

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Фізика та прикладна математика»

В авторській редакції

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 2

Навчально-методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань з дисципліни
«Вища математика» для студентів заочної форми навчання
інженерних спеціальностей УДУНТ (ДМетІ)

Електронне видання

ДНІПРО
2026

Упорядник:
А. Г. Мона

Електронне видання

Схвалено Вченою радою ННІ «ДМетІ»
Протокол № 4 від 17.12.2025 р.

В 55 Вища математика. Частина 2 : навчально-методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Вища математика» для студентів заочної форми навчання інженерних спеціальностей УДУНТ (ДМетІ) / упоряд. А. Г. Мона; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2026. – 101 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами безвідривної форми навчання інженерних спеціальностей УДУНТ (ДМетІ) під час виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Вища математика».

Навчально-методичні рекомендації містять основні теоретичні положення для засвоєння матеріалу, зразки розв'язування прикладів, інструкції до виконання індивідуальних завдань, індивідуальні завдання, вимоги оформлення робіт.

Бібліогр.: 11 назв.

З М І С Т

Вступ	4
Розділ 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ...	5
Комплексні числа	5
Невизначений інтеграл	7
Розділ 8. ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ	19
Визначений інтеграл	19
Невласні інтеграли	22
Наближене обчислення визначених інтегралів	26
Деякі застосування визначеного інтеграла	26
Розділ 9. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	32
Розділ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	44
Розділ 11. Числові ряди	58
Ряди з додатними членами. Достатні ознаки збіжності	60
Знакозмінні ряди	62
Розділ 12. Степеневі ряди	70
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	82
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАВАННЯ І ПЕРЕВІРКА	94
СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	95
ЛІТЕРАТУРА	99

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після набуття достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами університету згідно з затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку автора джерел. Рекомендації щодо їх використання надані у методичних вказівках до виконання контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Розділ 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Література: [1] глава 7, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8.

Вивчивши цей розділ студент повинен асоціювати зображення комплексних чисел на площині з зображенням векторів, дії над комплексними числами з діями над векторами. Описувати поняття первісної функції і невизначеного інтеграла, геометричний зміст невизначеного інтеграла, його основні властивості. Розширювати таблицю невизначених інтегралів основних елементарних функцій. Ілюструвати найпростіші правила інтегрування. Пояснити методи безпосереднього інтегрування, заміни змінної у невизначеному інтегралі, інтегрування частинами, інтегрування деяких функцій, які раціонально залежать від тригонометричних та ірраціональних функцій.

Комплексні числа.

Комплéксним числом z називається вираз вигляду

$$z = x + iy$$

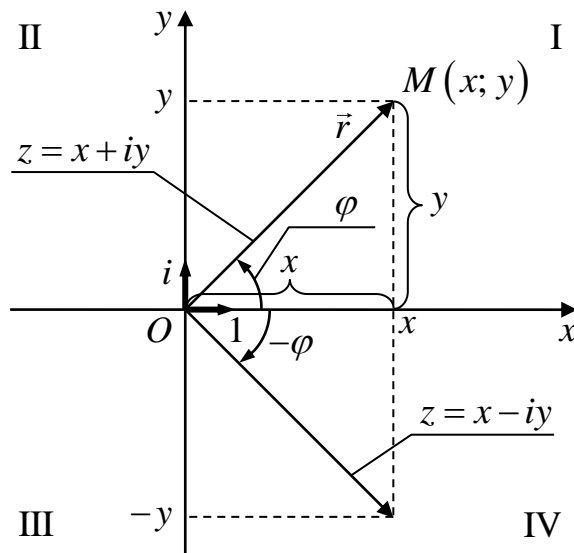
(*алгебраїчна* або *декартова* форма запису комплексного числа), де x і y – будь-які дійсні числа. Числа x і y називаються відповідно *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа z . Вони позначаються

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

(*Re* і *Im* – перші букви латинських слів *realis* (дійсний) і *imaginaris* (уявний)).

Якщо $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ називається *чисто уявним*; якщо $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ є *дійсним* числом. Таким чином, дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел.

Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *площиною комплексного змінного* z . На осі Ox комплексної площини розташовані дійсні числа. Тому вісь Ox називається *дійсною віссю*. На осі Oy розташовані чисто уявні числа. Тому вісь Oy називається *уявною віссю*.



Приймемо точку O за полюс полярної системи координат, а вісь Ox за полярну вісь. Тоді довжина радіус-вектора \vec{r} є полярним радіусом r , а кут, який цей вектор утворює з позитивним напрямком осі Ox , – полярним кутом φ точки $M(x; y)$. Полярні координати точки $M(x; y)$ на комплексній площині називаються модулем і аргументом комплексного числа.

Модуль комплексного числа позначається $|z|$ та визначається виразом

$$r = |z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент комплексного числа z позначається

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

Він вважається додатним, якщо відраховується проти ходу годинникової стрілки і визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π , тобто

$$\text{Arg } z = \text{arg } z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $\text{arg } z$ – головне значення аргументу $\text{Arg } z$, взяте в границях

$$-\pi < \text{arg } z \leq \pi.$$

Головне значення аргументу визначається за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0 \quad (\text{I, IV чверть}), \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0 \quad (\text{II чверть}), \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0, y < 0 \quad (\text{III чверть}), \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y, & \text{якщо } x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $z = 0$ ($x = y = 0$), то $|z| = 0$, а $\arg z$ не визначений, тобто в якості аргументу нуля можна прийняти будь-який кут φ .

Невизначений інтеграл.

Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в кожній точці, що належить цьому проміжку, виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Визначення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де C – довільна стала називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x) dx$ (читається «невизначений інтеграл $f(x)$ на dx »). Таким чином, за визначенням, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де C – довільна стала. Тут $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*,

$\int f(x) dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*, символ \int –

знаком невизначеного інтеграла.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

$$d \int f(x) dx = \left(\int f(x) dx \right)' dx = f(x) dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C.$$

3. Відмінний від нуля постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла, тобто якщо $k = \text{const} \neq 0$, то

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Таблиця основних невизначених інтегралів.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{x^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1)x^{\mu-1}} + C \quad (\mu \neq 1).$$

Частинний випадок. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Частинний випадок. $\int e^x dx = e^x + C.$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$8'. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$9'. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$11. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm s}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm s} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Інваріантність формул інтегрування.

Теорема. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замість незалежної змінної підставити будь-яку неперервно диференційовну функцію від цієї змінної, тобто якщо

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad \text{то} \quad \int f(u) \, du = F(u) + C,$$

де $u = \varphi(x)$ – будь-яка неперервно диференційовна функція від x .

Основні методи інтегрування.

Метод безпосереднього інтегрування. Обчислення інтегралів з використанням основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням*.

Метод заміни змінної. У багатьох випадках знаходження даного інтеграла можна звести до знаходження табличного інтеграла шляхом введення нової змінної інтегрування. Цей метод називається *методом заміни змінної* (або *методом підстановки*) і є одним з найсильніших прийомів інтегрування функцій.

Метод інтегрування частинами. Інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ яким-небудь чином представляється у вигляді добутку двох множників u і dv (останній обов'язково містить dx). Далі проводиться два інтегрування: 1) при знаходженні v з виразу для dv ; 2) при відшукуванні інтеграла від vdu . Може виявитися, що ці два інтегрування легко здійснюються, в той час як заданий інтеграл не обчислюється безпосередньо.

Інтегрування дробово-раціональних функцій.

1. **Інтегрування найпростіших раціональних дробів.** Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів наступних трьох {чотирьох} типів (тут A, B, a, p, q – дійсні числа):

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^\mu} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\mu} = -\frac{A}{(\mu-1)(x-a)^{\mu-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \left(\frac{p^2}{4} - q < 0 \right).$$

Виділимо у знаменнику повний квадрат.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+2x\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q} dx = \\ &= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \int \frac{2t}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2} = \\
&= \frac{A}{2} \ln \left(t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \right) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} + C = \\
&= \frac{A}{2} \ln \left(x^2 + px + q \right) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.
\end{aligned}$$

Для обчислення даного інтеграла можна також відразу в чисельнику виділити похідну знаменника і розбити інтеграл на два. Тоді перший інтеграл легко зведеться до табличного. Другий інтеграл після виділення у знаменнику повного квадрата також зведеться до табличного.

2. *Схема інтегрування раціональних дробів.* Нехай потрібно знайти інтеграл $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степенів m і n , що не мають спільних коренів.

Для цього необхідно:

1) якщо раціональний дріб неправильний ($m \geq n$), розділити чисельник на знаменник і представити його у вигляді суми цілої частини (многочлена) і остачі (правильного раціонального дробу)

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)},$$

де $m_1 < n$;

2) розкласти знаменник $Q_n(x)$ на множники;

3) розкласти правильний раціональний дріб $\frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}$ на найпростіші дроби;

4) проінтегрувати многочлен $R(x)$ і кожен із найпростіших дробів;

5) просумувати всі знайдені інтеграли.

Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних. Нехай $R(\sin x, \cos x)$ – раціональний вираз відносно

$\sin x$ і $\cos x$. Тоді $\int R(\sin x, \cos x) dx$ може бути приведений до інтегралу від раціональної функції нової змінної інтегрування за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Дійсно,

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \left(\text{розділимо на } \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \left(\text{розділимо на } \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, то можна застосувати підстановку $\sin x = t$; якщо підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то зручно скористатися підстановкою $\cos x = t$; якщо підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, або раціонально залежить тільки від $\operatorname{tg} x$ або від $\sin x \cdot \cos x$, то підстанова $\operatorname{tg} x = t$. В останньому випадку використовуються формули

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

При обчисленні інтегралів виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ використовуються формули

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Інтеграли виду

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

обчислюються безпосередньо з використанням формул

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x].$$

Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

1. При обчисленні інтегралів виду

$$\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$$

застосовується підстановка $\sqrt[k]{x} = t$, де k – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Тоді $x = t^k$, $dx = kt^{k-1} dt$.

2. При обчисленні інтегралів виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right) dx$$

використовується аналогічна підстановка $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де k – найменший

спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

3. Інтеграли виду $\int R(z, \sqrt{az^2 + bz + c}) dz$ шляхом перетворення

квадратного тричлену $az^2 + bz + c$ у більшості випадків зводяться до інтегралів одного з наступних типів.

$$3.1. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx. \text{ Підстановка } x = a \sin t \text{ (або } x = a \cos t \text{)}.$$

$$3.2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx. \text{ Підстановка } x = a \operatorname{tg} t \text{ (або } x = a \operatorname{ctg} t \text{)}.$$

$$3.3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx. \text{ Підстановка } x = a \operatorname{sec} t = \frac{a}{\cos t} \text{ (або } x = a \operatorname{cosec} t = \frac{a}{\sin t} \text{)}.$$

Приклади інтегралів, що не беруться. Інтеграл називається таким, що не береться, якщо він не виражається через елементарні функції. Інтеграли

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

та багато інших не можуть бути виражені кінцевим числом елементарних функцій.

Приклад 7.1. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Розв'язання. За формулою 1 з таблиці основних невизначених інтегралів маємо

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Отже,

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

(оскільки $d \sin x = (\sin x)' dx = \cos x dx$).

Приклад 7.2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{d \ln x}{1 + \ln^2 x} = \operatorname{arctg} \ln x + C.$$

Приклад 7.3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \operatorname{arcsin} \operatorname{tg} x + C.$$

Приклад 7.4. Знайти інтеграл $\int \left(3 \cos x + \frac{5x^2 + x^3 e^x + \sqrt{x^7}}{x^3} \right) dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \left(3 \cos x + \frac{5x^2 + x^3 e^x + \sqrt{x^7}}{x^3} \right) dx &= 3 \int \cos x dx + 5 \int \frac{dx}{x} + \int e^x dx + \int x^{1/2} dx = \\ &= 3 \sin x + 5 \ln |x| + e^x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.5. Знайти інтеграл $\int x \sin 5x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int x \sin 5x dx &= \left| \begin{array}{l} x = u, \sin 5x dx = dv, \\ dx = du, v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx = \\ &= -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.6. Знайти інтеграл $\int x e^{2x} dx$.

Розв'язання.

$$\int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u, e^{2x} dx = dv, \\ dx = du, v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

(при знаходженні функції v довільну сталу додавати не потрібно, оскільки за v ми приймаємо одну з первісних функцій e^{2x})

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Приклад 7.7. Знайти інтеграл $\int \arccos 3x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \arccos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} \arccos 3x = u, \quad dx = dv, \\ -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx = du, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos 3x + 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \\ &= x \arccos 3x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) \cdot \int \frac{d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} = x \arccos 3x - \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{1-9x^2} + C = \\ &= x \arccos 3x - \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.8. Знайти інтеграл $\int e^x \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} e^x = u, \quad \cos x dx = dv \\ e^x dx = du, \quad v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= e^x \sin x - \left| \begin{array}{l} e^x = u, \quad \sin x dx = dv \\ e^x dx = du, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right); \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + \bar{C}; \quad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

де $C = \frac{1}{2} \bar{C}$.

Приклад 7.9. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 2 \right)}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (3x+1)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.10. Знайти інтеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx &= \int \frac{6x+5}{x^2+2 \cdot x \cdot 2+2^2-2^2+9} dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+2=t, \quad x=t-2, \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5} dt = \frac{6}{2} \int \frac{2t}{t^2+5} dt - 7 \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{5})^2} = \\ &= 3 \ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = 3 \ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.11. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3+1}{x^3-4x^2+4x} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^3-4x^2+4x \\ x^3-4x^2+4x & 1 \\ \hline 4x^2-4x+1 & \end{array};$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \left(1 + \frac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x} \right) dx;$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x} = \frac{4x^2-4x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2};$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2);$$

Скористаємося способом задання частинних значень. Будемо надавати x значення, що дорівнюють кореням знаменника, тобто ті значення, при яких знаменник дорівнює нулю.

$$x_1 = 0 \quad \left| \quad 1 = 4A, \quad A = \frac{1}{4}; \right.$$

$$x_2 = 2 \quad \left| \quad 16 - 8 + 1 = 2B, \quad B = \frac{9}{2}; \right.$$

Далі скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Прирівняємо коефіцієнти при x^2 .

$$x^2 \quad \left| \quad 4 = A + C, \quad C = 4 - A = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}. \right.$$

Таким чином,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \left(1 + \frac{4x^2-4x+1}{x^3-4x^2+4x} \right) dx =$$

$$= \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{9}{2} \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{15}{4} \int \frac{d(x-2)}{(x-2)} = x + \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{15}{4} \ln|x-2| + C =$$

$$x - \frac{9}{2(x-2)} + \ln \sqrt[4]{|x(x-2)^{15}|} + C.$$

Приклад 7.12. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(5 + 4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{5(1+t^2) + 8t} = 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 8t + 5} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\underbrace{t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2}_{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5} =$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{d\left(t + \frac{4}{5}\right)}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{\left(t + \frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{(5t+4)}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\left(5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4\right)}{3} + C.$$

Розділ 8. ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

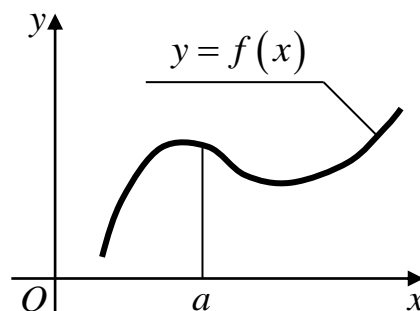
Література: [1] глава 7, §§ 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.

Визначений інтеграл.

Основні властивості визначеного інтеграла.

1. Визначений інтеграл з однаковими верхньою та нижньою границями вважається рівним нулю, тобто

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$



2. При перестановці верхньої і нижньої границь інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

4. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і A, B — деякі числа, то

$$\int_a^b [A f_1(x) + B f_2(x)] dx = A \int_a^b f_1(x) dx + B \int_a^b f_2(x) dx.$$

Зокрема, якщо $B = 0$, то

$$\int_a^b A f_1(x) dx = A \int_a^b f_1(x) dx,$$

тобто постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

Якщо $A = 1$, $B = \pm 1$, то

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на кожному з відрізків $[a; c]$ і $[c; b]$, то вона інтегровна і на відрізку $[a; b]$, причому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Застосування первісної для обчислення визначених інтегралів.
Формула Ньютона-Лейбніца.**

Нехай потрібно обчислити $\int_a^b f(x) dx$, $F(x)$ – деяка первісна для

підінтегральної функції $f(x)$. Тоді за теоремою Барроу $\int_a^x f(t) dt$ також є первісною для функції $f(x)$. Таким чином, дві первісні однієї й тієї ж функції відрізняються лише на константу, тобто

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

де C – const.

Для обчислення сталої C припустимо $x = a$. Тоді

$$\int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

тобто

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Припустимо $x = b$. Тоді

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

або, замінюючи t на x , отримаємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Отже, визначений інтеграл дорівнює приросту первісної підінтегральної функції на відрізку інтегрування. Зазвичай записують

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай в $\int_a^b f(x)dx$ потрібно виконати підстановку $x = \varphi(t)$. Тоді

справедлива наступна формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Зауваження. При використанні цієї формули ми не повертаємося до старої змінної інтегрування. Обчисливши інтеграл, що стоїть праворуч, ми одержуємо деяке число. Інтеграл, що стоїть ліворуч, дорівнює цьому ж числу.

Інтегрування частинами. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні функції змінної x . Тоді

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du.$$

Оскільки

$$\int_a^b d(uv) = uv \Big|_a^b,$$

то

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b u dv + \int_a^b v du.$$

Остаточно отримаємо

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Невласні інтеграли.

Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування (невласні інтеграли I роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена при всіх значеннях $x \geq a$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує кінцева границя

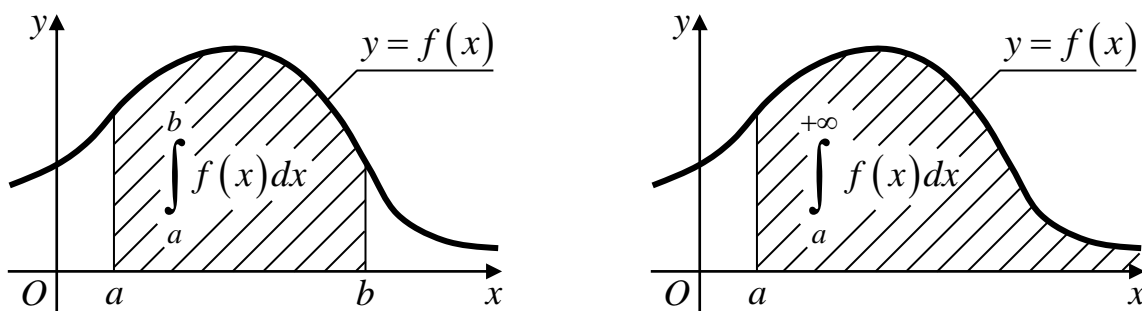
$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то ця границя називається *невласним інтегралом I роду* від функції $f(x)$ у

границях від a до $+\infty$ і позначається $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Кажуть, що невластний інтеграл збігається, якщо границя існує. У цьому випадку зберігається і геометричний зміст інтеграла як площі. Коли $f(x) > 0$ маємо



Якщо ж $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ не існує, то кажуть, що невластний інтеграл

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається.

Геометрично нескінченну площу зобразити не можна.

Аналогічно, вводиться поняття невластного інтеграла в границях від $-\infty$ до b .

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx .$$

Якщо границя існує, то інтеграл збігається. В іншому випадку – розбігається.

Аналогічно,

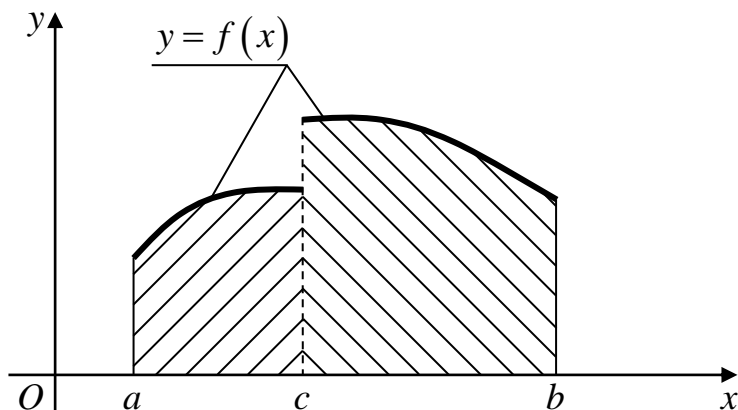
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx ,$$

де c – довільне число. Якщо кожен з невластних інтегралів, що стоять праворуч, збігається, то збігається і невластний інтеграл, що стоїть ліворуч.

Невластні інтеграли від необмежених функцій (невластні інтеграли II роду).

Насамперед зазначимо, що не існує труднощі в узагальненні поняття інтеграла на той випадок, коли підінтегральна функція у одній або декількох

точках інтегрування терпить кінцевий розрив. У цьому випадку інтервал інтегрування розбивається на частини, в кожній з яких функція неперервна, а інтеграл по всьому інтервалу розбивається на суму інтегралів. У цьому випадку зберігається і геометричний зміст інтеграла як площі.



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Зовсім інше положення в тому випадку, якщо в одній або декількох точках інтегрування функція терпить нескінченний розрив. Тоді границя інтегральної суми може і не існувати, оскільки підінтегральна функція не неперервна.

Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна при всіх значеннях x на відрізку $[a; b]$, за винятком, можливо, крайньої точки $x = b$, де вона терпить

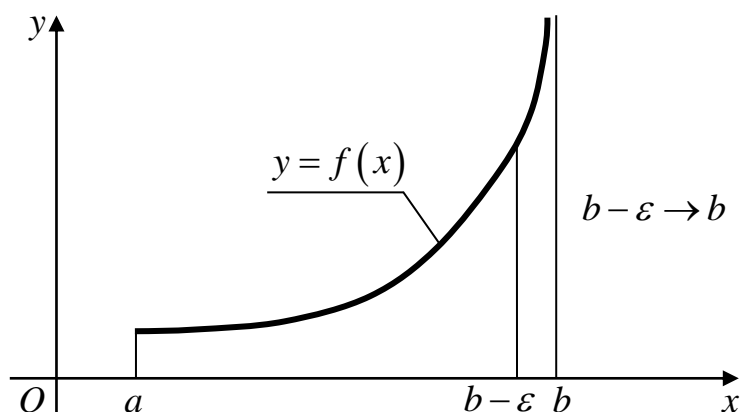
нескінченний розрив. У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ визначається як границя

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ за умови, що ця границя існує, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

У цьому випадку кажуть, що невластний інтеграл другого роду збігається. Якщо ж вказана границя не існує, то невластний інтеграл другого роду розбігається.

Геометрично, якщо $f(x) > 0$

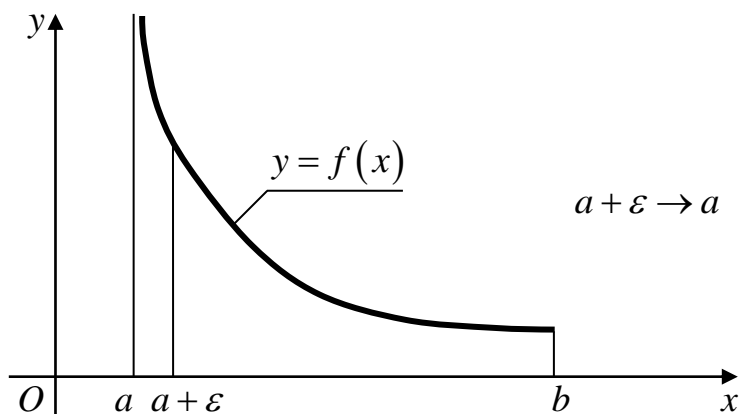


Аналогічно, вводиться поняття невластного інтеграла, якщо підінтегральна функція терпить нескінченний розрив у нижній границі інтегрування (в точці $x = b$). Тоді

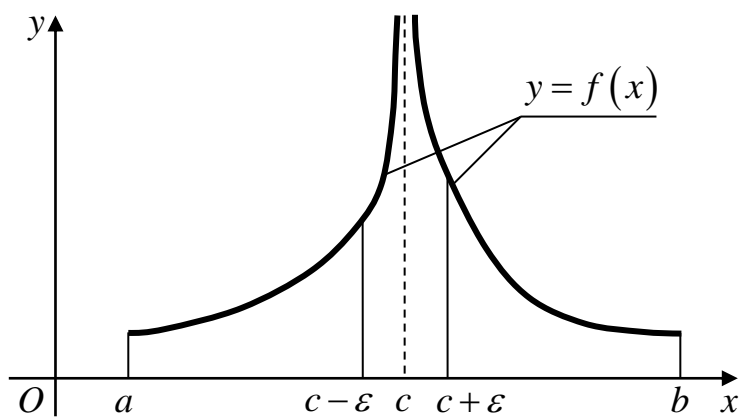
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

за умови, що ця границя існує.

Геометрично, якщо $f(x) > 0$



Якщо на відрізку інтегрування є кінцеве число точок нескінченного розриву, то проміжок інтегрування розбивається на частини, у кожній з яких функція терпить нескінченний розрив лише на одній з границь інтегрування. Якщо кожен з отриманих невластних інтегралів збігається, то збігається і невластний інтеграл по всьому проміжку інтегрування.



Наближене обчислення визначених інтегралів.

Формула парабол (формула Сімпсона).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} \left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) \right].$$

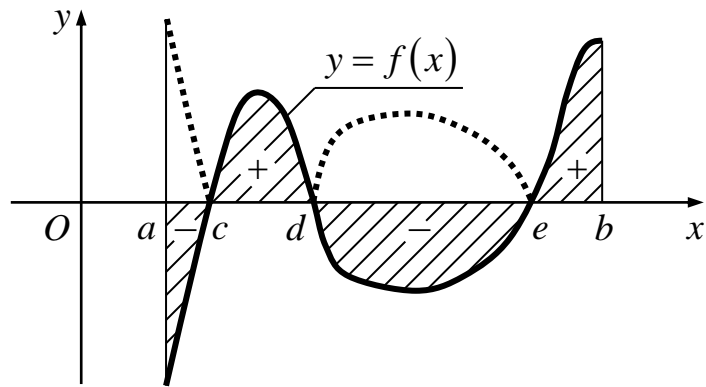
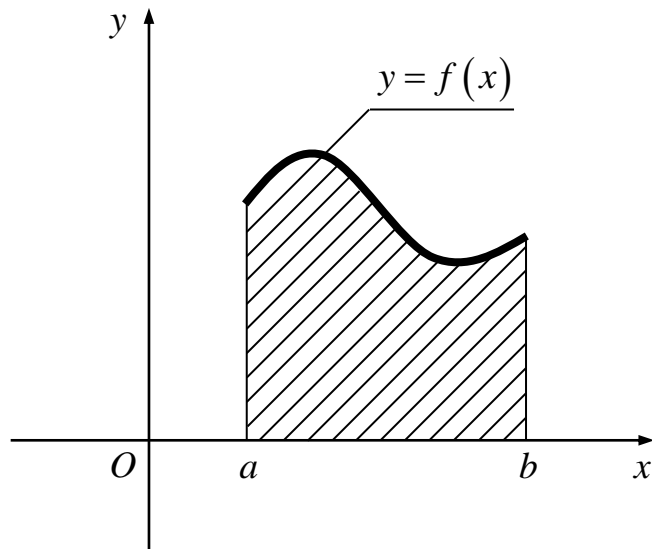
Кількість точок ділення $n = 2m$ довільна, але чим більше це число, тим з більшою точністю сума в правій частині дає значення інтеграла, причому при $n \rightarrow \infty$ отримаємо його точне значення.

Деякі застосування визначеного інтеграла.

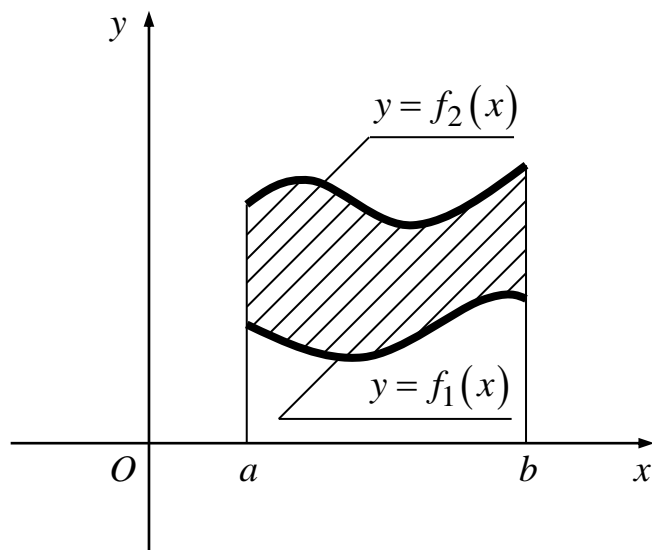
Обчислення площ плоских фігур.

Обчислення площ плоских фігур у прямокутних координатах.

$$S = \int_a^b f(x) dx, \text{ де } f(x) \geq 0 \text{ або } S = \int_a^b |f(x)| dx;$$



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x);$$



$$S = \int_c^d f(y) dy.$$

Якщо крива задана рівняннями у параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, двома вертикалями, що відповідають $x = a$, $x = b$, та відрізком осі Ox , виражається інтегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

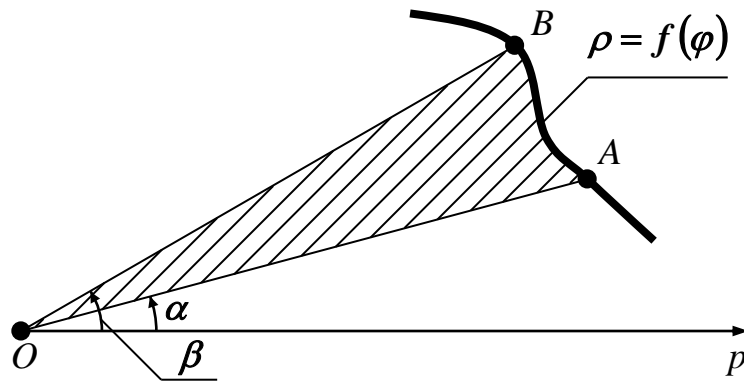
де t_1 і t_2 визначаються з рівнянь

$$a = \varphi(t_1), \quad b = \varphi(t_2)$$

($\psi(t) \geq 0$ на відрізку $[t_1; t_2]$).

Обчислення площ плоских фігур у полярних координатах.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$



Обчислення довжини дуги.

Обчислення довжини дуги у прямокутних координатах.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy.$$

Якщо крива задана рівняннями у параметричній формі, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Обчислення довжини дуги у полярних координатах.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Обчислення об'єму тіла обертання.

Обчислення об'єму тіла обертання у прямокутних координатах.

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx;$$

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy, \quad V_y = 2\pi \int_a^b xy dx;$$

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx, \text{ де } 0 \leq y_1(x) \leq y_2(x);$$

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy, \text{ де } 0 \leq x_1(y) \leq x_2(y),$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx, \text{ де } 0 \leq y_1(x) \leq y_2(x).$$

Якщо крива задана рівняннями у параметричній формі, то

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt.$$

Обчислення об'єму тіла обертання у полярних координатах.

$$V_p = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Обчислення площі поверхні обертання.

Обчислення площі поверхні обертання у прямокутних координатах.

$$P_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$P_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + x'^2} dy, \quad P_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Якщо крива задана рівняннями у параметричній формі, то

$$P_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Обчислення площі поверхні обертання у полярних координатах.

$$P_p = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Приклад 8.1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t, \\ 2x dx = dt, x dx = \frac{dt}{2}, \\ \text{при } x = 0 \quad t = 1, \\ \text{при } x = 1 \quad t = 2, \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \cdot (2^{3/2} - 1).$$

Приклад 8.2. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \left. \begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt, \\ \text{при } x = 0 \quad t = 1, \\ \text{при } x = \frac{\pi}{2} \quad t = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 8.3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= \left. \begin{array}{l} x = u, \cos x dx = dv, \\ dx = du, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= \cos x \Big|_0^{\pi} = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Розділ 9. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

Література: [1] глава 8, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.3, 1.9.

Основні поняття і визначення

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує незалежні змінні, невідому функцію та її похідні різних порядків. Якщо невідома функція залежить від одного аргументу, то такі диференціальні рівняння називаються звичайними. Якщо невідома функція залежить від двох або більшого числа аргументів, то такі диференціальні рівняння називаються диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Будемо позначати незалежну змінну через x , а невідому функцію через y . Тоді диференціальне рівняння (звичайне) запишеться у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, що входить в дане рівняння.

Будь-яка функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє заданому диференціальному рівнянню, тобто яка обертає його в тотожність при заміні y і його похідних на $\varphi(x)$ і її похідні, називається розв'язком даного диференціального рівняння.

Якщо функція, що задовольняє даному диференціальному рівнянню, представлена у вигляді $\Phi(x, y) = 0$ або параметрично, то вона називається інтегралом даного диференціального рівняння.

Графік розв'язку (інтеграла) диференціального рівняння називається інтегральною кривою даного диференціального рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку.

Загальний вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{9.1}$$

або, якщо вдається розв'язати це рівняння відносно похідної

$$y' = f(x, y) \tag{9.1'}$$

Для рівняння (9.1') справедлива наступна теорема про існування і єдиність розв'язку. Якщо в рівнянні (9.1') функція $f(x, y)$ і її частинна

похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області, що містить точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє умові, що при $x = x_0$ $y = y_0$.

Умова, що при $x = x_0$ $y = y_0$ називається початковою умовою і записується наступним чином:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0. \quad (9.2)$$

Розв'язок $y = \varphi(x)$ (інтеграл $\Phi(x, y) = 0$) рівняння (9.1), що задовольняє початковій умові (9.2) називається *частинним розв'язком (частинним інтегралом)* рівняння (9.1), що задовольняє заданій початковій умові (9.2).

Розв'язання диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (9.1) при заданій початковій умові (9.2) називається *задачею Коші*.

Розв'язок $y = \varphi(x, C)$ (інтеграл $\Phi(x, y, C) = 0$), що залежить від довільної сталої C , називається *загальним розв'язком (загальним інтегралом)* рівняння (9.1), якщо шляхом підбору довільної сталої C з нього можна отримати частинний розв'язок, що задовольняє можливій початковій умові (9.2).

Для визначення довільної сталої C достатньо в загальний розв'язок (інтеграл) підставити значення x_0 і y_0 з (9.2) і розв'язати рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ (або $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$) відносно C .

Диференціальне рівняння (9.1) геометрично можна інтерпретувати наступним чином. Нехай $y = \varphi(x, C)$ – загальний розв'язок рівняння (9.1), тобто множина інтегральних кривих рівняння (9.1) в деякій області D площини Oxy , в якій визначена функція $f(x, y)$. Рівняння (9.1) дає зв'язок між координатами точки $M(x; y)$ області D і значенням похідної в даній точці, тобто кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої в даній точці. Переходячи від точки до точки в області D , отримуємо поле напрямків інтегральних кривих.

Геометрично інтегрування рівняння (9.1) – це знаходження таких кривих, які в кожній точці торкаються поля напрямків.

Геометричне місце точок площини, для яких виконується умова $\frac{dy}{dx} = C$, де $C - const$ називається *ізокліною* диференціального рівняння (9.1). При зміні C отримаємо нову ізокліну даного диференціального рівняння. Звідси випливає, що рівняння ізокліни, яка відповідає постійній C , має вигляд $f(x, y) = C$.

Диференціальні рівняння I порядку з відокремлюваними змінними.

1. Рівняння, що розв'язане відносно похідної і не містить невідомої функції.

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (9.3)$$

Відокремимо змінні. Для цього перетворимо рівняння (9.3) таким чином, щоб з одного боку від знака рівності був присутній тільки x , а з іншого тільки y .

$$dy = f(x)dx.$$

Проінтегрувавши останню рівність почленно, отримаємо.

$$\int dy = \int f(x)dx.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Тут і далі символ інтеграла означає будь-яку одну первісну.

Частинний розв'язок рівняння (9.3), що задовольняє заданій початковій умові $y|_{x=x_0} = y_0$, часто буває зручно записувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою границею. Дійсно, первісну функції $f(x)$ можна записати у вигляді

$$\int_{x_0}^x f(t)dt + C.$$

Оскільки при $x = x_0$ $y = y_0$, то

$$y_0 = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt}_{=0} + C,$$

тобто

$$C = y_0.$$

Звідси випливає, що частинний розв'язок рівняння (9.3), що задовольняє заданій початковій умові $y|_{x=x_0} = y_0$, може бути записаний у вигляді

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0.$$

2. Рівняння в диференціалах

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0, \quad (9.4)$$

де множником при dx стоїть функція, яка може залежати тільки від x , а множником при dy стоїть функція, яка може залежати тільки від y , називається *рівнянням з відокремленими змінними*.

Проінтегруємо кожний доданок рівняння (9.4) по своїй змінній, тобто вважаючи, що y також незалежна змінна. Отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння (9.4).

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

3.1. Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

де права частина – це добуток двох функцій, одна з яких не може залежати від y , а інша не може залежати від x , називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*. Відокремлюючи змінні отримаємо

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Тоді загальний інтеграл

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

3.2. Рівняння у диференціалах вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x) \cdot f_4(y)dy = 0$$

також є *рівнянням з відокремлюваними змінними*, оскільки розділивши його на $f_2(y)f_3(x)$ отримаємо рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0.$$

Тоді загальний інтеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

Однорідні рівняння I порядку.

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n -го виміру* відносно змінних x і y , якщо при заміні x і y на λx і λy отримуємо ту ж функцію, помножену на λ^n , тобто якщо має місце тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^n f(x, y),$$

де λ – довільний параметр; n – вимір або степінь однорідності.

Якщо $n = 0$, тобто якщо $f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y)$, то така функція називається *однорідною функцією нульового виміру*.

Наприклад, $f(x, y) = \sin \frac{y}{x}$ – однорідна функція нульового виміру,

$f(x, y) = ax + by$ – однорідна функція першого виміру, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ –

однорідна функція виміру $\frac{2}{3}$, $f(x, y) = x^2 \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ – однорідна функція другого виміру.

Диференціальне рівняння I порядку вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9.5}$$

називається *однорідним* відносно x і y у тому випадку, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру. Оскільки в цьому випадку $f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y)$, то, користуючись довільним вибором параметра λ ,

покладемо $\lambda = \frac{1}{x}$. Тоді

$$f(x, y) = f\left(1; \frac{y}{x}\right),$$

тобто однорідна функція нульового виміру залежить тільки лише від відношення змінних. Тому рівняння (9.5) переходить у рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (9.5')$$

Введемо нову невідому функцію $\frac{y}{x} = u(x)$, тобто покладемо, що $y = u(x) \cdot x$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u(x)$$

і з рівняння (9.5') отримаємо

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(1, u). \quad (9.5'')$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні.

$$\frac{du}{dx} \cdot x = f(1, u) - u, \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Ми прийшли до рівняння з відокремленими змінними. Проінтегрувавши його почленно отримаємо загальний інтеграл рівняння (9.5'').

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Визначивши з цього рівняння $u(x)$, зробимо зворотну підстановку

$u(x) = \frac{y}{x}$. Це і буде загальний інтеграл рівняння (9.5).

Зауваження. Рівняння у диференціалах вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

також називається *однорідним*, якщо функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру, оскільки відношення двох однорідних функцій однакового виміру дає однорідну функцію нульового виміру.

Лінійні рівняння I порядку.

Лінійним рівнянням I порядку називається рівняння, яке містить невідому функцію і її похідну лише в першому степені і не містить їх добутку. Якщо x – незалежна змінна, а $y(x)$ – невідома функція, то загальний вигляд лінійного рівняння може бути записаний наступним чином:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (9.6)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції або сталі.

Будемо шукати розв'язок рівняння (9.6) у вигляді добутку двох функцій, тобто у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$, припускаючи, що ми вводим нову функцію, наприклад, $u(x)$, а $v(x)$ будемо розглядати як допоміжну функцію, яка вибирається довільно. Тоді $y' = u'v + v'u$. Підставимо y і y' у рівняння (9.6). Отримаємо

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)$$

або

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x). \quad (*)$$

Скористаємося довільністю вибору допоміжної функції v і виберемо її таким чином, щоб вираз, який стоїть у квадратних дужках в рівнянні (*) дорівнював нулю, тобто щоб

$$v' + P(x)v = 0.$$

Тоді

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln \overline{C_1},$$

$$\ln \left| \frac{v}{\overline{C_1}} \right| = -\int P(x)dx, \quad \frac{v}{\overline{C_1}} = e^{-\int P(x)dx},$$

де $C_1 = \pm \overline{C_1}$. Остаточно

$$v = C_1 e^{-\int P(x)dx}. \quad (9.7)$$

Підставляючи знайдене значення v у рівняння (*), отримаємо

$$C_1 e^{-\int P(x)dx} \frac{du}{dx} = Q(x), \quad C_1 \frac{du}{dx} = Q(x) e^{\int P(x)dx},$$

$$C_1 \int du = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx, \quad u = \frac{1}{C_1} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Оскільки $y = uv$, то загальний інтеграл лінійного рівняння (9.6)

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Оскільки C_1 скорочується, то надалі будемо вважати $C_1 = 1$ і брати для v замість загального розв'язку (9.7) частинний розв'язок

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Рівняння Бернуллі.

Розглянемо більш загальне рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad (9.8)$$

де α – будь-яке дійсне число. При $\alpha = 0$ ми отримаємо лінійне рівняння, при $\alpha = 1$ – рівняння з відокремлюваними змінними, при всіх інших значеннях α це рівняння називається *рівнянням Бернуллі*.

Покажемо, що рівняння (9.8) можна звести до лінійного рівняння. Для цього перепишемо його наступним чином

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Покладемо $y^{1-\alpha} = z(x)$. Тоді

$$(1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{dz}{dx}$$

і ми отримаємо

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

або

$$\frac{dz}{dx} + P(x)(1-\alpha)z = Q(x)(1-\alpha).$$

Це лінійне рівняння I порядку відносно функції z змінної x .

Рівняння Бернуллі з самого початку можна розв'язувати як лінійне рівняння, тобто шукати його розв'язок у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$.

Приклад 9.1. Розв'язати рівняння.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Розв'язання: Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Оскільки рівні диференціали, то рівні й інтеграли від цих виразів. Вони можуть відрізнятись хіба лише тільки може бути на довільну сталу

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln \bar{C}.$$

Довільну сталу додаємо з будь-якої сторони від знака рівності та в будь-якому вигляді з урахуванням подальших перетворень.

$$\ln|y| = \ln|\bar{C}x|; \quad y = Cx,$$

де $C = \pm\bar{C}$ – загальний розв’язок.

Приклад 9.2. Розв’язати рівняння.

$$y' = y.$$

Розв’язання:

$$\frac{dy}{dx} = y; \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx; \quad \ln|y| = x + \ln\bar{C}; \quad \ln\frac{|y|}{\bar{C}} = x; \quad \frac{y}{\bar{C}} = e^x,$$

де $C = \pm\bar{C}$; $y = Ce^x$ – загальний розв’язок.

Приклад 9.3. Розв’язати рівняння

$$y(y-x)dx + x^2dy = 0;$$

Розв’язання:

$$x^2dy = y(x-y)dx; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{yx - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad \frac{y}{x} = u;$$

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u; \quad \frac{du}{dx}x + u = u - u^2; \quad -\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln\bar{C} = \ln|\bar{C}x|; \quad \frac{x}{y} = \ln Cx,$$

де $C = \pm\bar{C}$; $y = \frac{x}{\ln Cx}$ – загальний розв’язок.

Приклад 9.4. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y' - ay = e^{bx},$$

де a, b – const.

Розв’язання:

$$y = uv, \quad y' = u'v + v'u, \quad u'v + v'u - auv = e^{bx},$$

$$u'v + u(v' - av) = e^{bx} \quad (*)$$

Визначимо функцію v таким чином, щоб вираз у дужках у рівнянні (*) дорівнював нулю.

$$v' - av = 0, \quad \frac{dv}{dx} = av, \quad \int \frac{dv}{v} = a \int dx, \quad \ln|v| = ax, \quad v = e^{ax}.$$

Підставимо отриману функцію v у рівняння (*). Отримаємо

$$u'e^{ax} = e^{bx}, \quad e^{ax} \frac{du}{dx} = e^{bx}, \quad \int du = \int e^{(b-a)x} dx,$$

$$u = \frac{1}{b-a} e^{(b-a)x} + C, \text{ якщо } a \neq b; \quad u = x + c, \text{ якщо } a = b.$$

Тоді загальний розв'язок

$$y = e^{ax} \left(\frac{1}{b-a} e^{(b-a)x} + C \right), \text{ якщо } a \neq b; \quad y = e^{ax} (x + c), \text{ якщо } a = b.$$

Приклад 9.5. Знайти загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння

$$3x^2(y+1)dx + (x^3+1)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання: це рівняння з відокремлюваними змінними. Розділимо обидві частини цього рівняння на $(y+1)(x^3+1) \neq 0$. Отримаємо

$$\frac{3x^2}{x^3+1} dx + \frac{dy}{y+1} = 0, \quad \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = - \int \frac{dy}{y+1},$$

$$\ln|x^3+1| = -\ln|y+1| + \ln \bar{C}, \quad (x^3+1)(y+1) = C,$$

де $C = \pm \bar{C}$. Таким чином, загальний інтеграл $(x^3+1)(y+1) = C$.

Підставимо в загальний інтеграл початкову умову.

$$(0^3+1)(1+1) = C, \quad C = 2.$$

Тоді частинний інтеграл

$$(x^3+1)(y+1) = 2.$$

Приклад 9.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Розв'язання:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda y} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \lambda^0 f(x, y).$$

Звідси випливає, що функція $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ – однорідна функція

нульового виміру. Тому це рівняння є однорідним. Зробимо підстановку $\frac{y}{x} = u$.

Тоді $y = ux$, $y' = u'x + u$. Дане рівняння запишеться

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u, \quad u'x = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними. Відокремимо змінні

$$u du = \frac{dx}{x}, \quad \int u du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \bar{C}, \quad u^2 = 2\ln|x| + C,$$

де $C = 2\bar{C}$.

Зробимо зворотню підстановку. Отримаємо

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + C, \quad y^2 = x^2(2\ln|x| + C) \text{ – загальний інтеграл.}$$

Приклад 9.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x dy - \left(y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) dx = 0.$$

Розв'язання. Розділимо обидві частини цього рівняння на $x dx$.

Отримаємо

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0, \quad y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \operatorname{tg} \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \lambda^0 f(x, y).$$

Звідси випливає, що функція $f(x, y) = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ – однорідна функція нульового

виміру. Тому це рівняння є однорідним. Зробимо підстановку $\frac{y}{x} = u$. Тоді

$y = ux$, $y' = u'x + u$. Дане рівняння запишеться

$$u'x + u = u + \operatorname{tgu}, \quad \frac{du}{dx} x = \operatorname{tgu}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними. Відокремимо змінні

$$\frac{du}{\operatorname{tgu}} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\operatorname{tgu}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln \bar{C}, \quad \sin u = Cx,$$

де $C = \pm \bar{C}$.

Зробимо зворотню підстановку. Отримаємо

$$\sin \frac{y}{x} = Cx \text{ – загальний інтеграл.}$$

Приклад 9.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вид $y' + P(x)y = Q(x)$. Тому це лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Будемо шукати його розв'язок у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$. Підставимо вирази для y і y' в дане рівняння

$$\begin{aligned} u'v + v'u + 2xuv &= x^2 e^{-x^2}, \\ u'v + u(v' + 2xv) &= x^2 e^{-x^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз в дужках у рівнянні (*) дорівнював нулю, тобто

$$v' + 2xv = 0. \quad (**)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + 2xv = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -2xv, \quad \frac{dv}{v} = -2x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx, \\ \ln|v| = -2 \cdot \frac{x^2}{2}, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ми шукаємо один будь-який ненульовий розв'язок рівняння (**). Тому довільну постійну додавати не потрібно.

Підставимо отриманий вираз для функції v в рівняння (*). Отримаємо

$$u' e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2}, \quad u' = x^2.$$

Ми отримали диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{du}{dx} = x^2, \quad du = x^2 dx, \quad u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Отже,

$$y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) e^{-x^2} \text{ – загальний розв'язок.}$$

Розділ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.

Література: [1] глава 8, §§ 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3.

Загальні відомості.

Нехай x – незалежна змінна, y – невідома функція. Загальний вигляд звичайного диференціального рівняння n -го порядку може бути записаний у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно старшої похідної, то його можна записати у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (10.1)$$

Для рівняння (10.1) справедлива наступна *теорема про існування і єдиність розв'язку*. Якщо в рівнянні (10.1) функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна разом зі своїми частинними похідними за аргументами $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ в деякій області, що містить значення $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умовам

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (10.2)$$

Умови (10.2) називаються *початковими умовами*. Зокрема, для рівняння другого порядку ($n = 2$)

$$y'' = f(x, y, y') \quad (10.3)$$

початковими умовами будуть

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \quad (10.4)$$

Загальним розв'язком рівняння (10.3) називається розв'язок $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, що залежить від двох довільних сталих C_1 і C_2 , якщо ці сталі можуть бути підібрані таким чином, щоб задовольнити будь-якій початковій системі умов (10.4).

Якщо загальний розв'язок рівняння (10.3) представлений неявно у вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, то він називається *загальним інтегралом* рівняння (10.3).

Частинним розв'язком рівняння (10.3) називається загальний розв'язок при конкретних значеннях довільних сталих C_1 і C_2 . Графік частинного розв'язку називається *інтегральною кривою*.

Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку.

1. Найпростішим випадком диференціального рівняння другого порядку, що допускає зниження порядку, є рівняння, яке розв'язано відносно другої похідної і не має в явному вигляді невідомої функції та її похідної, тобто рівняння вигляду

$$y'' = f(x). \quad (10.5)$$

Звідси

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

і загальний розв'язок

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2.$$

2. Диференціальне рівняння другого порядку, що розв'язане відносно другої похідної і не має в явному вигляді невідомої функції, тобто рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y') \quad (10.6)$$

може бути зведено до рівняння першого порядку.

Дійсно, позначимо $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$. Підставимо вирази для першої і другої похідних в (10.6). Отримаємо

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Це рівняння першого порядку відносно функції p . Розв'язуючи його, знайдемо

$$p = p(x, C_1).$$

Так як $p = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = p(x, C_1)$$

або

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

3. Диференціальне рівняння другого порядку, що розв'язане відносно другої похідної і не містить в явному вигляді незалежну змінну, тобто рівняння вигляду

$$y'' = f(y, y') \quad (10.7)$$

може бути зведено до рівняння першого порядку. Дійсно, позначимо $y' = p(y)$.

Тоді

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

або

$$y'' = p'p.$$

Підставимо першу і другу похідні в (10.7). Отримаємо

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p)$$

Це рівняння першого порядку відносно функції p . Розв'язуючи його, знайдемо

$$p = p(y, C_1)$$

або

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Відокремимо змінні

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = \int dx, \quad \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

Ми отримали загальний інтеграл рівняння (7).

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку називається рівняння першого степеня відносно невідомої функції та її першої і другої похідних, тобто рівняння вигляду

$$b_0 y'' + b_1 y' + b_2 y = g(x). \quad (10.8)$$

Тут b_0, b_1, b_2 і $g(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку (a, b) функції змінної x або сталі, причому $b_0 \neq 0$. Розділивши всі члени рівняння (10.8) на b_0 , приходимо до рівняння вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (10.9)$$

де $a_1 = \frac{b_1}{b_0}, a_2 = \frac{b_2}{b_0}, f(x) = \frac{g(x)}{b_0}$.

Функція $f(x)$ називається *правою частиною* лінійного диференціального рівняння (10.9). Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається *лінійним неоднорідним* або рівнянням з правою частиною. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння приймає вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (10.10)$$

і називається *лінійним однорідним* або *рівнянням без правої частини*.

Сукупність двох лінійно незалежних у проміжку (a, b) розв'язків лінійного однорідного рівняння (10.10) називається *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння.

Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два лінійно незалежних у проміжку (a, b) розв'язки лінійного однорідного рівняння (10.10) (фундаментальна система розв'язків), то його загальний розв'язок знаходиться за формулою

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (10.11)$$

де C_1 і C_2 – сталі.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$y'' + p y' + q y = 0, \quad (10.12)$$

де p і q – сталі дійсні числа.

Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \text{ де } k = \text{const}.$$

Тоді $y' = k e^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Підставивши вирази для y, y', y'' в рівняння (10.12), отримаємо

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0, \quad e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Так як $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (10.13)$$

Рівняння (10.13) називається *характеристичним рівнянням* даного диференціального рівняння (10.12). Характеристичне рівняння є рівнянням другого степеня (квадратним) і тому має два корені

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

1. Корені характеристичного рівняння *дійсні різні*: $k_1 \neq k_2$. Тоді загальний розв'язок рівняння (10.12) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння *дійсні рівні*: $k_1 = k_2$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (10.5) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

3. Корені характеристичного рівняння *комплексні спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (10.12) має вигляд

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Якщо рівняння (10.12) має вигляд $y'' + qy = 0$, $q > 0$, то корені його характеристичного рівняння $k^2 + q = 0$ *чисто уявні* $k_{1,2} = \pm i \sqrt{q} = \pm i \beta$, де $\beta = \sqrt{q}$ ($\alpha = 0$) і загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.

Розглянемо основні властивості лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (10.14)$$

де a_1 , a_2 і $f(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку (a, b) функції змінної x або сталі.

Лінійне однорідне рівняння, ліва частина якого збігається з лівою частиною рівняння (10.14), називається *відповідним* йому однорідним рівнянням.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (10.15)$$

Теорема *про структуру загального розв'язку ЛНДР*. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10.14) складається із суми якого-небудь частинного розв'язку цього рівняння y^* і загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння \bar{y} , тобто

$$y = \bar{y} + y^*. \quad (10.16)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (10.17)$$

де p і q – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана неперервна на деякому інтервалі (a, b) функція.

Загальний розв'язок рівняння (10.17), відповідно до теореми про структуру загального розв'язку ЛНДР складається із суми якого-небудь частинного розв'язку цього рівняння y^* і загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння \bar{y} . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (10.17) іноді, якщо його права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд можна знайти, застосувавши *метод невизначених коефіцієнтів*.

Зауваження (це зауваження відноситься до будь-яких лінійних диференціальних рівнянь з правою частиною, тобто і до рівнянь зі змінними коефіцієнтами). Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x)$ є сумою скінченного числа різних функцій, то його частинний розв'язок дорівнює сумі частинних розв'язків, що відповідають кожній функції окремо.

Нехай $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Тоді рівняння (17) приймає вигляд

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \quad (10.18)$$

Нехай y_1^* і y_2^* – відповідно частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \quad \text{і} \quad y'' + py' + qy = f_2(x).$$

Тоді функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ є частинним розв'язком рівняння (10.18).

Цей метод називається *методом суперпозиції (накладання розв'язків)*. Він дозволяє спростити відшукування частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

1. Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (10.19)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня $n \geq 0$. Можливі наступні окремі випадки.

1.1. Число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (10.20)$$

Частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x), \quad (10.21)$$

де $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$ – многочлен того ж степеня, що і $P_n(x)$; $A_n, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити так, щоб вираз (10.21) задовольняв рівнянню (10.17).

1.2. Число α є простим (однократним) коренем характеристичного рівняння (10.20). У цьому випадку шукати частинний розв'язок y^* у формі (10.21) не можна. Потрібно у виразі (10.21) замість $Q_n(x)$ взяти многочлен степеня $n+1$, але без вільного члена, який все одно зникне при диференціюванні, тобто шукати частинний розв'язок y^* у вигляді

$$y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x).$$

1.3. Число α є двократним коренем характеристичного рівняння (10.20). Потрібно у виразі (10.21) замість $Q_n(x)$ взяти многочлен степеня $n+2$, але без вільного члена і члена першого степеня, які все одно зникнуть при диференціюванні, тобто шукати частинний розв'язок y^* у вигляді

$$y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x).$$

Усі наведені вище результати залишаються в силі і в тому випадку, коли α – комплексне число.

Приклади повних многочленів

n	$P_n(x)$
0	A
1	$Ax + B$
2	$Ax^2 + Bx + C$
.....

2. Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x], \quad (10.22)$$

де α і β – дійсні числа, $P_n(x)$ і $R_m(x)$ – многочлени відповідно степенів $n \geq 0$ і $m \geq 0$.

2.1. Число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (10.20).

Частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} [U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x], \quad (10.23)$$

де $U_s(x)$ і $V_s(x)$ – многочлени однакового степеня s з невідомими коефіцієнтами, які потрібно визначити так, щоб вираз (10.23) задовольняв рівнянню (10.17); s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ і $R_m(x)$, тобто $s = \max\{n, m\}$.

2.2. Число $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (10.20).

Частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді

$$y^* = x e^{\alpha x} [U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x].$$

Зазначимо, що многочлени $U_s(x)$ і $V_s(x)$ повинні бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до s , і мати різні невизначені коефіцієнти при однакових степенях x .

Приклад 10.1. Розв'язати рівняння $y'' = \cos 2x + \sin 3x$.

Розв'язання.

$$y' = \int (\cos 2x + \sin 3x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \sin 3x + C_1 x + C_2.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = x^2 + \cos x$.

Розв'язання.

$$y' = \int (x^2 + \cos x) dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + C_1,$$
$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} + \sin x + C_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1 x + C_2.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \sqrt{y'}$.

Розв'язання. Це рівняння зручно розв'язувати як рівняння вигляду $y'' = f(x, y')$, тобто використовувати підстановку $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$ і далі маємо

$$p' = \sqrt{p}, \quad \frac{dp}{dx} = \sqrt{p}, \quad \int \frac{dp}{\sqrt{p}} = \int dx,$$
$$2\sqrt{p} = x + C_1, \quad \sqrt{p} = \frac{1}{2}(x + C_1), \quad p = \frac{1}{4}(x + C_1)^2, \quad y' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$
$$y = \frac{1}{4} \int (x + C_1)^2 d(x + C_1) = \frac{1}{4} \frac{(x + C_1)^3}{3} + C_2 = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.4. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Розв'язання.

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}.$$

Це рівняння вигляду $y'' = f(x, y')$. Тому

$$y' = p(x), \quad y'' = p'.$$

Тоді

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}.$$

Це однорідне рівняння. Зробимо підстановку $\frac{p}{x} = u$. Тоді $p = ux$,

$p' = u'x + u$. Дане рівняння запишеться

$$\begin{aligned}
u'x + u &= u \ln u, & u'x &= u(\ln u - 1), & \frac{du}{dx}x &= u(\ln u - 1), \\
\frac{du}{u(\ln u - 1)} &= \frac{dx}{x}, & \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} &= \int \frac{dx}{x}, & \int \frac{d(\ln u - 1)}{(\ln u - 1)} &= \int \frac{dx}{x}, \\
\ln|\ln u - 1| &= \ln|x| + \ln \bar{C}_1, & \ln|\ln u - 1| &= \ln|\bar{C}_1 x|, \\
\ln|\ln u - 1| &= \ln|\bar{C}_1 x|, & \ln u - 1 &= C_1 x, \text{ де } C_1 = \pm \bar{C}_1, \\
\ln u &= C_1 x + 1, & u &= e^{C_1 x + 1}, & \frac{p}{x} &= e^{C_1 x + 1}, \\
p &= x e^{C_1 x + 1}, & y' &= x e^{C_1 x + 1}, \\
y &= \int x e^{C_1 x + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad e^{C_1 x + 1} dx = dv, \\ dx = du, \quad v = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \end{array} \right| = \\
&= \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x + 1} dx = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2.
\end{aligned}$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''(y-1) = 2y'^2$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
y' &= p(y), & y'' &= p'p, \\
p'p(y-1) &= 2p^2, & p[p'(y-1) - 2p] &= 0.
\end{aligned}$$

Тоді

$$p = 0 \text{ або } p'(y-1) - 2p = 0.$$

З першого рівняння $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = C$ – особливий розв'язок

З другого рівняння

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dy}(y-1) - 2p &= 0, & \frac{dp}{dy}(y-1) &= 2p, & \int \frac{dp}{p} &= 2 \int \frac{d(y-1)}{y-1}, \\
\ln|p| &= 2 \ln|y-1| + \ln \bar{C}_1, & \ln|p| &= \ln|\bar{C}_1 (y-1)^2|, \\
p &= C_1 (y-1)^2, & \text{де } C_1 &= \pm \bar{C}_1,
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2, \quad \int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2} = C_1 \int dx, \quad -\frac{1}{y-1} = C_1(x+C_2),$$

$$-\frac{1}{C_1(x+C_2)} = y-1, \quad y = 1 - \frac{1}{C_1(x+C_2)}.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.6. Знайти загальний розв'язок рівняння $(y-1)y'' = 2y'^2$.

Розв'язання. Це рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну, і може бути зведено до рівняння вигляду $y'' = f(y, y')$. Тоді

$$y' = p(y), \quad y'' = p'p.$$

$$(y-1)p'p = 2p^2, \quad (y-1)\frac{dp}{dy}p = 2p^2, \quad (y-1)\frac{dp}{dy} = 2p.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y-1}, \quad \int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y-1}, \quad \ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln\bar{C}_1,$$

$$\ln|p| = \ln|(y-1)^2\bar{C}_1|, \quad p = C_1(y-1)^2, \quad \text{де } C_1 = \pm\bar{C}_1,$$

$$y' = C_1(y-1)^2, \quad \frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2, \quad \frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx, \quad \int \frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 \int dx,$$

$$-\frac{1}{y-1} = C_1x + C_2, \quad y-1 = -\frac{1}{C_1x + C_2}, \quad y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}.$$

Ми отримали загальний розв'язок.

Приклад 10.7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння даного диференціального рівняння має вигляд $k^2 + 5k + 6 = 0$. Воно виходить з заданого рівняння заміною в ньому похідних шуканої функції величиною k у степені, що дорівнює порядку похідної. Сама функція y замінюється одиницею.

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}, \quad k_1 = -3, \quad k_2 = -2.$$

Тоді загальний розв'язок $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$.

Приклад 10.8. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання.

$$k^2 - 2k + 1 = 0, (k - 1)^2 = 0, k_{1,2} = 1,$$

$y = e^x (C_1 + C_2 x)$ – загальний розв'язок.

$$y' = e^x (C_1 + C_2 x) + e^x C_2 = e^x (C_1 + C_2 + C_2 x).$$

З початкових умов маємо

$$\begin{cases} 2 = C_1, \\ 1 = C_1 + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Тоді $y = e^x (2 - x)$ – частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам (розв'язок задачі Коші).

Приклад 10.9. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання.

$$k^2 + 4k + 13 = 0, k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2}, k_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Тоді загальний розв'язок $y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад 10.10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'яжемо його характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0$.

$$(k - 4)^2 = 0, k_{1,2} = 4.$$

Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\bar{y} = e^{4x} (C_1 + C_2 x).$$

Права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad \alpha = 4, \quad n = 0.$$

Оскільки число $\alpha = 4$ є двократним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд $y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$. У нашому випадку

$$y^* = Ax^2 e^{4x},$$

$$y^{*'} = A(2xe^{4x} + 4x^2 e^{4x}) = 2Ae^{4x} (2x^2 + x),$$

$$y^{*''} = 2A[4e^{4x} (2x^2 + x) + e^{4x} (4x + 1)] = 2Ae^{4x} [4(2x^2 + x) + (4x + 1)] =$$

$$= 2Ae^{4x} (8x^2 + 8x + 1).$$

Підставимо y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ в задане рівняння. Отримаємо

$$2Ae^{4x} (8x^2 + 8x + 1) - 8 \cdot 2Ae^{4x} (2x^2 + x) + 16 \cdot Ax^2 e^{4x} = e^{4x},$$

Скоротимо на $e^{4x} \neq 0$ і зведемо подібні доданки

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Таким чином $y^* = \frac{1}{2} x^2 e^{4x}$.

Тоді загальний розв'язок

$$y = \bar{y} + y^* = e^{4x} (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{2} x^2 e^{4x} = e^{4x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right).$$

Приклад 10.11. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$. Розв'яжемо його характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$.

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm i.$$

Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\bar{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x], \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad n = 0, \quad m = 0.$$

Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 + i$ є простим коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y^* = x e^{\alpha x} [U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x].$$

У нашому випадку

$$s = \max\{n, m\} = 0, \quad y^* = x e^x (A \cos x + B \sin x),$$

$$y^{*'} = (e^x + x e^x)(A \cos x + B \sin x) + x e^x (-A \sin x + B \cos x) =$$

$$= e^x (A \cos x + B \sin x) + x e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x]$$

$$y^{*''} = e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e^x + x e^x \right) \left[(A+B) \cos x + (B-A) \sin x \right] + x e^x \left[(B-A) \cos x - (A+B) \sin x \right] = \\
& = 2e^x \left[(A+B) \cos x + (B-A) \sin x \right] + 2x e^x (B \cos x - A \sin x).
\end{aligned}$$

Підставимо y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ в задане рівняння. Отримаємо

$$\begin{aligned}
& 2e^x \left[(A+B) \cos x + (B-A) \sin x \right] + 2x e^x (B \cos x - A \sin x) - \\
& - 2 \left[\left(e^x + x e^x \right) (A \cos x + B \sin x) + x e^x (-A \sin x + B \cos x) \right] + \\
& + 2x e^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \sin x, \\
& 2B \cos x - 2A \sin x = \sin x.
\end{aligned}$$

Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 2B = 0 \\ \sin x & -2A = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким чином $y^* = -\frac{1}{2} x e^x \cos x$.

Тоді загальний розв'язок

$$\begin{aligned}
y = \bar{y} + y^* & = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{2} x e^x \cos x = \\
& = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \right).
\end{aligned}$$

Розділ 11. Числові ряди.

Література: [1] глава 9, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.

Поняття числового ряду.

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ (послідовність вважається заданою, якщо відомий закон, за яким можна обчислити будь-який її член u_n за його номером n). Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (11.1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ – *членами ряду*; u_n – *загальним членом ряду*. Найчастіше загальний член ряду задається формулою $u_n = f(n)$.

Сума кінцевого числа n перших членів ряду

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

називається n -ою *частковою (частинною) сумою ряду*.

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots$$

Ряд (11.1) називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум має кінцеву границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

При цьому число S називається *сумою ряду* і можна записати

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує, тобто послідовність часткових сум не має границі, або він дорівнює нескінченності, то ряд (11.1) називається *розбіжним* і суми не має.

Нескінченна геометрична прогресія $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$) збігається при

$|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

Основні властивості збіжних числових рядів.

1. Якщо ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ збігається і має суму S , то ряд, отриманий множенням всіх його членів на одне і те ж число a $au_1 + au_2 + au_3 + \dots + au_n + \dots$, також збігається і має суму aS .

2. Якщо ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (a)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (б)$$

збігаються і їх суми відповідно дорівнюють S і σ , то збігається і ряд, отриманий почленним додаванням (відніманням) даних рядів

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots, \quad (в)$$

причому його сума дорівнює $S \pm \sigma$.

3. Якщо збігається ряд (11.1), то збігається і ряд, отримуваний з даного ряду відкиданням декількох його членів, і навпаки, якщо збігається ряд, отримуваний з даного ряду (11.1) відкиданням декількох його членів, то збігається і сам даний ряд.

Таким чином, на збіжність ряду не впливає відкидання чи приписування будь-якого кінцевого числа членів.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$, отримуваний з даного ряду (11.1) відкиданням n перших членів, називається n -им залишком ряду.

Зазвичай збіжність ряду з'ясовують, не застосовуючи безпосередньо визначення збіжності, а користуючись ознаками збіжності.

Необхідна ознака збіжності ряду.

Якщо ряд (11.1) збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Підкреслимо, що розглянута ознака є тільки необхідною, але не достатньою. З того, що загальний член ряду прямує до нуля, не випливає, що ряд збігається. Він може і розбігатися.

Висновок (достатня ознака розбіжності).

Якщо загальний член ряду (11.1) u_n не прямує до нуля при необмеженому зростанні n , тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Ряди з додатними членами. Достатні ознаки збіжності

Рядами з додатними членами з метою спрощення нумерації їх членів будемо вважати ряди, члени яких невід'ємні, тобто $u_n \geq 0$.

Ознаки порівняння.

Нехай дані два ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (11.2)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (11.3)$$

Перша ознака порівняння. Якщо, починаючи з деякого номера $n = N$, виконується нерівність $u_n \leq v_n$, то зі збіжності ряду (11.3) випливає збіжність ряду (11.2); з розбіжності ряду (11.2) випливає розбіжність ряду (11.3).

З першої ознаки порівняння випливає більш зручна на практиці *друга ознака порівняння (ознака порівняння у граничній формі)*. Якщо існує границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ ($0 \leq k \leq +\infty$), то при $k < +\infty$ зі збіжності ряду (11.3) випливає

збіжність ряду (11.2); при $k > 0$ з розбіжності ряду (11.3) випливає розбіжність ряду (11.2).

Таким чином, якщо існує кінцева і відмінна від нуля границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$, то обидва ряди (11.2) і (11.3) одночасно збігаються або

одночасно розбігаються.

Ознака Даламбера.

Якщо для ряду з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (11.4)$$

існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, то при $D < 1$ ряд збігається, при $D > 1$ ряд

розбігається, при $D = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд розбігається.

Підкреслимо, що якщо $D = 1$, то потрібно застосувати іншу ознаку або безпосередньо визначення збіжності.

Ознаку Даламбера зручно застосовувати, коли в загальному члені ряду присутні факторіали, показникові функції.

Факторіал.

Символом $n!$ прийнято позначати добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Вважають $0! = 1$. Таким чином

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3!, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3!,$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n(n-1)!,$$

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+2) = (n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+2) = (n+2)(n+1)n!,$$

$$(3n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3n+1), \quad 2n! = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n),$$

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n.$$

Для обчислення факторіалів великих чисел ($n > 69$) використовується

формула Стірлінга $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Подвійний факторіал.

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1),$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = 2^n n!,$$

$$(2n-1)!! (2n)!! = (2n)!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Радикальна ознака Коші.

Якщо для ряду з додатними членами (11.4) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C$,

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ ряд розбігається, при $C = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty$, то ряд розбігається.

Інтегральна ознака Коші.

Нехай дано ряд (11.4), члени якого є значеннями деякої функції $f(x)$ при $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, неперервної додатної монотонно спадної на інтервалі $1 \leq x < +\infty$, тобто $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, $u_3 = f(3)$, ..., $u_n = f(n)$, Тоді даний ряд збігається або розбігається в залежності від того, збігається чи

розбігається невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. Зауважимо, що початковим

значенням номера n замість 1 може бути будь-яке інше натуральне число N . У

цьому випадку функцію $f(x)$ слід розглядати при $x \geq N$ і невласний інтеграл

запишеться
$$\int_N^{+\infty} f(x) dx.$$

Розглянемо *узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле)*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0).$$

При $p > 1$ цей ряд збігається, при $0 < p \leq 1$ розбігається. При $p = 1$ маємо

розбіжний *гармонічний ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Узагальнений гармонічний ряд так само, як і геометричну прогресію, часто буває зручно вибирати в якості ряду для порівняння.

Знакозмінні ряди

Знакозмінним називається ряд, який містить нескінченну множину як додатних, так і від'ємних членів. Окремим випадком знакозмінних рядів є ряди, знаки членів яких чергуються.

Знакопчергові ряди. Знакопчерговим називається ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots \quad (u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (11.5)$$

Для ряду (11.5) має місце наступна достатня ознака.

Ознака Лейбніца (теорема Лейбніца).

Знакопчерговий ряд збігається, якщо абсолютні величини його членів монотонно спадають, а загальний член прямує до нуля, тобто якщо виконуються наступні дві умови:

$$1) u_n > u_{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots; \quad (11.6)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (11.7)$$

При цьому сума ряду додатна і менша його першого члена.

Зауважимо, що ряд

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots + (-1)^n u_n + \dots \quad (u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.8)$$

також є знакопочерговим. Якщо для ряду (11.8) виконуються умови (11.6), (11.7), то він збігається, його сума від'ємна і задовольняє умові $|S| < u_1$.

Висновок. Якщо знакопочерговий ряд (11.5) задовольняє умовам теореми Лейбніца, то при заміні його суми S сумою n перших членів ряду S_n похибка за абсолютною величиною буде менше модуля першого з відкинутих членів, тобто

$$|S - S_n| < u_{n+1}.$$

Дійсно, при такій заміні ми відкидаємо всі члени ряду, починаючи з u_{n+1} . Відкинуті члени ряду в свою чергу утворюють знакопочерговий ряд, сума якого за абсолютною величиною менше першого члена цього ряду, тобто u_{n+1} .

Іншими словами, модуль n -го залишку R_n коли останній задовольняє умовам ознаки Лейбніца, менше модуля $(n+1)$ -го члена цього ряду, тобто

$$|R_n| < u_{n+1}.$$

Зауважимо, що n -ий залишок ряду (11.5)

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots)$$

має знак свого першого члена

$$\text{sign } R_n = \text{sign } u_{n+1}.$$

Ряди (11.5) і (11.8) збігаються і в тому випадку, якщо нерівність (11.6) стає справедливою, починаючи з деякого номера N і умова (11.7) виконується.

Ряди (11.5), (11.8), для яких виконуються умови (11.6), (11.7), називаються рядами лейбніцевського типу.

Абсолютна і умовна збіжності.

У деяких випадках дослідження на збіжність знакозмінного ряду зводиться до дослідження на збіжність ряду з додатними членами.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Нехай дано знакозмінний ряд, члени якого можуть мати довільний знак

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (11.9)$$

Якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин членів даного знакозмінного ряду

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (11.10)$$

то збігається і сам знакозмінний ряд.

Зауважимо, що розглянута ознака збіжності знакозмінного ряду є тільки достатньою, але не необхідною, тобто існують такі збіжні знакозмінні ряди, що ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Знакозмінний ряд (11.9) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів. Якщо ж знакозмінний ряд (11.9) збігається, а ряд (11.10), складений з абсолютних величин його членів, розбігається, то знакозмінний ряд (11.9) називається *умовно (неабсолютно) збіжним рядом*.

Приклад 11.1. Дослідити на збіжність знакосталій числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+4}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд розбігається.}$$

Приклад 11.2. Дослідити на збіжність знакосталій числовий ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots \quad (a)$$

Розв'язання. $u_n = \frac{1}{n^n}$. Візьмемо для порівняння ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (б)$$

Ряд (б) є геометричною прогресією з додатним знаменником $q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

ряд (б) збігається; $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) \Rightarrow ряд (а) збігається.

Приклад 11.3. Дослідити на збіжність знакосталій числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}. \quad (a)$$

Розв'язання. Візьмемо для порівняння розбіжний гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (б)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}} = \left\{ \infty^0 \right\} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{1/n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

(за правилом Лопіталя)

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1}} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \end{bmatrix} \Rightarrow$$

обидва ряди (а) і (б) у сенсі збіжності ведуть себе однаково, тобто ряд (а) розбігається.

Приклад 11.4. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} \quad (a)$$

Розв'язання. Візьмемо для порівняння розбіжний гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (б)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \end{bmatrix} \Rightarrow$$

обидва ряди (а) і (б) у сенсі збіжності ведуть себе однаково, тобто ряд (а) розбігається.

Приклад 11.5. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n}. \quad (a)$$

Розв'язання. Візьмемо для порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (б)$$

Ряд (б) збігається, оскільки це узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле), у якого $p = 2 > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^2}{(n^3+n) \cdot 1} = 1 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \end{bmatrix} \Rightarrow$$

обидва ряди (а) і (б) у сенсі збіжності ведуть себе однаково, тобто ряд (а) збігається.

Приклад 11.6. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}.$$

Розв'язання. $u_n = \frac{2n+1}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} = \frac{2n+3}{3^n \cdot 3}$,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot (2n+1)} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

Приклад 11.7. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}.$$

Розв'язання.

$$u_n = \frac{(2n)!}{n^2}, u_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2} = \frac{(2n)! \cdot (2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2},$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \cdot (2n+1)(2n+2) \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2) \cdot n^2}{(n+1)^2} = \infty \Rightarrow \text{ряд розбігається.}$$

Приклад 11.8. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Розв'язання. $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot (n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{(n+1)^n}$,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot 2^n n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \{1^\infty\} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{ряд збігається } (e \approx 2,72).$$

Приклад 11.9. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}.$$

Розв'язання. $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right] = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n} \right)^{\frac{n}{-1} \cdot (-1)} =$

$$= \frac{1}{3} e^{-1} = \frac{1}{3e} < 1 \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

Приклад 11.10. Дослідити на збіжність знакосталий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)n\sqrt{n}}. \quad (a)$$

Розв'язання. Візьмемо для порівняння ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}. \quad (b)$$

Ряд (б) збігається, оскільки це узагальнений гармонічний ряд, у якого $p = \frac{3}{2} > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n^{3/2}}{(n+1)n\sqrt{n}} = 1 \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \Rightarrow$$

обидва ряди (а) і (б) у сенсі збіжності ведуть себе однаково, тобто ряд (а) збігається.

Приклад 11.11. З'ясувати, чи буде наведений знакозмінний ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots$$

Розв'язання. Знайдемо загальний член даного ряду

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2} + \dots \quad (a)$$

Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \dots \quad (b)$$

Скористаємося другою ознакою порівняння. Візьмемо для порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (B)$$

Ряд (в) розбігається (це розбіжний гармонічний ряд).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-2} = \frac{1}{3} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \Rightarrow$$

обидва ряди (б) і (в) у сенсі збіжності ведуть себе однаково, тобто ряд (б) розбігається.

Ознака Лейбніца:

$$1) \frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n+1},$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-2} = 0.$$

Обидві умови Лейбніца виконуються, але ряд (б) розбігається. Тому даний ряд (а) збігається умовно.

Приклад 11.12. З'ясувати, чи буде наведений знакозмінний ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

$$-\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

Розв'язання. Знайдемо загальний член даного ряду

$$-\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} + \dots \quad (a)$$

Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} + \dots, \quad (б)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{[2(n+1)-1]!} = \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n-1)! \cdot 2n(2n+1)},$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (2n-1)!}{(2n-1)! \cdot 2n(2n+1) \cdot 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow$$

ряд (б) збігається \Rightarrow ряд (а) збігається абсолютно.

Приклад 11.13. З'ясувати, чи буде наведений знакозмінний ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{8}{15} - \dots$$

Розв'язання. Знайдемо загальний член даного ряду

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{8}{15} - \dots + (-1)^n \frac{3n-1}{6n-3} + \dots$$

$$u_n = \frac{3n-1}{6n-3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{6n-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

ряд розбігається.

Розділ 12. Степеневі ряди.

Література: [1] глава 9, §§ 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

Степеневим рядом змінної x називається ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (12.1)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*, або ряд більш загального виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (12.1')$$

Тут x_0 – дійсне число.

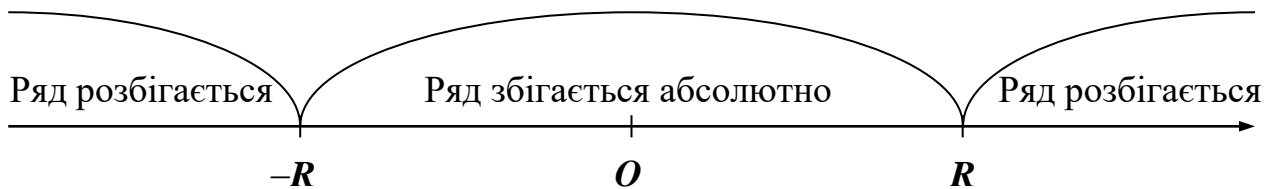
Ряд (12.1) називається *рядом за степенями x* . Ряд (12.1') називається *рядом за степенями $(x - x_0)$* . Якщо в ряді (12.1') ввести нову змінну $x - x_0 = t$,

то він набуде вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (вигляд (12.1) відносно змінної t).

Теорема Абеля. Властивості степеневих рядів

Розглянемо степеневий ряд за степенями x (12.1). Усякий степеневий ряд вигляду (12.1) збігається в точці $x = 0$. У цьому випадку його сума $S = a_0$. Таким чином, область збіжності ряду (12.1) завжди містить принаймні одну точку. При визначенні області збіжності ряду (12.1) використовується наступна, дуже важлива в теорії степеневих рядів теорема.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (12.1) збігається при $x = x_0 \neq 0$, то він збігається, і при тому абсолютно, при будь-якому значенні x , що задовольняє нерівності $|x| < |x_0|$. Якщо степеневий ряд (12.1) розбігається при $x = x_1$ то він розбігається при будь-якому значенні x , що задовольняє нерівності $|x| > |x_1|$.



З теореми Абеля випливає, що якщо ряд (12.1) збігається при $x = x_0 \neq 0$ і розбігається при $x = x_1$, то він має інтервал збіжності, тобто існує таке додатне число R , що для всіх значень x , які задовольняють нерівності $|x| < R$ ряд (12.1) збігається абсолютно і для всіх значень x , які задовольняють нерівності $|x| > R$ ряд (12.1) розбігається.

Число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R; R)$ – *інтервалом збіжності*.

Якщо ряд (12.1) збігається тільки в точці $x = 0$, то символічно це записується $R = 0$. Якщо ряд (12.1) збігається при всіх значеннях $x \in (-\infty; +\infty)$, то символічно це записується $R = +\infty$.

Для степеневого ряду за степенями $(x - x_0)$ (12.1') все сказане вище залишається в силі з тією лише різницею, що центр його інтервалу збіжності знаходиться не в точці $x = 0$, а в точці $x = x_0$ і інтервал збіжності записується $(x_0 - R; x_0 + R)$.

На практиці для відшукування радіусу та інтервалу збіжності степеневого ряду за степенями $(x - x_0)$ (12.1') або його окремого випадку при $x_0 = 0$ степеневого ряду за степенями x (12.1) можна керуватися наступними правилами.

1. Якщо серед коефіцієнтів степеневого ряду $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ немає рівних нулю, тобто ряд містить всі цілі додатні степені різниці $(x - x_0)$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

2. У всіх випадках інтервал збіжності можна знаходити, застосовуючи безпосередньо ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, що складається з абсолютних величин членів даного ряду, тобто з нерівностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Зазначимо, що ці правила справедливі за умови, що границі, які зустрічаються в них, існують або дорівнюють ∞ .

Ряди Тейлора і Маклорена.

Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (12.2)$$

називається *рядом Тейлора* функції $f(x)$ в околиці точки x_0 .

В окремому випадку, при $x_0 = 0$ ряд (12.2) набуває вигляду

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (12.3)$$

Ряд (12.3) називається *рядом Маклорена* функції $f(x)$.

Для функції, яка має похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в точці x_0 і деякій її околиці, при будь-якому значенні аргументу x з цієї околиці справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

де $r_n(x)$ – *залишковий член* формули Тейлора, який у *формі Лагранжа* має вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Розвинення деяких функцій у ряд Маклорена.

Формулою Маклорена називається формула Тейлора при $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x), \quad (12.4)$$

де $r_n(x)$ – *залишковий член* формули Маклорена, який у *формі Лагранжа* має вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Щоб розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (12.5)$$

необхідно:

а) знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

б) обчислити значення функції та її похідних у точці $x = 0$;

в) записати ряд Маклорена (12.5) для даної функції і знайти його інтервал збіжності;

г) визначити інтервал $(-R; R)$, в якому функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд Маклорена, тобто в якому залишковий член формули Маклорена (12.4) $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятись від інтервалу збіжності ряду (12.5)), то в цьому інтервалі ряд Маклорена збігається до функції $f(x)$, тобто

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Зауважимо, що кінці цього інтервалу також можуть входити у проміжок, всередині якого ряд Маклорена збігається до функції $f(x)$.

Розглянемо розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій.

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Зокрема, при $x = 1$ отримуємо

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Зауважимо, що непарна функція $\sin x$ розвивається в ряд за непарними степенями x , а парна функція $\cos x$ – за парними степенями x .

$$4. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & m \geq 0, \\ (-1; 1], & -1 < m < 0, \\ (-1; 1), & m \leq -1. \end{cases} \quad (12.6)$$

Зауважимо, що якщо m є дійсним ненатуральним числом, відмінним від нуля, то ряд у правій частині рівності (12.6) називається *біноміальним*, а його коефіцієнти – *біноміальними коефіцієнтами*.

Якщо m – натуральне число ($m = 1, 2, 3, \dots$), то всі коефіцієнти ряду в правій частині рівності (12.6), починаючи з коефіцієнта при x^{m+1} , обертаються в нуль, тобто розвинення (12.6) має місце при будь-якому $x \in (-\infty; +\infty)$ і є кінцевим розвиненням за *формулою Ньютона*

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots + x^m.$$

Нехай $m = -\frac{1}{2}$. Замінімо в розвиненні (12.6) x на $-x^2$. Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad x \in (-1; 1]$$

(раніше ми показали, що $2^n n! = (2n)!!$).

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$x \in (-1; 1]$.

$$6. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1},$$

$x \in [-1; 1]$.

Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів.

Інтегрування деяких диференціальних рівнянь неможливе в кінцевому вигляді в елементарних функціях. У таких випадках розв'язок рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

методом невизначених коефіцієнтів або за допомогою ряду Тейлора

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (12.7)$$

Метод невизначених коефіцієнтів особливо зручний для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

При розв'язанні нелінійних рівнянь зручніше продиференціювати рівняння декілька разів поспіль. Потім, використовуючи початкові умови, послідовно знайти значення похідних у точці x_0 і підставити їх у ряд Тейлора (12.7).

Приклад 12.1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$.

Розв'язання.

$$a_n = \frac{n}{4^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{4^n \cdot 4},$$
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 4^n \cdot 4}{4^n (n+1)} = 4.$$

Приклад 12.2. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^n (3n+1)}.$$

Розв'язання.

$$a_n = \frac{1}{2^n (3n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot 2 (3n+4)},$$
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 (3n+4)}{2^n (3n+1)} = 2.$$

Тоді інтервал збіжності

$$-2 < x - 4 < 2, \quad 2 < x < 6.$$

Приклад 12.3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 7^n}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності.

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 7^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 7^n \cdot 7},$$
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1) \cdot 7^n \cdot 7}{n \cdot 7^n} = 7.$$

Тоді інтервал збіжності $-7 < x < 7$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

При $x = 7$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це розбіжний гармонічний ряд.

При $x = -7$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Ознака Лейбніца:

$$1) \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Обидві умови Лейбніца виконуються, а ряд абсолютних величин розбіжний. Тому даний ряд збігається умовно.

Отже, область збіжності даного ряду $x \in [-7; 7)$.

Приклад 12.4. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^{n-1} \cdot (n+1)}$.

Розв'язання. Оскільки x входить не в усіх степенях, тобто серед коефіцієнтів ряду є рівні нулю, формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ користуватися не можна. Знайдемо інтервал збіжності, застосовуючи безпосередньо ознаку Даламбера.

$$u_n = \frac{x^{2n+1}}{3^{n-1} \cdot (n+1)}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{3^n \cdot (n+2)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3} \cdot 3^{n-1} \cdot (n+1)}{3^n \cdot (n+2) \cdot x^{2n+1}} = \frac{x^2}{3} < 1, \quad x^2 < 3, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

Дослідимо даний ряд на збіжність на кінцях інтервалу.

При $x = \sqrt{3}$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{3^n \cdot (n+1)} = 3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Цей ряд

розбігається (за ознакою порівняння в граничній формі він веде себе так само, як і розбіжний гармонічний ряд).

При $x = -\sqrt{3}$ отримаємо ряд $3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = -3\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Цей ряд

також розбігається.

Таким чином, область збіжності даного ряду $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Приклад 12.5. Розвинути функцію $y = \frac{1}{x^2}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції та її похідних при $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{x^2}, & y(-1) &= \frac{1}{(-1)^2} = 1; \\
 y' &= -\frac{1}{x^4} \cdot 2x = -\frac{2}{x^3} = -\frac{1 \cdot 2}{x^3}, & y'(-1) &= -\frac{2}{(-1)^3} = 2; \\
 y'' &= \frac{2}{x^6} \cdot 3x^2 = \frac{6}{x^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, & y''(-1) &= \frac{6}{(-1)^4} = 6; \\
 y''' &= -\frac{6}{x^8} \cdot 4x^3 = -\frac{24}{x^5} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, & y'''(-1) &= -\frac{24}{(-1)^5} = 24; \\
 & \dots\dots\dots & & \\
 y^{(n)} &= (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, & y^{(n)}(-1) &= (n+1)!;
 \end{aligned}$$

Розвинення функції $y = f(x)$ в ряд Тейлора на околиці точки $x = x_0$ має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{x^2} = y(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots = \\
 &= 1 + \frac{2}{1!}(x+1) + \frac{6}{2!}(x+1)^2 + \frac{24}{3!}(x+1)^3 + \dots + \frac{(n+1)!}{n!}(x+1)^n = \\
 &= 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + \dots + (n+1)(x+1)^n + \dots
 \end{aligned}$$

Приклад 12.6. Знайти три перших, не рівних нулю, члени ряду Маклорена функції $y = \cos^2 x$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції та її похідних при $x_0 = 0$.

$$y = \cos^2 x, \quad y(0) = 1;$$

$$\begin{aligned}
y' &= -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x, & y'(0) &= 0; \\
y'' &= -2\cos 2x, & y''(0) &= -2; \\
y''' &= 4\sin 2x, & y'''(0) &= 0; \\
y^{(4)} &= 8\cos 2x, & y^{(4)}(0) &= 8.
\end{aligned}$$

Розвинення функції $y = f(x)$ в ряд Маклорена має вигляд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Тоді

$$y = \cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{4!}x^4 - \dots = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

Приклад 12.7. Користуючись розвиненням в ряд Маклорена функції, обчислити $\sin 18^\circ$ з точністю до **0,0001**.

Розв'язання. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, $18^\circ = 18 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$ рад.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Тоді

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3} + \frac{\pi^5}{5! \cdot 10^5} - \dots$$

Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Тому $|R_n| < u_{n+1}$.

$$u_1 = \frac{\pi}{10} \approx 0,31416 > 0,0001, \quad u_2 = \frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3} \approx 0,00517 > 0,0001,$$

$$u_3 = \frac{\pi^5}{5! \cdot 10^5} \approx 0,00003 < 0,0001.$$

Таким чином,

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3} = 0,31416 - 0,00517 = 0,30899 \approx 0,3090.$$

Приклад 12.8. Користуючись розвиненням в ряд Маклорена функції, обчислити $\sqrt[4]{90}$ з точністю до **0,001**.

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{90} = (81 + 9)^{1/4} = 3 \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{1/4},$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & m \geq 0, \\ (-1; 1], & -1 < m < 0, \\ (-1; 1), & m \leq -1. \end{cases} \quad m = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{9}.$$

Таким чином,

$$\sqrt[4]{90} = 3 + 3 \cdot \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1 \left(\frac{1}{4} - 1 \right)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \left[3 \cdot \frac{1 \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 2 \right)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^3 + \dots \right]$$

Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Тому $|R_n| < u_{n+1}$.

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 3 \cdot \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{12} \approx 0,0833 > 0,001,$$

$$u_2 = 3 \cdot \frac{1 \left(\frac{1}{4} - 1 \right)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^2 = -\frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{9} = -\frac{1}{288} \approx 0,0035 > 0,001$$

$$u_3 = 3 \cdot \frac{1 \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 2 \right)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^3 = \frac{7}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{81} = \frac{7}{31104} \approx 0,0002 < 0,001$$

Таким чином,

$$\sqrt[4]{90} \approx 3 + 0,0833 - 0,0035 = 3,0798 \approx 3,080$$

Приклад 12.9. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю 0,001

Розв'язання.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

Цей ряд збігається за будь-яких значень x . Проінтегруємо його почленно.

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots$$

Цей ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Тому $|R_n| < u_{n+1}$.

$$u_1 = \frac{1}{3} \approx 0,3333 > 0,001, \quad u_2 = \frac{1}{7 \cdot 3!} = \frac{1}{7 \cdot 6} = \frac{1}{42} \approx 0,0238 > 0,001,$$

$$u_3 = \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} \approx 0,0008 < 0,001.$$

Таким чином,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,3333 - 0,0238 = 0,3095 \approx 0,310.$$

Приклад 12.10. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє заданим початковим умовам.

$$y'' = xy' + y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y''(0) &= 0 \cdot 1 + 0 = 0, \\ y''' &= y' + xy'' + y' = 2y' + xy'' & y'''(0) &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2, \\ y^{(4)} &= 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''' & y^{(4)}(0) &= 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0, \\ y^{(5)} &= 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)} & y^{(5)}(0) &= 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 8. \end{aligned}$$

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots =$$

$$= \frac{1}{1!} x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{8}{5!} x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайти інтеграл.

1. a) $\int \frac{x^2}{5-x^6} dx;$

б) $\int \ln(1+x^2) dx;$

в) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx;$

г) $\int \cos^2 5x dx.$

3. a) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}} dx;$

б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$

в) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} dx;$

г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

5. a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx;$

б) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$

в) $\int \frac{dx}{x^3-x^2};$

г) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$

7. a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx;$

2. a) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x};$

б) $\int x \ln(x-1) dx;$

в) $\int \frac{dx}{x^4+3x^2};$

г) $\int \cos^5 x dx.$

4. a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin^2 x}} dx;$

б) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$

в) $\int \frac{x^2-3}{x^4+10x^2} dx;$

г) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

6. a) $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx;$

б) $\int x^2 e^{3x} dx;$

в) $\int \frac{dx}{x^3+x};$

г) $\int \sin 5x \sin 6x dx.$

8. a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx;$

$$\text{б) } \int \arcsin x \, dx ;$$

$$\text{в) } \int \frac{x}{x^3 - 1} \, dx ;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} .$$

$$9. \text{ а) } \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1 + x^2} \, dx ;$$

$$\text{б) } \int \operatorname{arctg} x \, dx ;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} \, dx ;$$

$$\text{г) } \int x^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx .$$

$$\text{б) } \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} \, dx ;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \, dx ;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \cdot \sqrt{x}} .$$

$$10. \text{ а) } \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x + 1}} ;$$

$$\text{б) } \int (x^2 + 1) e^{-2x} \, dx ;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1} ;$$

$$\text{г) } \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \, dx .$$

Завдання 2. Обчислити.

$$1. \text{ а) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x \, dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} .$$

$$2. \text{ а) } \int_0^1 x e^{-x} \, dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} x \cos x \, dx .$$

$$3. \text{ а) } \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \, dx ;$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x} .$$

$$4. \text{ а) } \int_0^1 \frac{e^x \, dx}{1 + e^{2x}} ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} .$$

$$5. \text{ а) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x} ,$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} .$$

$$6. \quad a) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x},$$

$$б) \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx.$$

$$7. \quad a) \int_0^1 \arcsin x \, dx,$$

$$б) \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$8. \quad a) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}},$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} \, dx.$$

$$9. \quad a) \int_e^{e^2} x^2 \ln x \, dx,$$

$$б) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \, dx.$$

$$10. \quad a) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}},$$

$$б) \int_0^1 x \ln x \, dx.$$

Завдання 3. Обчислити наближене значення визначеного інтеграла за допомогою формули Сімпсона, розбивши проміжок інтегрування на 10 частин. Всі обчислення виконати з точністю до третього знака після коми.

$$1. \quad \int_{-4}^6 \sqrt{x^4 + 9} \, dx.$$

$$2. \quad \int_{-3}^7 \sqrt{x^4 + 6} \, dx.$$

$$3. \quad \int_0^{10} \sqrt{x^3 + 2} \, dx.$$

$$4. \quad \int_1^{11} \sqrt{x^3 + 5} \, dx.$$

$$5. \quad \int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 4} \, dx.$$

$$6. \quad \int_2^{12} \sqrt{x^3 + 2} \, dx.$$

$$7. \quad \int_{-6}^4 \sqrt{x^4 + 1} \, dx.$$

$$8. \quad \int_4^{14} \sqrt{x^3 + 3} \, dx.$$

$$9. \int_{-3}^7 \sqrt{x^4 + 5} dx.$$

$$10. \int_3^{13} \sqrt{x^3 + 7} dx.$$

Завдання 4.

1. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad x = 3, \quad x = 6.$$

2. Обчислити довжину дуги

$$y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

3. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = 4(2 \sin t - \sin 2t).$$

4. Обчислити довжину дуги AB

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y}{4} = 1, \quad A(-3; 0), \quad B\left(2; \frac{20}{9}\right).$$

5. Обчислити довжину дуги

$$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t.$$

6. Знайти площу фігури, обмежену лінією

$$\rho = 4 \sin 3\varphi.$$

7. Обчислити довжину дуги

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4.$$

8. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$y = x^2 - 3x - 5, \quad y = 3 - x.$$

9. Обчислити довжину дуги AB

$$y^2 = -6x + 5, \quad A(-1; -\sqrt{11}), \quad B(0,5; \sqrt{2}).$$

10. знайти площу фігури, обмежену лініями

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad x = -4, \quad x = 3.$$

Завдання 5. Знайти частинний (а) та загальний (б, в) розв'язок диференціального рівняння.

1. а) $y' + xy = \frac{4x}{y}, y(0) = 1;$

б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0;$

в) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x .$

2. а) $(xy^2 - y^2)dx - (x^2y + x^2)dy = 0, y(1) = 1;$

б) $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right);$

в) $x^2y' + xy + 1 = 0 .$

3. а) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, y(0) = 1;$

б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x} \right)^2;$

в) $y' + y \cos x = \sin 2x .$

4. а) $xydx + (x+1)dy = 0, y(0) = 2;$

б) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy;$

в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x} .$

5. а) $2x^2yy' + y^2 = 2, y(1) = 1;$

б) $xy' - y = \sqrt{y^2 + 4x^2};$

в) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3 .$

6. а) $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0, y(1) = 0;$

б) $y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x};$

в) $y' + x^2y = x^2 .$

7. а) $2xy' - x = 3x^2, y(1) = 3;$

б) $y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy};$

в) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x .$

8. а) $e^{x^3} dy + 3x^2 \sqrt{1-y^2} dx = 0, y(0) = 0;$

б) $xy' = 2x + 5y;$

в) $xy' - y = x^2 \sin x .$

9. а) $y'x \ln x - \operatorname{tgy} = 0, y(1) = 0;$

б) $x dy - \left(y + x \cos \frac{y}{x} \right) dx = 0;$

в) $(2x + 1)y' + y = x .$

10. а) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0$, $y(0) = 1$;

б) $xy' = y - xe^{y/x}$;

в) $xy' + y = \ln x + 1$.

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. а) $y'' = x \sin x$; б) $y''x \ln x = y'$; в) $2yy'' = y'^2$.

2. а) $y'' = \sin^2 3x$; б) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; в) $2yy'' = y'^2 - y^2$.

3. а) $y'' = x^2 \ln x$; б) $xy'' - y' = 0$; в) $y''y^3 = 1$.

4. а) $y'' = \sqrt{2x+5} - 3x$; б) $xy'' + y' + x = 0$; в) $y'' = y' + y'^2$.

5. а) $y'' = \frac{\ln x}{x^2}$; б) $y'' + y'tgx = \sin 2x$; в) $y''y^2 = -9$.

6. а) $y''' \cdot \sin^4 x = \sin 2x$; б) $x^2y'' + xy' = 1$; в) $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$.

7. а) $y''' = e^{-2x}$; б) $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$; в) $1 + y'^2 = 2yy''$.

8. а) $y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}$; б) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$; в) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

9. а) $y''' = e^{5x} - x^3$; б) $xy'' + y' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; в) $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$.

10. а) $y''' = \frac{2}{x^3} - 5 \sin 7x$; б) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$; в) $y''(1+y) = 5y'^2$.

Завдання 7. Знайти частинний (а) та загальний (б, в) розв'язок диференціального рівняння.

1. а) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$;

б) $y'' + 16y = xe^{4x}$;

в) $y'' - 100y = -125 \sin 5x$.

2. а) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 7y' + 10y = 5x^2 + 1$;

в) $y'' + 5y = 2 \cos 3x$.

3. а) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$;

5.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n+5};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4n+1};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}.$
6.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+4};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n^2};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$
7.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+5};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+7}};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}.$
8.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+3)!};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$
9.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n+4};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 7^n};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+1}.$
10.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+2};$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

Завдання 9. З'ясувати, чи буде наведений знакозмінний ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

1.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-3};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$
2.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+6}.$
3.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3n+1};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}.$
4.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot (2n+2)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{4n-1}{9n+2}}.$

$$\begin{array}{ll}
5. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 5}. \\
6. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{7^n}. \\
7. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{6n-4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(3n+1)^3}}. \\
8. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n+3}. \\
9. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)(n+5)}. \\
10. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{4n+4}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.
\end{array}$$

Завдання 10. Знайти область збіжності ряду.

$$\begin{array}{lll}
1. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+3) \cdot 5^n}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3n+1}. \\
2. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 3^{n-1}}{2n-1}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n! \cdot 2^n}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n+1)!}. \\
3. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 2^n}{\sqrt{n+3}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{\sqrt{3n+2}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{4^{2n} \cdot n}. \\
4. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n^2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{3^{n-1} \cdot n^2}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{5^n \cdot \sqrt{n}}.
\end{array}$$

5.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 4^{n-1}}{\sqrt{2n+5}}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{3n+4}}$.
6.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{5^{2n-1}}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+7)^n}{(2n-1)^2}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{7^{2n}(n+1)}$.
7.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 2^{n-1}}{3n+2}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{6n+2}}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n^3+1}$.
8.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \sqrt{n}}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt[3]{6n+7}}$.
9.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n^3+3)}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+5)^n}{5^{n-1} \cdot n^3}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{5^{2n} \cdot n^3}$.
10.	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \cdot \sqrt{2n+5}}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}$;	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n \cdot (3n+2)}$.

Завдання 11. Розвинути функцію $y = f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_0$.

1.	a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -1;$	2.	$f(x) = \frac{2}{x^3}, \quad x_0 = 1;$
3.	a) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4;$	4.	$f(x) = \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1;$
5.	a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 9;$	6.	$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -1;$
7.	a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = -1;$	8.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 8;$
9.	a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0;$	10.	$f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$

Завдання 12. Знайти три перших, не рівних нулю, члени ряду Маклорена функції $y = f(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

2. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$.

3. $f(x) = \cos^2 3x$.

4. $f(x) = \sin^2 4x$.

5. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$.

7. $f(x) = \sin 5x$.

8. $f(x) = \cos 4x$.

9. $f(x) = 2^{\cos x}$.

10. $f(x) = e^{\sin x}$.

Завдання 13. Користуючись розвиненням в ряд Маклорена функції, обчислити з точністю до **0,001**.

1. $\sqrt[3]{8,36}$.

2. $\cos 2^\circ$.

3. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$.

5. $\sqrt[3]{80}$.

6. $\arcsin \frac{1}{3}$.

7. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

8. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx$.

9. $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$.

10. $\sqrt[3]{e}$.

Завдання 14. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє заданим початковим умовам.

1. $y'' = y \cos y' + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3}$.

2. $y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0$.

3. $y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0$.

4. $y' = \ln(x + y) + xy, \quad y(1) = 0.$
5. $y'' = -2xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
6. $y'' = 2yy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
7. $y' = x^2 + xy + e^{-x}, \quad y(0) = 0.$
8. $y' = 2x^2 + y^3, \quad y(1) = 1.$
9. $y'' + y' = x^2y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
10. $y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язуванням кожної задачі треба повністю вписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена відповідним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру фізики та прикладної математики завчасно, але не пізніше, ніж за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновок про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити *усі* помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі «Робота над помилками» і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевірненій роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. До екзамену (заліку) допускаються тільки ті студенти, які захистили контрольну роботу.

СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10	Завд. 11	Завд. 12	Завд. 13	Завд. 14
00	6	5	4	5	6	1	6	4	5	6	3	2	2	3
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10	4	8	6	9
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5	5	9	7	2
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1	6	7	4	8
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3	7	1	3	7
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9	10	5	10	4
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2	8	4	2	3
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8	9	3	8	5
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7	2	10	9	1
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4	1	6	5	7
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3	1	10	1	10
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5	2	8	10	6
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1	9	7	2	8
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7	5	4	9	4
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10	6	6	7	9
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6	7	9	6	2
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8	3	1	4	5
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4	8	5	8	3
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9	4	3	3	4
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2	10	2	5	7
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5	8	6	1	9
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3	6	7	6	6
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4	9	10	9	2
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7	7	1	2	8
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9	10	9	7	1
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8	5	8	10	10
26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2	4	2	5	5
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6	3	3	4	10
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1	2	5	3	6

29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10	1	4	8	1
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5	4	7	1	3
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10	5	1	6	8
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6	1	10	5	7
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1	10	6	10	4
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3	3	9	4	2
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8	2	8	9	9
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7	6	2	7	7
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4	7	5	1	10
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2	8	4	8	6
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9	9	3	2	1
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7	4	9	3	5
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10	2	6	4	2
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8	7	1	10	4
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1	10	3	3	8
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5	6	2	7	3
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2	5	4	5	9
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4	9	10	2	8
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6	3	5	6	1
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3	8	7	8	6
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9	1	8	1	5
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8	5	6	9	4
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1	9	4	2	9
52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6	6	3	8	3
53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5	1	9	9	10
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4	3	1	7	7
55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9	2	10	1	2
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3	8	2	5	8
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10	4	8	4	7
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7	7	7	3	10
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2	10	5	10	4
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8	3	3	6	3
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7	7	2	10	2

62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10	1	9	8	6
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4	4	7	7	1
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3	10	6	4	5
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2	8	4	6	9
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6	5	8	9	6
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1	2	10	1	1
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5	9	5	5	7
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9	6	1	3	5
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6	8	6	2	8
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1	2	9	6	10
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7	9	2	7	2
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5	4	7	10	4
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8	1	10	1	3
75	8	8	4	3	10	5	8	4	3	10	7	5	9	9
76	2	2	10	8	2	4	2	10	8	2	6	4	8	6
77	3	3	8	10	4	3	3	8	10	4	5	3	2	8
78	5	5	5	1	3	2	5	5	1	3	3	8	3	3
79	4	4	1	7	9	1	4	1	7	9	10	1	5	7
80	8	7	1	6	6	4	7	1	6	6	1	6	4	10
81	10	1	3	7	8	5	1	3	7	8	2	5	7	9
82	6	10	4	3	3	1	10	4	3	3	6	10	1	5
83	9	6	2	8	7	10	6	2	8	7	3	4	10	1
84	5	9	5	9	10	3	9	5	9	10	9	9	6	4
85	7	8	7	10	9	2	8	7	10	9	5	7	9	2
86	1	2	10	5	5	6	2	10	5	5	8	1	8	4
87	3	5	8	1	1	7	3	8	1	1	10	8	2	2
88	4	4	6	2	4	8	5	6	2	4	4	2	5	7
89	2	3	9	4	2	9	4	9	4	2	7	3	4	10
90	8	9	8	8	4	4	9	8	8	4	4	4	3	6
91	4	6	1	4	2	2	6	1	4	2	3	10	9	5
92	10	1	9	6	7	7	1	9	6	7	7	3	6	9
93	3	3	7	1	10	10	3	7	1	10	2	7	1	3
94	7	2	3	5	6	6	2	3	5	6	8	5	3	8

95	5	4	2	7	5	5	4	2	7	5	5	2	2	1
96	6	10	6	10	9	9	10	6	10	9	10	6	4	6
97	1	5	10	2	3	3	5	10	2	3	6	8	10	10
98	2	7	5	3	8	8	7	5	3	8	9	1	5	5
99	9	8	4	9	1	1	8	4	9	1	1	9	7	1

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : Навч. посібник : У двох книгах. Книга 1 / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призова. К. : Либідь, 1994. 312 с.
3. Вища математика: Підручник : У 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / Г.Й. Призова, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 400 с.
4. Вища математика: Підручник : У 2 кн. Кн. 2. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 386 с.
5. Моня А.Г. Вища математика. Розв'язання олімпіадних задач: навч. посібник. – Дніпро: УДУНТ, 2023. – 149 с.

Допоміжна література

6. Вища математика : збірник задач : навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К. : А.С.К., 2005. 480 с.
7. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. ВНЗ: у 2 т. / ред. Л. В. Курпа. Харків : НТУ «ХП», 2009. 532 с.
8. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 594 с.
9. Копорулін В.Л., Моссаковська Л.В. Вища математика. Розділ «Визначений та невластні інтеграли» : навч. посіб. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2015. 111 с.

Інформаційні ресурси Інтернет

10. Вища математика : навч. посіб. / Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Харків : Дільниця оперативної поліграфії АПБ України. 2003. 138 с. [Електронний ресурс]. – Код доступу : http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf

11. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури. 2004. 368 с. [Електронний ресурс]. – Код доступу :

https://shron1.chtyvo.org.ua/Lytvyn_I/Vyscha_matematyka.pdf

Навчально-методичне видання

Моня Андрій Григорович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Навчально-методичні рекомендації
до виконання індивідуальних завдань з дисципліни
«Вища математика» для студентів заочної форми
навчання інженерних спеціальностей УДУНТ (ДМетІ)

Електронне видання

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 85 від 03.02.2026)

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка А. Г. Моня

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 5,86. Обл.-вид. арк. 5,94.
Зам. № 8.

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010