СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО
ТРАНСПОРТА им. М.И. КАЛИНИНА

На правах рукописи

Горбатов Виталий Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

/ 01.02.03 - сопротивление материалов
и строительная механика/

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск - 1975 г.

СССР - МПС

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА им. М.И. КАЛИНИНА

На правах рукописи

Горбатов Виталий Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

/ 01.02.03 - сопротивление материалов и строительная механика/

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Днепропетровск - 1975 г.

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта им. М.И. Калинина.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Бондарь Н.Г.

Официальные оппоненты : - доктор физико-математических наук,
профессор Крюков Б.И.,
- кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
Казакевич М.И.

Ведущее предприятие - Институт механики АН УССР
/Днепропетровское отделение/.

Автореферат разослан "15" апреля 1975 г.

Защита диссертации состоится "22" мая 1975 г. на заседании Ученого совета Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта им. М.И. Калинина.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого совета или прислать свои отзывы о работе в двух экземплярах по адресу 320629, г. Днепропетровск, 10, ГСП, ул. Университетская,2, ДИИТ.

Ученый секретарь Совета
доцент Плахотник В.Н.

Широкое внедрение гибких инженерных конструкций и сложных механизмов, подверженных воздействию динамических нагрузок, вызвало во многих отраслях современного строительства и машиностроения постановку ряда актуальных задач, среди которых важное место занимают задачи устойчивости нелинейных колебательных процессов. Эти исследования примыкают к общим задачам теории нелинейных колебаний, имеющим приложение также в различных областях механики, физики и техники.

Основополагающими работами в области устойчивости движений являются исследования выдающихся математиков А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, проведенные ими в конце XIX в. Дальнейшее приложение их к задачам устойчивости нелинейных колебаний позволило всесторонне изучить многообразные явления динамических процессов.

Но несмотря на то, что на современном этапе развития теория устойчивости колебаний нелинейных систем располагает целым рядом эффективных методов, позволяющих успешно решать разнообразные технические задачи, исследование устойчивости нелинейных систем усложняется отсутствием конструктивных методов анализа устойчивости движений существенно нелинейных систем при произвольных периодических возбуждениях.

Актуальность этих задач возросла с появлением таких мощных источников динамических воздействий произвольного периодического вида с широким спектром частот, как например, реактивные двигатели, вибрационные транспортёры, вибростенды и др. Приближенные решения, дающие качественные представления о влиянии различных возмущений на исследуемый режим, в ряде случаев позволяют получить основную информацию, необходимую для проектирования реальных объектов.

Реферируемая работа посвящена нахождению простых приближенных решений, пригодных для описания периодических колебаний вблизи границ областей неустойчивости и областей качественного изменения режима движения некоторых нелинейных колебательных систем. При этом получены аналитические выражения конструктивного вида и удобные графические представления для самих границ указаных областей. Исследованы системы с одной степенью свободы при возбуждениях гармонического, бигармонического и произвольного периодического видов. Рассмотрено также влияние различных диссипативных сил на области периодических колебаний.

Диссертационная работа, объемом в 163 страницы машинописного текста и с 88 иллюстрациями, состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы /160 наименований/ и приложения.

Первая глава посвящена краткому обзору отечественных и зарубежных исследований вопросов устойчивости вынужденных колебаний нелинейных систем. В конце главы дана постановка задачи исследования.

Отмечено, что ввиду многообразия явлений, происходящих в нелинейных системах, не представляется возможным пользоваться едиными определениями и критериями устойчивости. Развитые современные методы позволяют решать практически важные задачи устойчивости, для которых принимается во внимание вид, величина и время действия возмущения.

В современном развитии нелинейного анализа исследование устойчивости движения ведется по нескольким направлениям. Основными из них являются топологические методы качественной теории дифференциальных уравнений движения, аналитические методы, не требующие интегрирования уравнений, а также аналитические методы исследования устойчивости движений путем анализа решений уравнений возмущенного движения.

Наиболее полную количественную и качественную информацию о движениях сложного вида можно получить последним методом. При этом, ввиду невозможности получения для нелинейных систем точных решений, применяются приближённые методы малого или большого параметра.

Так, для колебательных систем с гармоническим возбуждением метод Пуанкаре-Ляпунова использовался в работах Н.Г. Четаева, А.А. Андронова, А.А. Витта, С.Э. Хайкина, Д. Ля-Салля, Б.В.Булгакова, Е.А. Барбашина, Г.Н. Дубошина, В.И. Зубова в квазилинейной постановке для систем с одной степенью свободы. И.Г. Малкин распространил этот метод на системы, близкие к системам Ляпунова, и на системы с несколькими степенями свободы.

Асимптотические методы, имеющие многочисленные модификации, применены в квазилинейной постановке к задачам анализа колебаний в работах Ван-дер-Поля, Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А.Митропольского. В последнее время появились работы, в которых приведены строго обоснованные асимптотические методы исследования устойчивости систем, близких к произвольным нелинейным. К ним относятся исследования Т. Халси, Р.М. Розенберга, В. Каннингхэма, В.М. Волосова, Б.И. Моргунова, Н.Н. Моисеева, В. Шемплинской - Ступницкой и других авторов.

исследованиях устойчивости вынужденных колебаний популярен также метод изображающих функций, примененный Н.М. Крыловым, Н.Н. Боголюбовым, К.Ф. Теодорчиком, Д. Лоубом, Р.Д. Кохенбергером, А. Блакьером.

Тесно связан с ним стробоскопический метод Н.Минорского, использованный также в работах Ж. Аржеми, А. Юричича и других исследователей.

Среди иных методов, используемых в задачах устойчивости систем с большой нелинейностью, следует указать стохастический метод /Т. Хаяси, Т.Е. Стерн, О. Блакьер/, полустохастический метод /А. Тондл/, метод нормальных колебаний /Р.М. Розенберг, Аткинсон, Л.И. Маневич, Б.П. Черевацкий/, метод интегральных многообразий / Ю.А. Митропольский, К.Г. Валеев/.

Устойчивость периодических колебаний исследуется также специальным аналитическим приемом приведения уравнения в вариациях к уравнениям типа Матье и Хилла /Д.Р. Меркин, Дж. Стокер, Н. Мак-Лохлан, В. Каннингхэм, Г. Каудерер, Т. Хаяси, Е. Уиттекер, В. Шемплинская-Ступницкая, В.А. Бидерман и др./

Изучение устойчивости вынужденных колебаний нелинейных систем под действием произвольных периодических возбуждений, а также изучение вопроса о взаимном влиянии нескольких гармоник возбуждающих сил началось с качественных математических исследований проведенных И.Г. Малкиным для частного случая системы Ляпунова.

В дальнейшем А.И. Чекмарев теоретически с помощью видоизмененного метода Ван-дер-Поля и экспериментально установил явление подавления действия гармоник, сделал вывод об устойчивости периодических колебаний, а также развил условия устойчивости для многомассовых систем.

В экспериментально-теоретических исследованиях с помощью различных методов В.П. Терских, Ю.М. Дроздовым, Г. Каудерером, В.П. Губаником, М.В. Мироновым, М.И. Казакевичем и другими авторами были подтверждены и углублены выводы А.И. Чекмарева.

Следует также отметить работы А. Тондла и Л. Пуста, в которых с помощью различных методов /Ван-дер-Поля, гармонического баланса и полустохастического/ найдены границы областей неустойчивости и условия устойчивости колебаний систем с немалой нелинейностью и с несколькими степенями свободы при действии полигармонических возмущений.

В перечисленных работах, при использовании традиционных методов анализа, основная трудность изучения устойчивости колебаний нелинейных систем с полигармоническим возбуждением заключается в неприменимости принципа суперпозиции. Отсюда и возникают затруднения при получении результатов решений конструктивного вида. Эти трудности могут быть преодолены, если в основу исследований будет положена предварительная линеаризация систем одним из модифицированных методов эквивалентной линеаризации, методом прямой линеаризации Я.Г. Пановко или методом переменного масштаба Н.Г. Бондаря.

Представляет определенный интерес задача получения приближенных периодических решений уравнений движений и получения аналитических конструктивных выражений для границ областей неустойчивости периодических решений и областей качественно иных режимов движений.

В работе сделана попытка решения этой задачи в первую очередь для стационарного /установившегося/ режима колебаний простых нелинейных систем с одной степенью свободы, движения которых описываются дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x}(t) + N(\dot{x}) + R(x) = F(t) \qquad /1/$$

Здесь упругая характеристика $R(x)$ задана в виде степенного ряда по перемещению X с линейным членом.

В исследованиях применен метод переменного масштаба и , следовательно, периодические решения и границы их неустойчивости определены с точностью этого же метода.

Устойчивость колебаний рассматривается по определениям А.М. Ляпунова в отношении к численно малым возмущениям переменных системы относительно равновесных режимов их изменений. При этом орбитальная неустойчивость предполагает отсутствие устойчивости движений относительно всех понятий устойчивости.

Известно, что для уравнений вида /I/ будет иметь место периодические решения /с периодом равным основному периоду возбуждающей силы или кратным ему/ при условии ограниченности решений и их асимптотической устойчивости.

С позиции качественной теории периодическому колебательному режиму соответствуют замкнутые фазовые траектории, заключенные внутри петли сепаратрисы. Апериодическому движению /или для маятника - вращательному режиму/ соответствуют разомкнутые траектории, лежащие вне сепаратрисы. Решения соответствующие сепаратрисе являются орбитально неустойчивыми.

В работе рассмотрены случаи несоблюдения условий существования периодических колебаний, когда периодические решения неустойчивы и когда они переходят к качественно новым режимам движений. Под апериодическим движением следует понимать неколебательное монотонное возрастание величины амплитуды до бесконечности с ростом времени.

Используемое в работе понятие критического состояния следует понимать как границу между периодическим колебательным и апериодическим /или вращательным/ режимом или между устойчивым и неустойчивым колебательными режимами.

Во второй главе рассматриваются стационарные колебания нелинейных систем, движение которых описывается уравнением /I/ с гармоническим возбуждением $F(t)=F\cos\omega t$

Для нахождения решения задачи колебаний недиссипативных систем, имеющих упругую характеристику двухчленного вида $R(x)=\alpha x+\beta x^3$ $(\alpha \gtrless 0, \beta \gtrless 0)$, вводятся традиционные для метода переменного масштаба соотношения

$$\varepsilon=\varphi(t),$$
$$z(\varepsilon)=f(x)=\sqrt{2\int_0^x R(u)\,du},$$

позволяющие представить исходное уравнение /I/ в линейном виде

$$z''(\varepsilon)+z(\varepsilon)=\frac{F}{\dot\varphi(t)}\cos\omega t \qquad /2/$$

Фазовую функцию $\varphi(t)$, при описании колебаний с умеренно большими амплитудами $(k \ll 1)$, находим из полученного ранее Н.Г. Бондарем выражения

$$\psi t \approx F(\varphi,k)=\frac{2}{\pi}K(k)\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\left[a_0+\frac{2}{3}a_1(\sin\varphi)^2+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_2(\sin\varphi)^4+\dots\right], \qquad /3/$$

где $F(\varphi,k)$ - эллиптический интеграл I-го рода,

$K(k)$ - полный эллиптический интеграл I-го рода,

$a_0=\frac{2}{\pi}K(k)-1=2B$,

$a_n=a_{n-1}-\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2 k^{2n}$.

Пользуясь приближением в виде двух членов ряда /3/, т.е.

$$\varepsilon=\varphi(t)\approx\theta t+B\sin q\varphi(t), \qquad /4/$$

получаем частное решение исходного уравнения /I/ в виде

$$f(x)=\theta F\left\{\frac{\cos\omega t}{\theta^2-\omega^2}-\frac{q}{2}B\left[\frac{\cos(\omega-q\theta)t}{\theta^2-(\omega-q\theta)^2}+\frac{\cos(\omega+q\theta)t}{\theta^2-(\omega+q\theta)^2}\right]\right\} \qquad /5/$$

Для нахождения решения по основной частоте принята гипотеза И.Г. Малкина о незначительности влияния на колебания основной частоты сопутствующих гармоник. В полученном решении сопутствующие гармоники выражаются комбинационными гармониками ультрагармонического порядка с частотой $(\omega+q\theta)$ и субгармонического - с частотой $(\omega-q\theta)$.

Амплитудно-частотная характеристика принимает вид

$$f(A)=\frac{\theta(A)F}{\theta^2(A)-\omega^2}$$

Для нахождения границы неустойчивости периодических колебаний "в малом", т.е. вблизи положения устойчивого равновесия, принят общеизвестный /из работ Ф. Джона, Дж. Стокера, Т. Хаяси, В. Шемплинской-Ступницкой и др./ критерий, согласно которому граница устойчивых решений, отвечающая сдвигу фаз на 180^0, проходит через координату, в которой касательная к кривой амплитудно-частотной характеристики становится вертикальной , т.е. в месте перегиба этой кривой. Определение соответствующих сочетаний параметров возбуждения ω и F , при которых происходит такой "скачок" колебаний, ведется путем решения системы двух уравнений, одно из которых является амплитудно-частотной характеристикой, другое - производной ее по A , в которой принято $\omega'(A)=0$. В общем виде система уравнений записывается так

$$\left.\begin{aligned} \omega(A) &\approx \theta(A)\left[1+\frac{f(A)\theta'(A)}{f'(A)\theta(A)}\right] \\ F(A) &\approx -2\frac{f^2(A)}{f'(A)}\theta'(A)\left[1+\frac{f(A)\theta'(A)}{f'(A)\theta(A)}\right] \end{aligned}\right\} \qquad /6/$$

Первое уравнение системы вместе со "скелетной" кривой собственных частот ограничивает область неустойчивых периодических решений на амплитудно-частотной характеристике.

Для частной задачи - системы с жесткой упругой характеристикой типа Дуффинга $R(x)=\alpha x+\beta x^3$ - получены известные /из работ В. Каннингхэма/ и новые простые уравнения критических состояний, хорошо аппроксимирующие результаты относительно сложных решений системы параметрических уравнений /6/.

При рассмотрении периодических колебаний малоизученного класса систем с мягкой упругой характеристикой, кроме описанной неустойчивости типа "скачка" амплитуд, имеющей место в дорезонансной области $(\omega < \theta)$ при умеренно больших амплитудах возможно также качественное изменение режима движения в зарезонансной области $(\omega > \theta)$ при больших амплитудах, превышающих определенные критические значения. В дальнейших исследованиях рассматриваются различные мягкие системы, объединяющие оба вида отсутствия реализуемых периодических колебаний.

При исследованиях мягких систем был принят критерий, согласно которому переход от периодических колебаний с большой амплитудой к апериодическим движениям происходит в том случае, если амплитуда колебаний превысит значение ненулевых корней функции мягкой упругой характеристики. При этом восстанавливающая сила изменит знак и превратится в толкающую силу. Для систем, имеющих несмежные формы устойчивого равновесия, происходит качественный переход к иным режимам колебаний или к колебаниям вокруг другого положения равновесия.

Принятый критерий, являясь точным для консервативных свободных колебаний, может быть принят также для вынужденных стационарных колебаний при резонансе по основной частоте на основании вывода /В.Л. Вейц, В.К. Дондрошанский, М.З. Коловский, В.И. Чирлев/ о том, что стационарные резонансные колебания можно рассматривать как свободные без учета трения. В стационарном резонансном режиме энергия рассеивания за счет трения компенсируется работой внешних сил возмущения. Так для уравнения /I/ при $N(\dot{x})=F(t)$ и $\ddot{x}(t_*)=0$ критерием орбитальной неустойчивости, т.е. неустойчивости в любом смысле, будет условие

$$R(A_{кр})=0\ ,\quad R'(A_{кр})<0\ ,$$

где $R(x)$ - мягкая непрерывная упругая характеристика, имеющая в положении устойчивого равновесия $R'(x)>0$.

Для вывода решения дифференциального уравнения /I/, пригодного к колебаниям с большими амплитудами близкими к области апериодических движений, недостаточно прежнего представления фазовой функции в упрощенном виде /4/. При этом принято иное выражение, верное для $k\approx 1$ и имеющее вид

$$\psi t\approx F(\varphi,k)=\frac{2}{\pi}K'(k)\ln tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}\left(a'_0-\frac{2}{3}a'_1 tg^2\varphi+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a'_2 tg^4\varphi-\ldots\right),\quad /7/$$

где

$$a'_n=a'_{n-1}-\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right](k')^{2n}\ ,$$

$$k'=\sqrt{1-k^2}\ ,$$

$$K'(k)=K(k')$$

При переходе к апериодическому движению, когда $k\to 1$, $K(k)\to\infty, \theta(A)\to 0, a_0\to 0, a_n\to 0$, выражение /7/ упрощается

$$\psi t=\ln tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Это позволяет представить заменяющее уравнение в виде

$$z''(\varepsilon)+z(\varepsilon)=\frac{F}{\psi}\,\frac{\cos\omega t}{\cos\varepsilon}=\frac{F}{\psi}\sin\gamma(\varepsilon)\qquad /8/$$

Для решения этого уравнения применен асимптотический метод. Решение уравнения /8/ ищется в виде

$$z(\varepsilon)=C\cos(\gamma+\lambda)\ ,$$

где C и λ должны удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned}\frac{dC}{d\varepsilon}&=-\frac{F\cos\lambda}{\psi(1-\nu)}\\ \frac{d\lambda}{d\varepsilon}&=\nu-1+\frac{F\cos\lambda}{C\psi(1+\nu)}\end{aligned}\right\}\qquad /9/$$

Здесь принято $\nu=\frac{d\gamma}{d\varepsilon}$

Решение системы уравнений /9/ получено путем последовательных приближений

- в первом приближении $\lambda = \frac{\pi}{2}$ и $C = \frac{F}{\psi(1-\nu^2)}$;
- во втором приближении

$$\lambda = \arccos\left[-\frac{2\nu\nu'}{(1-\nu^2)(1-\nu)}\right],$$

$$C = \frac{F}{\psi(1-\nu^2)}\,\frac{1-(\cos\lambda)^2}{\sqrt{1-(\cos\lambda)^2}+\varepsilon\frac{[(\nu')^2+\nu'\nu''](1-\nu^2)(1-\nu)+\nu(\nu')^2(1+2\nu-3\nu^3)}{(1-\nu^2)(1-\nu)^3}}.$$

Анализ обоих приближений показывает, что для больших и малых величин β разница между ними невелика, и поэтому принято более простое решение первого приближения

$$z(\varepsilon) = \frac{F}{\psi(1-\nu^2)}\,\frac{\cos\omega t}{\cos\varepsilon}$$

Возвратившись к старым переменным получаем частное решение, пригодное для существенно нелинейных стационарных колебаний вблизи области апериодических движений, в виде

$$f(x) = \frac{\psi F}{\psi^2-\omega^2}\cos\omega t$$

Таким образом, устойчивые периодические колебания будут иметь место при условии

$$F < \frac{f(A_{кр})}{\psi(A_{кр})}\left[\psi^2(A_{кр})-\omega^2\right]$$

В главе рассмотрены также системы с диссипативными силами - силами вязкого и турбулентного сопротивлений. Для границ неустойчивости периодических колебаний определены координаты экстремальных точек, ниже которых существуют только периодические колебания без неустойчивости типа "скачка". Характерным для турбулентного сопротивления является наличие также и верхних экстремальных точек, выше которых периодические колебания также не имеют "скачков" амплитуды. При значениях коэффициента трения $n_T = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\beta}{5\alpha}}$ и более системы с жесткими характеристиками типа Дуффинга совсем не имеют области неустойчивости периодических колебаний.

Для частных систем с жесткими характеристиками построены в безразмерных параметрах амплитудно-частотные характеристики и графики в осях параметров возбуждения, где указаны границы апериодических и неустойчивых колебательных режимов движения. Предлагаемые графики в осях параметров возбуждения F и ω хорошо дополняют общепринятые амплитудно-частотные характеристики и позволяют получить полную информацию о поведении движений систем.

Результаты аналитических решений сравниваются с решениями, полученными на аналоговых и цифровых вычислительных машинах. Совпадение результатов обеих решений хорошее.

Третья глава посвящена практическим приемам нахождения уравнений критических состояний для колебаний частных систем с различными мягкими упругими характеристиками и гармонической возбуждающей силой.

Так, для недиссипативных систем с мягкой упругой характеристикой типа Дуффинга $R(x)=\alpha x-\beta x^3$ критерием достижения границы области апериодических движений будет соблюдение равенства $R(x)=0$. Это условие, за исключением тривиального случая, соблюдается при $A_{кр}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. При этом значение производной равно $R'(A_{кр})=-2\alpha<0$

Условием сохранения периодических колебаний такой системы в зарезонансной зоне $(\omega>\theta)$ будет соблюдение неравенства

$$F<\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\frac{\alpha}{2}-\omega^2\right) \qquad /10/$$

Выражение получено из амплитудно-частотной характеристики для амплитуд, близких к предельной.

Для оценки точности условия /10/ проведено сравнение его с точным решением уравнения

$$\ddot{x}(t)+\alpha x(t)-\beta x^3(t)=F\,sn(\omega t,k)$$

полученным в виде $x=A\,sn(\omega t,k)$

где $A=\dfrac{F}{\alpha-(1+k^2)\omega^2}$

Решение это дает при $A_{\text{кр}}=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ выражение уравнения критических состояний /I0/. Из этого следует сделать вывод, что уравнение критических состояний, будучи точным решением для возмущений в виде эллиптических функций, является приближенным в случае гармонических возмущений.

В дорезонансной зоне $(\omega<\theta)$ граница неустойчивости периодических колебаний определяется решением системы уравнений /6/ или приближенно согласно уравнению

$$F=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\left(\alpha-\omega^2\right)$$

При учете действия в такой системе сил вязкого трения $\left[N(\dot{x})=2n_{в}\dot{x}(t)\right]$ уравнения критических состояний записываются так

для $\omega>\theta$ $$F=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{2}+n^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2\right]}$$

для $\omega<\theta$ $$F=\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\alpha+n^2}\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}\left[\left(\alpha+n^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2\right]}$$

В случае действия в системе турбулентного сопротивления $\left[N(\dot{x})=n_{т}\dot{x}|\dot{x}|\right]$ эти уравнения принимают вид :

для $\omega>\theta$ $$F=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\left\{\left[\frac{\alpha}{2}+\omega^2\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{\alpha}{\beta}n^2-1\right)\right]^2+\frac{16}{\pi^2}\frac{\alpha}{\beta}n^2\omega^4\right\}},$$

для $\omega<\theta$ $$F\approx\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}\left\{\left[\alpha+\omega^2\left(\frac{4}{3}\frac{\alpha}{\pi^2\beta}n^2-1\right)\right]^2+\frac{16\alpha}{3\pi^2\beta}n^2\omega^4\right\}}.$$

Рассмотрены частные случаи систем с мягкими упругими характеристиками в виде функций симметричных непрерывных /осциллятор с мягкой характеристикой типа Дуффинга $R(x)=\alpha x-\beta x^3$, маятник $R(\xi)=\alpha\sin\xi$, система с перескоком $R(x)=-\alpha x+\beta x^3$ /, несимметричных непрерывных /осциллятор с упругой характеристикой в виде степенного ряда $R(x)=\delta+\alpha x+\gamma x^2-\beta x^3$/, симметричных, имеющих разрыв или люфт /осциллятор с предварительно сжатыми мягкими пружинами, качающийся параллелепипед, осциллятор с зазорами и мягкими пружинами/.

Выражения критических состояний колебаний систем с несимметричной упругой характеристикой получены симметризацией функции $R(x)$ путем переноса начала отсчета координат перемещений.

Так, для границы области неустойчивости периодических колебаний недиссипативной несимметричной системы уравнения записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} f(A_y) &= \frac{\theta(A_y)}{\theta^2(A_y)-\omega^2}F+\frac{\delta_*}{\theta(A_y)} \\ \partial(A_y)&\left[1+\frac{f(A_y)\theta'(A_y)}{f'(A_y)\theta(A_y)}-\delta_*\frac{\theta'(A_y)}{\theta^2(A_y)f'(A_y)}\right]-\omega=0 \end{aligned}\right\}$$

Приближенное же выражение для границы области неустойчивости периодических колебаний имеет вид

$$F=\frac{1}{\alpha_*^*}\left|\left(\pm\frac{2}{3}\alpha_*\sqrt{\frac{\alpha_*}{3\beta}}-\delta_*\right)\left(\alpha_*^*-\omega^2\right)\right|_{min}.$$

Здесь принято

$$\alpha_*=\alpha+\frac{\gamma^2}{3\beta}, \quad \delta_*=\delta-\frac{\gamma}{3\beta}\left(\alpha+\frac{2}{3}\frac{\gamma^2}{\beta}\right)$$

$$\alpha_*^*=\alpha-2\gamma X_0-3\beta X_0^2, \quad y=X-\frac{\gamma}{3\beta}.$$

Показано, что нет необходимости делать достаточно сложные выводы с целью уточнения фазовых функций для систем имеющих всевозможные упругие характеристики, а также пользоваться фазовыми функциями записанными в неконструктивном виде. Так, ряд задач /маятник, осциллятор с предварительно сжатыми пружинами, качающийся параллелепипед, осциллятор с зазорами/ решен с применением приближенного способа замены исходных систем эквивалентными с простыми функциями упругих характеристик типа Дуффинга, линейных или кусочно-линейных.

Перечисленные колебательные системы исследованы также с учетом диссипативных сил /вязкого и турбулентного трений/.

Аналитические решения хорошо подтверждаются решениями на аналоговой и цифровой вычислительных машинах.

<u>Четвертая глава</u> посвящена изучению мало исследованных задач нахождения областей устойчивости периодических колебаний нелинейных систем с бигармоническим возбуждением вида

$$F(t)=F(\cos\omega t+\rho\cos p\omega t),$$

где ρ - величина отношения амплитуд возбуждения

p - кратность гармоник /принимаются целочисленные величины/.

При решении, согласно методу переменного масштаба, заменяющих линейных уравнений появляется возможность использоват принцип суперпозиции. Из полученных решений найдены уравнения критических состояний периодических колебаний нелинейных систем при бигармоническом возбуждении. Характерной их особенностью является наличие двух зон неустойчивости периодических колебаний для умеренно больших амплитуд. В исследованиях применялись те же физические принципы, что и ранее.

Результаты исследований следует рассматривать как приближенные, дающие завышенные оценки. При этом рассматриваются резонансные решения. В выводах также не учитываются вопросы влияния сопутствующих субгармонических и ультрагармонических колебаний.

Предложенная для исследования задача является многопараметрической. В реферируемой же работе приняты частные случаи возбуждающей силы, когда $p=1$, а $p=2$. Такая кратность гармоник создает разреженность спектра частот.

В качестве примеров рассмотрены системы с мягкими симметричными и несимметричными упругими характеристиками.

Исследованы также вопросы качественного и количественного влияния малых диссипативных сил на границы областей неустойчивости периодических колебаний и областей иных режимов движений.

<u>В пятой главе</u> установлены приближенные выражения критических состояний стационарных колебаний нелинейных систем при воздействии произвольных периодических возбуждений. При этом, возмущения, функции которых удовлетворяют условиям Дирихле, разложением в ряд Фурье сводятся к полигармоническим функциям

$$F(t)=C+\sum_{m=1}^{\infty}D_m \sin(\omega_m t+\varphi_m), \quad /m=1,2,3,\ldots/ ,$$

где $C=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^T F(t)dt$, $\quad a_m=\frac{\omega}{\pi}\int_0^T F(t)\cos\omega_m t\,dt$,

$D_m=\sqrt{a_m^2-b_m^2}$, $\quad b_m=\frac{\omega}{\pi}\int_0^T F(t)\sin\omega_m t\,dt$

$\varphi_m=\operatorname{arctg}\frac{a_m}{b_m}$, $\quad \omega_m=m\omega$

Получены частные решения уравнения /I/ для случаев стационарного режима при умеренно больших амплитудах и амплитудах близких к критическим, а также найдены уравнения критических состояний для общего случая несимметричного возбуждения.

Для зарезонансной зоны колебаний $(\omega > \theta)$ уравнение критических состояний в случае недиссипативной системы с несимметричной мягкой характеристикой имеет вид

$$f(A_v) = \frac{\delta_*}{\psi(A_v)} \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(A_v)\mathcal{D}_m \vartheta_m}{|\psi^2(A_v) - \omega_m^2|}, \qquad /11/$$

где $\vartheta_m = \sin(\omega_m t + \varphi_m)_*$ - значение тригонометрической функции для критического значения аргумента $(\omega_m t + \varphi_m)_*$, полученного при условии $\frac{df(y)}{dt} = 0$, при котором функция /11/ имеет наибольшее значение.

Для определения границ областей неустойчивости периодических колебаний получены системы уравнений критических состояний. В частном случае недиссипативной колебательной системы с несимметричной упругой характеристикой уравнения критических состояний имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & f(A_v) = \frac{\delta_*}{\theta(A_v)} \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta(A_v)\mathcal{D}_m \vartheta_m}{|\theta^2(A_v) - \omega_m^2|} \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^2(A_v)\left[1 + \frac{f(A_v)\theta'(A_v)}{f'(A_v)\theta(A_v)}\right]^2 - 2\delta_* \omega_m^2 \frac{\theta'(A_v)}{\theta^2(A_v) f'(A_v)}\left[1 + \frac{f(A_v)\theta'(A_v)}{f'(A_v)\theta(A_v)}\right] - \omega_m^2}{|\theta^2(A_v) - \omega_m^2|} \mathcal{D}_m \vartheta_m = 0 \end{aligned}\right\} \qquad /12/$$

Ввиду сложности совместного решения выражений /12/ для практического пользования в частных задачах получены более простые выражения, хорошо апроксимирующие исходные.

На примерах систем с мягкими упругими характеристиками в виде симметричной типа Дуффинга, несимметричной и разрывных функций /осциллятор с предварительно сжатыми пружинами, осциллятор с зазорами/ исследовано влияние периодических возбуждений прямоугольной и треугольной форм. При вычислениях учитывался только первый член ряда разложения функций возбуждения, что дает достаточно удовлетворительную сходимость с результатами машинных решений.

Рассмотрено также влияние сил вязкого и турбулентного сопротивлений на области периодических колебаний.

Приложение содержит принятую в исследованиях методику нахождения границ областей неустойчивости периодических колебаний и областей качественных изменений режимов движений нелинейных систем при различных возбуждениях с помощью электронной цифровой /"Наири-3"/ и аналоговой /МН-7/ вычислительных машин.

В заключительной части на основании проведенных исследований отмечаются основные результаты работы.

I. Для колебательных систем общего вида получены конструктивные выражения и графики границ областей неустойчивости периодических колебаний /неустойчивость типа "скачка"/, имеющих место при колебаниях с умеренно большими амплитудами.

2. Для систем с мягкими упругими характеристиками дано теоретическое и экспериментальное подтверждение критерия перехода к иным режимам движений при вынужденных колебаниях с амплитудами, превышающими значения ненулевых корней упругой характеристики.

3. На основании исследований колебаний систем с мягкими симметричными и несимметричными упругими характеристиками при амплитудах, близких к предельным, получены конструктивные решения, уравнения критических состояний и графики границ областей неустойчивости периодических колебаний и областей иных режимов движений. Решения для систем с гармоническим возбуждением распространены также и на системы с бигармоническим и произвольным периодическим возбуждением.

4. Даны условия существования устойчивых периодических колебаний с большими и малыми амплитудами "систем с перескоком".

5. Предложен приближенный способ нахождения границ областей неустойчивости периодических колебаний и областей других режимов

движений для сложных систем, таких как системы с неаналитической функцией упругой характеристики.

6. Для некоторых систем частного вида /маятника, системы Дуффинга, "системы с перескоком", качающегося параллелепипеда/ при гармоническом возбуждении полученн аналитические выражения и графики границ областей непериодических движений в безразмерных параметрах.

7. Отмечено, что при одних и тех же условиях на границу области неустойчивости периодических колебаний с большими амплитудами оказывает большее влияние турбулентное сопротивление, чем вязкое, а в случае малых амплитуд - менее значительное. Найдена еще одна /верхняя/ область устойчивых колебаний с амплитудами, при которых турбулентное сопротивление становится достаточно большим.

8. Аналитическими и экспериментальными /на ЭЦВМ и ЭМУ/ исследованиями еще раз подтверждена гипотеза И.Г. Малкина о преобладании при резонансных колебаниях гармоник с теми же частотами, что и возмущение. Гипотеза применялась при новых исследованиях - при отыскании границ областей неустойчивости периодических колебаний с умеренно большими амплитудами и границ областей иных режимов движения с предельными амплитудами.

9. Показано, что при произвольных периодических возбуждениях, близких к гармоническим, для нахождения областей периодических колебаний можно ограничиться рассмотрением одной или нескольких первых гармоник разложения функции возбуждения в ряд Фурье.

10. Установлено, что для слабо диссипативных систем области периодических колебаний вблизи резонанса по одной из частот полигармонического возбуждения близки к соответствующим областям при моногармоническом возбуждении. С увеличением сил сопротивления границы расходятся.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах

1. Бондарь Н.Г., Горбатов В.С. Устойчивость стационарных нелинейных колебаний при гармоническом возбуждении. Труды ДИИТ"а, вып. 144, "Прикладная теория колебаний и динамика мостов", изд. ДИИТ, Днепропетровск, 1972.

2. Бондарь Н.Г., Горбатов В.С. Устойчивость стационарных нелинейных колебаний при бигармоническом возбуждении. Труды ДИИТ"а, вып. 144, "Прикладная теория колебаний и динамика мостов", изд. ДИИТ, Днепропетровск, 1972.

3. Горбатов В.С. Орбитальная неустойчивость нелинейных стационарных колебаний при произвольном периодическом возбуждении. Рукопись № 52-73 депонирована в ЦНИИТЭИ МПС.

4. Горбатов В.С. Устойчивость колебаний систем имеющих разрывы и люфты при периодическом возбуждении. Труды КИИГА, вып.1, "Вопросы проектирования, строительства и механизации аэропортов",изд. КИИГА, Киев, 1974.

5. Бондарь Н.Г., Горбатов В.С. Устойчивость стационарных колебаний упругих нелинейных систем. Тезисы докладов IУ Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике, М., 1972.

6. Горбатов В.С. Об изменениях в процессе эксплуатации условий устойчивости нелинейно упругих систем. Тезисы докладов Республиканской конференции по строительству зданий и сооружений гражданской авиации, РДЭНТП, Киев, 1975.

Основные результаты диссертации опубликованы также в монографии Н.Г. Бондаря "Нелинейные стационарные колебания", "Наукова думка", К., 1974.

Отдельные результаты проведенных исследований были доложены

на IУ Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике /Харьков, сентябрь 1972 г./

на Республиканской конференции по строительству зданий и сооружений гражданской авиации /Киев, май 1975 г./;

на юбилейной научно-технической конференции ДИИТа /Днепропетровск, ноябрь 1972 г./;

на заседании семинара кафедры мостов Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, с 1972 по 1974 г.;

на заседании научно-технического семинара факультета аэропортов Киевского института инженеров гражданской авиации, 1973 г.

В полном объеме содержание диссертационной работы доложено на заседании кафедры мостов и НИЛ динамики мостов Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, апрель 1975 г.

Подписано к печати 8?04.75 БТ 20098

Формат 1 16 70х84 Об 1 п.л. Тираж 200 экз. Заказ 272

Отпечатано БКМП ВЦ, Столярова, 3 г.Днепропетровск