УДК 517.5

Ю. А. Бабич, Т. Ф. Михайлова (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. транспорта)

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

For periodic functions of many variables, the method of their approximation is offered in the Orlicz spaces $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$. In this method, the functions are approximated by the sums of functions of smaller number of variables, each of which is piecewiswe-constant in one of variables for fixed values of the other variables. A Jackson-type inequality is investigated for these approximations in terms of the mixed module of continuity.

Для періодичних функцій багатьох змінних запропоновано метод їх наближень у просторах Орлича $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ сумою функцій меншого числа змінних, кожна із яких є кусково-сталою за однією змінною при фіксованих значеннях решти змінних. Досліджується нерівність типу Джексона для таких наближень у термінах змішаного модуля неперервності.

1. Чтобы сформулировать постановку задачи, введем следующие обозначения: для действительнозначных функций $f(x),\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, имеющих по каждой переменной период 1, $L_0 \equiv L_0(\mathbb{T}^m)$ — множество измеримых и почти всюду конечных функций на основном торе периодов $\mathbb{T}^m = [0,1]^m$; Φ — множество $\varphi\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, непрерывных и неубывающих функций $\varphi(0) = 0$;

$$L_\varphi \equiv L_\varphi(\mathbb{T}^m) = \Big\{ f \in L_0; \|f\|_\varphi := \int\limits_{\mathbb{T}^m} \varphi(|f(x)|)dx < \infty \Big\}$$

— функциональный класс Орлича; Ω — множество функций ψ из Φ, являющихся модулем непрерывности, т. е. ψ — полуаддитивные функции. Тогда $L_\psi \equiv L_\psi(\mathbb{T}^m)$ — метрические пространства.

Для $x \in \mathbb{R}^m$ пусть $(x; \hat{x}_j) := (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Обозначим через $\sum_m$ совокупность функций $G(x),\ x \in \mathbb{T}^m$, вида

$$G(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x; \hat{x}_j), \quad g_j \in L_\varphi(\mathbb{T}^{m-1}).$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции $f(x)$ m переменных суммой функций $(m-1)$-й переменной в пространстве $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$:

$$E(f)_\varphi = \inf \Big\{ \big\| f(x) - G(x) \big\|_\varphi;\ G \in \Sigma_m \Big\}. \tag{1}$$

Поиск наилучших функций G из Σ_m в (1) является, вообще говоря, трудной задачей. В связи с этим мы исследуем аппроксимацию функциями, которые, возможно, и не являются наилучшими из Σ_m, но метод их построения является простым. Для таких функций докажем оценку сверху приближения в терминах смешанного модуля непрерывности, которая является точной для этого метода в пространствах L_ψ для всех $\psi \in \Omega$ и в L_φ для некоторого класса $\varphi \in \Phi$.

Пусть $\Delta_{t_j}^j f(x)$ — приращение $f(x)$ по переменной x_j с шагом t_j. Для $h=(h_1,\ldots,h_m)\in$ $\in\mathbb{R}_+^m$

$$\omega(f;h_1,\ldots,h_m)_\varphi=\sup\left\{\left\|\Delta_{t_1}^1\ldots\Delta_{t_m}^m f\right\|_\varphi;|t_j|\le h_j,\ j=1,\ldots,m\right\}$$

— смешанный модуль непрерывности f.

Для фиксированного $t\in\mathbb{T}^m$ положим

$$G_t(f;x)=f(x)-\Delta_{x_1-t_1}\ldots\Delta_{x_m-t_m}f(t).$$

Функция $G_t(f;x)$ является суммой сечений $f(x)$ вдоль координатных плоскостей и принадлежит Σ_m.

Теорема 1. *Пусть φ принадлежит Φ. Тогда для f из $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ найдется такое значение параметра $t_f\in\mathbb{T}^m$, что*

$$\|f-G_{t_f}(f)\|_\varphi\le\omega\left(f;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)_\varphi. \tag{2}$$

Если φ удовлетворяет условию

$$\varphi(a)\ge\frac{\varphi(2^m)}{2^{2m}}a^2,\quad a=1,2,\ldots,2^m, \tag{3}$$

то неравенство (2) *является точным в том смысле, что*

$$\sup_{\substack{f\in L_\varphi(\mathbb{T}^m)\\ \omega\left(f;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)_\varphi\ne 0}}\frac{\|f-G_{t_f}(f)\|_\varphi}{\omega\left(f;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)_\varphi}=1. \tag{4}$$

Доказательство. Существование параметра t_f следует из оценки усреднения уклонений $G_t(f)$ по всем t:

$$\int\limits_{t\in\mathbb{T}^m}\left\|f-G_t(f)\right\|_\varphi dt=\int\limits_{t\in\mathbb{T}^m}\left\|\Delta_{t_1}^1\ldots\Delta_{t_m}^m f\right\|_\varphi dt\le\omega\left(f;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)_\varphi.$$

Для построения экстремальных функций в (4) используем функции одной переменной, построенные В. А. Юдиным в [1].

Пусть $y\in\mathbb{R}^1$. Для простого числа $q>2$ построим разбиение периода $[0,1]$ равноотстоящими точками $y_j=jq^{-1}$, $j=0,1,\ldots,q-1$, и определим 1-периодическую функцию $f_q(y)$ условиями: $f_q(y)=\left(\dfrac{j}{q}\right)$ при $y\in(y_{j-1},y_j]$ $j=1,2,\ldots,q-1$, и $f_q(y)=0$ при $y\in(t_{q-1},1]$, где $\left(\dfrac{j}{q}\right)$ — символ Лежандра [2, с. 70].

В случае $m>1$ для $x=(x_1,\ldots,x_m)$ положим

$$F_q(x)=\prod_{k=1}^m f_q(x_k).$$

Лемма 1. *Пусть функция* φ *из* Φ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда*

$$\frac{\displaystyle\int_{t\in\mathbb{T}^m} \big\|\Delta^1_{t_1}\ldots\Delta^m_{t_m} F_q\big\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^m)} dt}{\omega\left(F_q; \dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^m)}} = 1 - c_q, \tag{5}$$

где $c_q > 0$ *и* $c_q \to 0$ *при* $q \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Поскольку [2, с. 82]

$$\sum_{r=0}^{q-1} \left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{r+j}{q}\right) = -1, \quad j = 1,\ldots,q-1,$$

то для любого y_j

$$-\frac{1}{q} = \int\limits_0^1 f_q(y)f_q(y+y_j)dy = \mu\big\{y\in[0,1]\colon f_q(y)\cdot f_q(y+y_j) = 1\big\} -$$

$$-\mu\big\{y\in[0,1]\colon f(q)f_q(y+y_j) = -1\big\} + \frac{2}{q} =: \mu^+ - \mu^- + \frac{2}{q}.$$

Так как $\mu^+ + \mu^- + \dfrac{2}{q} = 1$, то $\mu^- = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{q}\right)$, поэтому

$$\big\|\Delta_{y_j} f_q\big\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \int\limits_0^1 \varphi\big(|f_q(y+y_j) - f_q(y)|\big)dy = \varphi(2)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{q}\right) + \varphi(1)\cdot\frac{2}{q}.$$

Функция $\|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)}$ является кусочно-монотонной функцией аргумента t на отрезках $[y_j, y_{j+1}]$, значит

$$\omega\left(f_q, \frac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \sup_j \|\Delta_{y_j} f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} = \varphi(2)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{q}\right) + \varphi(1)\frac{2}{q}. \tag{6}$$

С другой стороны, используя (3), имеем

$$\|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} \ge \frac{\varphi(2)}{2^2}\int\limits_0^1 \big|f_q(y) - f_q(y+t)\big|^2 dy = \varphi(2)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q} - \int\limits_0^1 f_q(y)f_q(y+t)dy\right),$$

и так как $\displaystyle\int_0^1 f_q(t)dt = 0$, то

$$\int\limits_0^1 \|\Delta_t f_q\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^1)} dt \ge \varphi(2)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (5) в случае $m = 1$.

При $m > 1$ доказательство аналогично. Пусть для простоты изложения $m = 2$. Тогда

$$\Delta^1_{t_1}\Delta^2_{t_2} F_q(x) = \Delta^1_{t_1} f_q(x_1)\Delta^2_{t_2} f_q(x_2),$$

$$\left\|\Delta^1_{y_{j_1}}\Delta^2_{y_{j_2}}F_q\right\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi\big(|\Delta_{y_{j_1}}f_q(x_1)|\,|\Delta_{y_{j_2}}f_q(x_2)|\big)\,dx_1dx_2=$$

$$=\varphi(2^2)\mu\big\{x\in[0,1]^2:|\Delta_{y_{j_1}}f_q(x_1)|\,|\Delta_{y_{j_2}}f_q(x_2)|=2^2\big\}+$$

$$+\varphi(2)\mu\big\{x\in[0,1]^2:|\Delta_{y_{j_1}}f_q(x_1)|\,|\Delta_{y_{j_2}}f_q(x_2)|=2\big\}+$$

$$+\varphi(1)\mu\big\{x\in[0,1]^2:|\Delta_{y_{j_1}}f_q(x_1)|\,|\Delta_{y_{j_2}}f_q(x_2)|=1\big\}=$$

$$=\varphi(2^2)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{q}\right)\right)^2+\varphi(2)\frac{2}{q}\left(1+\frac{1}{q}\right)+\varphi(1)\left(\frac{2}{q}\right)^2=\frac{1}{2^2}\varphi(2^2)+c_1(q),\tag{8}$$

где $c_1(q)\to 0$ при $q\to\infty$

$$\omega\left(F_q;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)}=\sup_{j_1,j_2}\left\|\Delta^1_{t_1}\Delta^2_{t_2}F_q\right\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)}=\frac{1}{2^2}\varphi(2^2)+c_1(q),$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left\|\Delta^1_{t_1}\Delta^2_{t_2}F_q)\right\|_{L_\varphi(\mathbb{T}^2)}dt_1dt_2\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^4}\varphi(2^2)\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|\Delta_{t_1}f_q(x_1)\right|^2\Delta_{t_2}f_q(x_2)|^2dx_1dx_2dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{2^4}\varphi(2^2)\left(2\left(1-\frac{1}{q}\right)^2\right)=\frac{1}{2^2}\varphi(2^2)\left(1-\frac{1}{q}\right)^2.\tag{9}$$

Из (8) и (9) следует (5). Лемма 1, а значит, и теорема 1 доказаны.

Заметим, что условие (3) выполняется для всех $\varphi\in\Omega$, а также, например, и для функций $\varphi(x)=|x|^p$ при $p\in[1,2]$.

2. Используем теорему 1 для приближения функций $f(x)$ из $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ функциями вида $S(x)=\sum_{j=1}^m\varphi_j(x)$, где каждая из функций $\varphi_j(x)$ является кусочно-постоянной по переменной x_j (при фиксированных остальных переменных).

Для заданного вектора $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m$ построим равномерные разбиения осей координат: j-ю координату тора периодов разобьем на n_j отрезков длины $\dfrac{1}{n_j}$ точками $y_{r_j}=\dfrac{r_j}{n_j}$, $r_j=0,1,\ldots,n_j$. Пусть $\chi_j(x_j)$ — характеристическая функция отрезка $\left[0,\dfrac{1}{n_j}\right]$, а функция $\varphi_j(x)$ имеет вид

$$\varphi_j(x)=\sum_{r_j=1}^{n_j}g_{r_j}(x;\hat{x}_j)\chi_j(x_j-y_{r_j}),$$

где $g_{r_j}(x;\hat{x}_j)$ — произвольные функции из $L_\varphi(\mathbb{T}^{m-1})$, не зависящие от переменной x_j.

Для данного $t\in\mathbb{T}^m$ пусть

$$f_t(x):=f(x+t)$$

— сдвиг $f(x)$ на параметр t. Рассмотрим аппроксимацию

$$\int\limits_{t\in\mathbb{T}^m} \|f_t - S_n\|_\psi dt,$$

усредненную по всем сдвигам f. В качестве приближающей функции S_n выберем

$$S_n(f_t;x) := f_t(x) - \sum_{r_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{r_m=1}^{n_m} \Delta^1_{y_{r_1}-x_1}\ldots\Delta^m_{y_{r_m}-x_m} f_t(x)\cdot\chi_1(x_1-y_{r_1})\ldots\chi_m(x_m-y_{r_m}).$$

Легко видеть, что функция $S_n(f_t;x)$ принадлежит аппроксимирующему подпространству. Например, при $m=2$

$$S_n(f_t;x) = -\sum_{r_2=1}^{n_2} f_t(x_1,y_{r_2})\chi(x_2-y_{r_2}) - \sum_{r_1=1}^{n_1} f_t(y_{r_1},x_2)\chi(x_1-y_{r_1}) +$$

$$+\sum_{r_1=1}^{n_1}\sum_{r_2=1}^{n_2} f_t(y_{r_1},y_{r_2}).$$

Теорема 2. *Пусть φ принадлежит Φ. Тогда для любой $f\in L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{t\in\mathbb{T}^m} \big\|f_t - S_n(f_t)\big\|_\varphi dt \le \omega\left(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_m}\right)_\varphi. \tag{10}$$

Если для φ выполнено (3), *то неравенство* (10) *в пространстве $L_\varphi(\mathbb{T}^m)$ точное*:

$$\sup_{\substack{f\in L_\varphi(\mathbb{T}^m)\\ \omega\left(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_m}\right)_\varphi\ne 0}} \frac{\int_{t\in\mathbb{T}^m} \|f_t - S_n(f_t)\|_\varphi dt}{\omega\left(f;\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_m}\right)_\varphi} = 1. \tag{11}$$

Доказательство. На каждом кубе разбиения

$$\Pi_{r_1\ldots r_m} = \{x\in\mathbb{T}^m; x_i\in[y_{r_i},y_{r_{i+1}}),\ i=1,\ldots,m\}$$

разность $f_t(x) - S_n(f_t;x)$ имеет вид

$$f_t(x) - S_n(f_t;x) = \Delta^1_{y_{r_1}-x_1}\ldots\Delta_{y_{r_m}-x_m} f_t(x),$$

поэтому

$$\int\limits_{t\in\mathbb{T}^m} \big\|f_t - S_n(f_t)\big\|_\varphi dt =$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{r_m=1}^{n_m} \int\limits_{t\in\mathbb{T}^m}\ \int\limits_{x\in\prod_{r_1\ldots r_m}} \varphi\big(|\Delta^1_{y_{r_1}-x_1}\ldots\Delta_{y_{r_m}-x_m} f(t+x)|\big)\,dx\,dt =$$

$$= n_1 \cdot \ldots \cdot n_m \int\limits_{h_1=0}^{\frac{1}{n_1}} \ldots \int\limits_{h_m=0}^{\frac{1}{n_m}} \left\|\Delta^1_{h_1} \ldots \Delta^m_{h_m} f\right\|_{\varphi} dh_1 \ldots dh_m \leq \omega\left(f; \frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_m}\right)_{\varphi}.$$

Для оценки снизу в (11) выберем $f(x) = F_q(x)$ и применим лемму 1.

Теорема 2 доказана.

Использованный нами метод усреднения по сдвигам оказался эффективным при аппроксимации периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами в пространствах $L_p(\mathbb{T}^1),\ p \in (0,1)$ [3], и $L_\psi(\mathbb{T}^1)$ [4, 5]. В работах [6, 7] этот же метод применялся при аппроксимации в $L_\psi(\mathbb{T}^1)$ кусочно-постоянными функциями.

Доказанные нами теоремы являются одним из возможных многомерных аналогов результатов работы [6]. Лемма 1 ранее было доказана в случае $m = 1$ для пространств $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p \in (0,2)$ [1], и $L_\psi(\mathbb{T}^1),\ \psi \in \Omega$ [6].

Литература

1. *Пичугов С. А.* Константы Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604 – 614.
2. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 172 с.
3. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. –**185**, № 8. – С. 81 – 102.
4. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №. –1. – С. 122 – 123.
5. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524 – 1533.
6. *Пичугов С. А.* Приближение константой периодических функций в метрических пространствах $\varphi(L)$ // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1095 – 1098.
7. *Пичугов С. А.* Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1214 – 1232.

Получено 28.11.17