об'єм, який є великим порівняно з віддаллю між молекулами і дуже малий порівняно з макроскопічними неоднорідностями середовища».

Перейдемо для екстенсивних величин до їх питомих значень, які розраховані на одиницю об'єму [5, 6]:

$$du = \delta q + \delta a + \delta z\ . \qquad (2)$$

Доповненням до рівняння (2) рівнянь балансу імпульсу, моменту імпульсу, маси, а також визначальних співвідношень (рівнянь стану), одержують повну систему рівнянь для опису конкретної термодинамічної системи.

Щоб враховувати зміну міцнісних параметрів матеріалу в часі, використаємо додаткову змінну адитивної природи «пошкоджуваність».

Вперше як об'єкт скалярної природи пошкоджуваність була введена в роботах Качанова Л. М. і Работнова Ю. М. [10], як об'єкт тензорної природи її запропонував розглядати Ільюшин О. А. [2]. На даний момент існують роботи, в яких пошкоджуваність розглядається як скалярна, векторна або тензорна величина, що може мати яку завгодно високу валентність.

Для врахування пошкоджуваності в рівняннях стану існують декілька шляхів.

Зокрема в роботі [7] вважають, що довговічність матеріалів краще зв'язувати не з характеристиками процесів, що проходять при навантаженні, а з характеристиками, що описують стан матеріалу незалежно від того, яким до нього йшли шляхом.

В роботі [2] до цього підходять по іншому і вважають, що при описі стану пошкоджуваності матеріалу через механічні параметри в основному виникають дві проблеми:

1. Як ці параметри ввести у відповідні рівняння процесів деформування і накопичення пошкоджень?

2. Як встановлювати числові значення параметрів?

При цьому розглядаються два типи мір пошкоджуваності:

- мікроскопічна, що безпосередньо пов'язана з розподілом мікродефектів (кількості, довжини, площі, об'ємів; зменшення істинної площі, що визначається геометрією, розміщенням і орієнтацією дефектів тощо);
- макроскопічна, що визначаються станом пошкоджуваності за зміною відповідних фізичних величин (пружні константи, межа текучості, межа міцності при розтягу, видовження, густина, електроопір, швидкість ультразвукових хвиль, акустична емісія тощо).

В роботі [10] вводиться тензор другого рангу $\hat{\pi}$, який є мірою пошкоджуваності матеріалу; також вважається, що поточне значення тензора $\hat{\pi}(t)$ в загальному випадку не визначається поточними значеннями деформації, температур, навіть всією передісторією їх зміни. При цьому фізичного трактування введеного параметру не подається.

Результати роботи [10] вказують на необхідність врахування пошкоджуваності, яка була в тілі в початковий момент часу $\hat{\pi}(t = t_0)$.

В роботі [11] запропоновано розширити параметри стану й ввести додаткову множину величин, що враховують внутрішню будову матеріалу, і назвати їх «внутрішні параметри стану». Характер цих параметрів і їх зміна, внаслідок прикладених до тіла зовнішніх термомеханічних впливів, визначається макроскопічним аналізом їх мікромеханізму [11]. Таким чином, в сучасних моделях матеріалів вводять нові внутрішні ступені свободи та відповідні їм характеристичні параметри, для яких необхідно встановлювати рівняння стану, кінетичні та інші співвідношення. В роботі [11] дещо формально введені «внутрішні змінні стану» $\chi^{(1)}$, $\chi_k^{(\beta)}$, $\chi_{ki}^{(\beta)}$ ($\alpha = 1,...; \beta = 1,...,\beta_M; \gamma = 1,...,\gamma_N$), які характеризують, відповідно, процеси знеміцнення структури і накопичення пошкоджень.

Необхідність врахування мікростуктурних змін при навантаженні також наведено в роботах [11, 12]: оскільки при будь-якому зовнішньому навантаженні змінюється внутрішня енергія тіла; для реальних матеріалів цей процес зумовлює зміну структури, – відбувається перехід від одного термодинамічного стану до іншого. Якщо характерний час зміни зовнішнього навантаження близький до часу переходу термодинамічної системи в новий стан, то необхідне врахування зміни структури на макрорівні [12].

Цікаві підходи до необхідності врахування будови металічних систем наведені у ґрунтовній роботі [13]. В ній, зокрема, написано, що розрахувати криву «напруження-деформації» на основі тільки мікроскопічних уявлень теорії дислокацій не вдалось ще до цього часу. Всі спроби прямого переходу від мікропідходів фізики до макропідходів механіки виявились безуспішними.

Треба шукати нетрадиційні підходи. Вони формувалися тривалий час на основі виявлення нових механізмів деформації, які розвиваються в деформівному твердому тілі на проміжному між мікро- і макромасштабному рівнях, так званому мезомасштабному рівні. Було усвідомлено деформівне тверде тіло як багаторівневу систему, в якій механізми на мікро-, мезо- і макромасштабних рівнях взаємопов'язані.

У відповідності з роботами [2, 10 – 13] постулюємо розгляд деформівного твердого тіла як багаторівневої ієрархічної системи вкладених континуумів, на кожному з яких буде використовуватись пошкоджуваність як міра – «внутрішня змінна», що описує деградацію властивостей матеріалу (табл. 1). При цьому кожну точку більш високого рівня ієрархії будемо розглядати як локальний об'єм в сенсі Паніна-Лоренца, тобто об'єм, який є великим порівняно з віддаллю між елементарними складовими на даному рівні ієрархії і дуже малий порівняно зі складовими вищого рівня ієрархії [13], пошкоджуваність в якій утворюється в результаті зміни структурних елементарних складових, появою деяких новоутворень, що призводить до порушення суцільності макрочастинки [2].

Перехід від нижнього рівня до верхнього відбувається за допомогою осереднення інформації про поведінку матеріалу на попередньому рівні за заданим критерієм.

Таблиця 1

Масштабні рівні пошкоджуваності в деформівному твердому тілі, що придатні для континуального опису

№	Масштабний рівень	Опис	Фізичне трактування пошкоджуваності (Постулювання пошкоджуваності)	Розмір рівня, м
1	Мікрорівень	Локальна неоднорідність кристалічної ґратки	Група дислокацій (Пошкоджуваність – скаляр, тензор другої валентності) [2]	$< 10^{-7}$
2	Мезорівень 1	Формування дисипативної субструктури (полоси ковзання)	Полоси ковзання (Пошкоджуваність – Тензор другої (або будь-якої) валентності) [14]	$10^{-7}...10^{-5}$
3	Мезорівень 2	Стохастичне (або направлений розподіл мікротріщин)	Мікротріщини (Пошкоджуваність – Тензор другої валентності) [10]	$10^{-4}...10^{-3}$
4	Макрорівень	Втрата стійкості об'єкту (поширення тріщини)	Пошкоджуваність – Тензор другої валентності (або скаляр) [3, 10]	$10^{-2}...10^{0}$

2.2. Постулювання пошкодженості матеріалу як «внутрішньої змінної».

Достатньо ґрунтовно пошкоджуваність, як «внутрішня змінна» матеріалу, була введена в роботі [15]. Тому використаємо цей підхід з додатковими умовами для постулювання пошкоджуваності як тензорної величини другої валентності для рівнів ієрархії Мезорівень 1, Мезорівень 2 (табл. 1).

Постулюємо існування внутрішньої змінної – тензорної величини другої валентності $\hat{\Pi}$, яка є макромірою внутрішніх структурних перетворень в матеріалі, називається пошкоджуваністю, й володіє наступними властивостями [15, 16]:

1. Об'єкт $\hat{\Pi}$ буде приймати початкові значення на інтервалі $0 \le \tau \le t$, якщо на цьому інтервалі рівні нулеві параметри навантаження;

2. Об'єкт $\hat{\Pi}$ буде функцією стану мікрочастинки, тобто однозначно визначається процесом навантаження $\hat{\sigma}(t)$, $T(t)$, $\hat{\varepsilon}(t)$. Функціонал $\hat{\Pi}(\hat{\sigma}(t), \hat{\varepsilon}(t), T(t), ...)$ приймаємо неперервним за змінними навантаження безпосередньо до стану, що передує руйнуванню.

3. Існують деякі невід'ємні міри, що називаються мірами пошкоджуваності $M_m(\hat{\Pi})$, і відповідні додатні константи C_m такі, що

- коли $M_m(\hat{\Pi}) < C_m$, то стан частинки міцний,

- коли $M_m(\hat{\Pi}) \ge C_m$ для будь-якого $m = k$, то відбувається руйнування типу k (для інших m може бути $M_m(\hat{\Pi}) < C_m$).

Додамо також додаткові умови:

1. Невід'ємні міри $M_m(\hat{\Pi})$ внутрішньої змінної дорівнюють нулю тільки тоді, коли теоретичні міцнісні властивості матеріалу рівні реальним (відхилення в сторону зменшення реальних міцнісних властивості матеріалу від теоретичних вважаємо результатом наявності мікродефектів у матеріалі).

2. Внутрішня змінна $\hat{\Pi}(t)$ в момент часу t визначається не тільки параметрами навантаження, але й швидкістю їх зміни.

Перша умова дозволяє враховувати збільшення міцнісних властивостей матеріалу спеціальними технологічними впливами (що особливо часто відбувається для поверхневих шарів); друга умова дозволяє враховувати ефекти в'язкості при навантаженні тіл, а також середовища з пам'яттю.

Аналогічно постулюємо пошкоджуваність як скалярну величину для рівнів ієрархії: Мікрорівень і Макрорівень (табл. 1).

Запишемо балансові рівняння пошкоджуваності як для тензорної, так і для скалярної величини:

– для тензорної величини:

1. $\dfrac{\partial \hat{\Pi}}{\partial t} + \vec{\nabla}_0 \cdot \hat{J}_\Pi = \hat{\sigma}_\Pi$ – рівняння балансу пошкоджуваності при можливості потоку пошкоджуваності (як тензорної величини третьої валентності). Пошкоджуваність в локальному об'ємі може змінюватись за рахунок утворення (стоку – зникнення, ефект має назву заліковування пошкоджуваності) в локальному об'ємі, так і притоку ззовні.

2. $\dfrac{\partial \hat{\Pi}}{\partial t} = \hat{\sigma}_\Pi$ – рівняння балансу пошкоджуваності при неможливості потоку пошкоджуваності. Пошкоджуваність в локальному об'ємі може змінюватись за рахунок утворення (стоку – зникнення) в локальному об'ємі, так і притоку ззовні.

– для скалярної величини:

3. $\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_\Pi = \sigma_\Pi$ – рівняння балансу пошкоджуваності при можливості потоку пошкоджуваності (як векторної величини). Пошкоджуваність в локальному об'ємі може змінюватись за рахунок утворення (стоку – зникнення) в локальному об'ємі, так і притоку ззовні.

4. $\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = \sigma_\Pi$ – рівняння балансу пошкоджуваності при неможливості потоку пошкоджуваності. Пошкоджуваність в локальному об'ємі може змінюватись за рахунок утворення (стоку – зникнення) в локальному об'ємі, так і притоку ззовні.

Величини $\vec{J}_\Pi$, $\hat{J}_\Pi$ – потік точкової (орієнтаційної) пошкоджуваності (останній випадок можна вважати «винятковим» випадком, коли переміщуються орієнтовані дефекти). Тому рівняння (1) варто розглядати скоріше як деяку математичну абстракцію «виняткового» випадку.

2.3. Запис балансових енергетичних співвідношень для деформівних систем з урахуваннях зміни їх міцнісних параметрів.

Запишемо рівняння балансу енергії при наявності розсіяного руйнування у модифікованій формі порівняно з (1)–(2) [5, 10]:

$$\frac{d}{dt}(e + u + u_*) = \nabla \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{\nu} - \vec{I}_q - \mu \vec{I}_\rho\right) + \\ + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nu} - \frac{\vec{\nu} \cdot \vec{\nu}}{2}\left(\nabla \cdot \vec{I}_\rho\right) + N_r\right), \quad (3)$$

де e – густина кінетичної енергії; u – густина внутрішньої енергії; u_* – густина енергії міцності матеріалу або «ефективної поверхневої енергії пошкоджуваного матеріалу» [10]; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{I}_q$ – локальний потік тепла; $\vec{I}_\rho$ – локальний потік маси; μ – хімічний потенціал, $\vec{F}$ – густина масових сил; $\vec{\nu}$ – вектор швидкості деформації; N_r – потужність густини розподілених джерел енергії, які безпосередньо пов'язані з руйнуванням матеріалу.

Необхідно відзначити, що рівняння (3) має безпосередній зв'язок з енергетичним співвідношенням Гріффітса, яке є базовим для механіки ізольованої тріщини, якщо прийняти $\frac{du_*}{dt}$ і N_Π за дельта-функції, що співпадають з вершиною тріщини [10].

Якщо прийняти, що пошкоджуваність може змінюватись в локальному об'ємі також за рахунок потоків [16], то рівняння (3) набуває наступного вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left(e+u+u_*\right)=\nabla\cdot\left(\hat{\sigma}\cdot\vec{\nu}-\vec{I}_q-\mu\vec{I}_\rho-\vec{I}_{E\Pi}\right)+$$

$$+\left(\vec{F}\cdot\vec{\nu}-\frac{\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}}{2}\left(\nabla\cdot\vec{I}_\rho\right)+N_r\right), \qquad (4)$$

де $\vec{I}_{E\Pi}$ – потік енергії пов'язаний з пошкоджуваністю.

3. Побудова математичної моделі механіки поведінки металічних систем в умовах зовнішніх навантажень з врахуванням зміни їх міцнісних властивостей в часі

3.1. Запис балансових рівнянь та визначальних співвідношень.

Запишемо балансові рівняння для явищ теплової, механічної, хімічної природи [4, 6, 7].

Рівняння балансу маси:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV=-\int_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{I}_\rho d\Sigma\,, \qquad (5)$$

де $\vec{I}_\rho$ – потік маси; $\vec{n}$ – нормаль до поверхні.

Рівняння балансу ентропії:

$$\frac{d}{dt}\int_V s dV=-\int_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{I}_s d\Sigma+\int_V \sigma_s dV\,, \qquad (6)$$

де $\vec{I}_s$ – потік ентропії; σ_s – потужність джерела ентропії.

В припущенні безмоментної теорії пружності запишемо рівняння балансу кількості руху:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{\nu}dV=\int_\Sigma\left(\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\right)d\Sigma+\int_V\left(\vec{F}-\vec{v}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{I}_\rho\right)\right)dV\,. \qquad (7)$$

Рівняння балансу енергії з врахуванням енергії зміни пошкоджуваності в матеріалі буде мати вигляд (4).

Із врахуванням співвідношень (5)–(7) рівняння (4) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\hat{\sigma}\cdot\cdot\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)+T\frac{\partial s_0}{\partial t}+\mu\frac{\partial\rho_0}{\partial t}-\sigma_S T-$$

$$-\left(\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot\vec{I}_S-\left(\vec{\nabla}_0\mu\right)\cdot\vec{I}_\rho+\left(N_r-\frac{\partial u_*}{\partial t}-\vec{\nabla}_0\cdot\vec{I}_{E\Pi}\right). \qquad (8)$$

Проаналізуємо рівняння (8) у випадку скалярної пошкоджуваності.

Для цього у відповідність величині Π поставимо спряжену величину Ψ, яка характеризує реакцію матеріалу на змінну Π. В результаті отримаємо наступні співвідношення:

$$\vec{I}_{E\Pi}=\Psi\vec{I}_\Pi\,; \qquad (9)$$

$$N_r=\Psi\sigma_\Pi\,. \qquad (10)$$

В результаті рівняння (8) буде мати наступну форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\hat{\sigma}\cdot\cdot\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)+T\frac{\partial s_0}{\partial t}+\mu\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\left(\Psi\frac{\partial\Pi}{\partial t}-\frac{\partial u_*}{\partial t}\right)-$$

$$-\sigma_S T-\left(\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot\vec{I}_S-\left(\vec{\nabla}_0\mu\right)\cdot\vec{I}_\rho-\left(\vec{\nabla}_0\Psi\right)\cdot\vec{I}_\Pi\,. \qquad (11)$$

Від рівняння (11), з врахуванням принципу локальної термодинамічної рівноваги, перейдемо до:

$$du=\hat{\sigma}\cdot\cdot d\hat{V}+Tds+\mu d\rho+\left(\Psi d\Pi-du_*\right); \qquad (12)$$

$$\sigma_s=-\frac{1}{T}\left(\left(\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot\vec{I}_S+\left(\vec{\nabla}_0\mu\right)\cdot\vec{I}_\rho+\left(\vec{\nabla}_0\Psi\right)\cdot\vec{I}_\Pi\right). \qquad (13)$$

Якщо прийняти, що пошкоджуваність є тензорна величина другої валентності, отримаємо [16]:

$$du=\hat{\sigma}\cdot\cdot d\hat{V}+Tds+\mu d\rho+\left(\hat{\Psi}\cdot\cdot d\hat{\Pi}-du_*\right); \qquad (14)$$

$$\sigma_s=-\frac{1}{T}\left(\left(\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot\vec{I}_S+\left(\vec{\nabla}_0\mu\right)\cdot\vec{I}_\rho+\left(\vec{\nabla}_0\otimes\Psi\right)\cdot\cdot\cdot\vec{I}_\Pi\right). \qquad (15)$$

Як видно, внутрішня енергія (12) або (14) є функцією наступних параметрів s, $\hat{V}$, ρ, $\hat{\Pi}$, u_*:

$$u=u\left(s,\hat{V},\rho,\hat{\Pi},u_*\right). \qquad (16)$$

За допомогою співвідношення

$$f=-u+Ts+\mu\rho+\Psi\Pi+u_* \qquad (17)$$

отримаємо:

$$df=\hat{V}\cdot\cdot d\hat{\sigma}+sdT+\rho d\mu+\Pi d\Psi+du_*\,. \qquad (18)$$

Якщо функції u або f є заданими, то можна записати визначальні рівняння стану локальної термодинамічної рівноваги як зв'язки між відповідними екстенсивними та інтенсивними параметрами:

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \hat{V}} = \hat{\sigma}\left(s, \hat{V}, \rho, \hat{\Pi}, u_*\right); \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} = T\left(s, \hat{V}, \rho, \hat{\Pi}, u_*\right); \\ \mu = \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \mu\left(s, \hat{V}, \rho, \hat{\Pi}, u_*\right); \\ \hat{\Psi} = \dfrac{\partial u}{\partial \hat{\Pi}} = \hat{\sigma}\left(s, \hat{V}, \rho, \hat{\Pi}, u_*\right) \end{cases} \tag{19}$$

або

$$\begin{cases} \hat{V} = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} = \hat{V}\left(T, \hat{\sigma}, \mu, \hat{\Psi}, u_*\right); \\ s = \dfrac{\partial f}{\partial T} = s\left(T, \hat{\sigma}, \mu, \hat{\Psi}, u_*\right); \\ \rho = \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = \rho\left(T, \hat{\sigma}, \mu, \hat{\Psi}, u_*\right); \\ \hat{\Pi} = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\Psi}} = \hat{\Pi}\left(T, \hat{\sigma}, \mu, \hat{\Psi}, u_*\right). \end{cases} \tag{20}$$

4. Аналіз отриманих термодинамічних співвідношень

4.1. Зв'язок побудованих рівнянь з критеріями довговічності металічних тіл.

В сучасній механіці деформівного твердого тіла для розрахунку довговічності матеріалу найчастіше використовуються деформаційні і енергетичні критерії [3], при цьому роботу конкретних деталей найчастіше оцінюють з врахуванням силового навантаження.

Тому розглянемо співвідношення (4) – (19) в спрощеній постановці з врахуванням тільки силової складової, нехтуючи явищами теплової та дифузійної природи.

Тоді системи (18) і (19) трансформуються у наступні рівняння:

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \hat{V}} = \hat{\sigma}\left(\hat{V}, \hat{\Pi}, u_*\right); \\ \hat{\Psi} = \dfrac{\partial u}{\partial \hat{\Pi}} = \hat{\sigma}\left(\hat{V}, \hat{\Pi}, u_*\right), \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \hat{V} = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} = \hat{V}\left(\hat{\sigma}, \hat{\Psi}, u_*\right); \\ \hat{\Pi} = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\Psi}} = \hat{\Pi}\left(\hat{\sigma}, \hat{\Psi}, u_*\right). \end{cases} . \tag{22}$$

Як видно з системи (20), напружений стан в тілі залежить як від деформацій, так і від пошкоджуваності. Утворення пошкоджуваності в тілі визначається насамперед його напружено-деформованим станом (21), а також міцнісними параметрами матеріалу тіла.

Зокрема, якщо прийняти, що друге рівняння системи (21) має вид:

$$\hat{\Pi}(t) = g(\hat{\sigma})t, \tag{22}$$

що відповідає лінійному закону сумування пошкоджуваності.

Велику кількість експериментальних залежностей довговічності матеріалу від умов навантажень, при використанні енергетичних критеріїв утворення пошкоджуваності оцінюють як втрату енергії на непружне деформування під час зовнішніх навантажень.

Це, зокрема, добре ілюструється за допомогою співвідношення (8) без врахування процесів несилового походження:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(N_r - \frac{\partial u_*}{\partial t}\right) = \hat{\sigma} \cdot\cdot \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right), \tag{23}$$

коли енергія зовнішнього навантаження витрачається не тільки на зміну внутрішньої енергії системи, але й на зміну міцнісних параметрів тіла.

5. Висновки

В роботі проаналізовано сучасний стан математичного моделювання опису зміни міцності металічних систем під час зовнішніх навантажень.

З використанням уявлень про ієрархічну континуальну багатовимірність процесів, що проходять при деградації властивостей матеріалів, запропоновано підхід до побудови математичних моделей на основі уявлень нерівноважної термодинаміки.

Проаналізовано одержані співвідношення та встановлено їх зв'язок із сучасними критеріями оцінки довговічності металічних тіл.

Запропоновані в роботі підходи можуть бути використані для розрахунку і управління довговічністю деталей залізничного транспорту.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дефекти залізничних коліс [Текст] : монографія / І. О. Вакуленко [та ін.]. – Д.: Вид-во Маковецький, 2009. – 112 с.
2. Волков, И. А. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями [Текст] /

А. И. Волков, Ю. В. Коротких. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
3. Прочность материалов и конструкций [Текст] : серия монографий / под общ. ред. В. Т. Трощенко. – К.: Ин-т проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины. – Т. 2. Усталость металлов. Влияние состояния поверхности и контактного взаимодействия / В. Т. Трощенко [и др.]. – 2009. – 664 с.
4. Фізико-математичне моделювання складних систем [Текст] / під ред. Я. Й. Бурака. – Львів: Сполом, 2004. – 264 с.
5. Седов, Л. И. Механика сплошной среды [Текст] / Л. И. Седов. – т. 2. – М.: Наука, 1970. – 568 с.
6. Подстригач, Я. С. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах [Текст] / Я. С. Подстригач, Ю. З. Повстенко. – К.: Наук. думка, 1985. – 200 с.
7. Третьяченко, Г. Н. Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях [Текст] / Г. Н. Третьяченко, Б. С. Карпинос. – К.: Наук. думка, 1990. – 256 с.
8. Терегулов, И. Г. Термодинамика необратимых процессов и теоретические основы построения определяющих соотношений для сплошных сред [Текст] / И. Г. Терегулов // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1995. – № 4 (395). – С. 82-95.
9. Агеев, Е. П. Неравновесная термодинамика в вопросах и ответах [Текст] / Е. П. Агеев. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 136 с.
10. Кондауров, В. И. Основы термомеханики конденсированной среды [Текст] / В. И. Кондауров, В. Е. Фортов. – М.: МФТИ, 2002. – 336 с.
11. Кувыркин Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении [Текст] / Г. Н. Кувыркин. – М.: МГУ, 1993. – 142 с.
12. Зарубин, В. С. Математические модели термомеханики [Текст] / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
13. Панин, В. Е. Физическая мезомеханика: достижения за два десятилетия развития, проблемы и перспективы [Текст] / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, С. Г. Псахье // Физическая мезомеханика. – 7-й спец. вып., ч. 1 (2004). – 2004. – С. 25-40.
14. Мурамаки, С. Математическая модель трехмерного изотропного состояния поврежденности [Текст] / С. Мурамаки, Ю. Н. Радаев// Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 93-110.
15. Ильюшин, А. А. Об одной длительной прочности [Текст] / А. А. Ильюшин // Инж. журн. «Механика твердого тела». – 1967. – № 3. – С. 21-35.
16. Кузін, М. О. Використання підходів термодинаміки для континуального опису зміни довговічності металічних систем в умовах зовнішніх навантажень [Текст] / М. О. Кузін // Українська акад. друкарства. Наук. записки. Наук.-техн. збірник. – 2010. – № 2 (52). – С. 123-130.

Надійшла до редколегії 18.01.2011.
Прийнята до друку 25.01.2011.