

ЛОГИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНТИНУАЛЬНЫХ БАЛОК

На основі методу початкових параметрів, асоційованих матриць та елементів математичної логіки запропонована формальна процедура розрахунку поздовжніх та крутильних коливань багатопрогонових балок з безперервним розподілом мас.

На основе метода начальных параметров, ассоциированных матриц и элементов математической логики предложена формальная процедура расчета продольных и крутильных колебаний многопролетных балок с непрерывным распределением масс.

The formal procedure for calculations of longitudinal and torsion vibrations of the multispan beams with continuous mass distribution on the basis of the method of start parameters, associated matrices and elements of mathematical logic is proposed.

Для континуальних балок, имеющих кусочно-постоянные (ступенчатые) характеристики и сосредоточенные включения в виде упругих связей или сосредоточенных масс получение точного аналитического решения, описывающего продольные и крутильные колебания представляет определенные трудности. На практике такие задачи встречаются при моделировании продольных колебаний пересекающихся балок, пилонов вантовых мостов, мачт, поездов, или крутильных – для балок проезжей части железнодорожных мостов, различных валов и других. Поэтому исследования в этой области являются актуальными.

Решения с использованием обобщенных функций, методов деформаций, начальных параметров и ряда других приведены в работах [2, 5, 6, 8]. Для расчета одномерных стержневых систем в [1, 3] привлечены понятия теории конечных автоматов. Такой подход позволяет широко использовать топологические методы и элементы математической логики.

Целью данной статьи является применение конечно-автоматного моделирования к расчету продольных и крутильных колебаний балок с непрерывным распределением масс.

Согласно [1], неразрезная балка моделируется системой связанных конечных автоматов с одинаковым количеством входов на каждом из концов, определяемых совокупностью булевых функций из фиксированных (0) и произвольных (1) граничных параметров. Возможный набор комбинаций граничных условий в местах сопряжения отдельных участков балки формирует ассоциированную матрицу выхода. Равенство нулю произведения соответствующих матриц участков определяет уравнение частот свободных колебаний для континуальной балки

$$V_1 \prod_{i=2}^{n-1} M_{xi} V_n = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим прямолинейную n -пролетную балку с произвольными однородными граничными условиями и соответствующую ей логическую схему в виде цепочки связанных конечных автоматов (рис. 1). Характерные блоки обозначим пунктирными линиями, задавая нумерацию и координаты стержней в порядке их следования. Сечения элементов, погонная масса μ , жесткости при растяжении-сжатии EF , кручении GJ_k в пределах каждого из пролетов считаются постоянными.

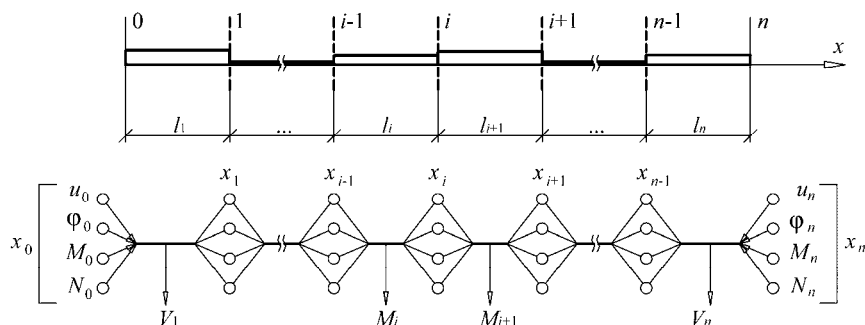


Рис. 1

Концевые граничные параметры каждого участка связаны с начальными параметрами этого же участка известным соотношением [2]:

$$\mathfrak{P}_{i+1} = M_B \mathfrak{P}_i, \quad (2)$$

где M_B – матрица влияния начальных параметров; $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{P}_{i+1}$ – векторы параметров в i -м и $(i+1)$ -м сечениях; $\mathfrak{P}_{i,i+1} = \{u, \varphi, M, N\}_{i,i+1}$.

Перебор возможных граничных условий в местах сопряжения отдельных стержней возможен только для двух параметров: линейных перемещений u_x вдоль оси x и осевых усилий N_Π – для продольных колебаний, и угловых перемещений φ_x и крутящих моментов M_K – для крутильных. Соответствующую матрицу влияния M_B можно представить в виде:

$$M_B = \begin{bmatrix} \cos \lambda_\Pi & 0 & 0 & -\alpha \lambda_\Pi \sin \lambda_\Pi \\ 0 & \cos \lambda_K & -\beta \lambda_K \sin \lambda_K & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta \lambda_K} \sin \lambda_K & \cos \lambda_K & 0 \\ \frac{1}{\alpha \lambda_\Pi} \sin \lambda_\Pi & 0 & 0 & \cos \lambda_\Pi \end{bmatrix}_i, \quad (3)$$

где $\lambda_\Pi^2 = \frac{\mu_i \omega_j^2 l_i^2}{EF_i}$, $\lambda_K^2 = \frac{J_{xi} \omega_j^2 l_i^2}{GJ_{ki}}$, $\alpha_i = \frac{EF_i}{l_i}$, $\beta_i = \frac{GJ_{ki}}{l_i}$; l_i – длина i -го пролета балки; J_{xi} – погонный момент инерции массы балки относительно ее продольной оси; ω_j – круговая частота j -ой формы колебаний.

Комбинируя последовательно все граничные условия начала и конца стержня, получим по четыре возможных его состояния для продольных и крутильных колебаний. Каждому из этих состояний соответствует частотный опре-

делитель стержня, являющийся минором 3-го порядка матрицы (3). Анализируя все полученные миноры, можно прийти к выводу, что каждый из них тождественен определенному элементу матрицы M_B . По аналогии с [3], проставляя определители в порядке последовательного перебора всех значений булевых функций двух переменных для продольных и двух – для крутильных колебаний, получим ассоциированную матрицу M (табл. 1), в которой каждый элемент записан в порядке логического следования кодов начальных (НП) и концевых (КП) граничных параметров.

Таблица 1

КП \ НП	01	01	10	10
10	$\cos \lambda_\Pi$	0	0	$-\alpha \lambda_\Pi \sin \lambda_\Pi$
10	0	$\cos \lambda_K$	$-\beta \lambda_K \sin \lambda_K$	0
01	0	$\frac{1}{\beta \lambda_K} \sin \lambda_K$	$\cos \lambda_K$	0
01	$\frac{1}{\alpha \lambda_\Pi} \sin \lambda_\Pi$	0	0	$\cos \lambda_\Pi$

Возможным состояниям концов стержня при однородных граничных условиях с одинаковым числом произвольных и фиксированных

параметров соответствуют элементы ассоциированной матрицы M_x (табл. 2).

Таблица 2

КП НП	0011	0101	1010	1100
1100	S	$-\beta\lambda_k U$	$-\alpha\lambda_n V$	$\alpha\beta\lambda_n\lambda_k T$
1010	$\frac{1}{\beta\lambda_k} U$	S	$-\frac{\alpha\lambda_n}{\beta\lambda_k} T$	$-\alpha\lambda_n V$
0101	$\frac{1}{\alpha\lambda_n} V$	$-\frac{\beta\lambda_k}{\alpha\lambda_n} T$	S	$-\beta\lambda_k U$
0011	$\frac{1}{\alpha\beta\lambda_n\lambda_k} T$	$\frac{1}{\alpha\lambda_n} V$	$\frac{1}{\beta\lambda_k} U$	S

Здесь функции S , T , U , V взяты с учетом следующих соотношений:

$$S = \cos \lambda_n \cos \lambda_k; \quad T = \sin \lambda_n \sin \lambda_k;$$

$$U = \cos \lambda_n \sin \lambda_k; \quad V = \sin \lambda_n \cos \lambda_k.$$

Рассмотрим участок балки с упругими связями относительно продольных перемещений или относительно поворота сечения на левом конце (рис. 2).

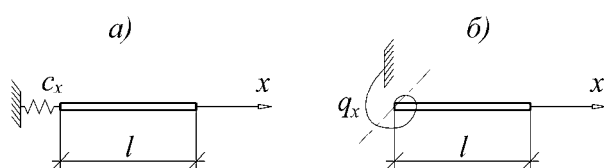


Рис. 2

Согласно [4], ассоциированная матрица участка балки с упругой опорой может быть получена из исходной матрицы M_x прибавлением к строке, соответствующей участку без опоры, строки, соответствующей участку с абсолютно жесткой опорой, умноженной на жесткость упругой опоры.

В матричной форме данное правило для упругой связи (рис. 2, а) можно записать следующим образом:

$$M_{1x} = M_x + c_x \left(M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)} \right), \quad (4)$$

где M_x – ассоциированная матрица обычного участка балки (табл. 2); $M_{0101}^{(1)}$, $M_{0011}^{(2)}$ – матрицы, состоящие из первой и второй строк функций кодов 0101, 0011 (табл. 2), и имеющие остальные нулевые строки.

Соответственно, произвольный участок балки с упругим относительно поворота сечения закреплением (рис. 2, б) описывается матрицей M_{2x} :

$$M_{2x} = M_x + q_x \left(M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(3)} \right). \quad (5)$$

Отмеченные закономерности позволяют составлять уравнение частот конструкции с упругими связями путем последовательного их «отсечения». Так, если участок балки имеет два вида упругих закреплений (рис. 3, а), то количество возможных его состояний определится четырьмя возможными комбинациями кодов начальных параметров (матрица M_x , табл. 2), соответствующими четырем вариантам граничных значений q_x и c_x :

$$q_x = 0, c_x = 0 \text{ (1100)}; \quad q_x = \infty, c_x = 0 \text{ (1010)};$$

$$q_x = 0, c_x = \infty \text{ (0101)}; \quad q_x = \infty, c_x = \infty \text{ (0011)}.$$

Поэтому структуру матрицы M_{3x} можно представить в следующем виде:

$$M_{3x} = M_x + c_x \left(M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)} \right) +$$

$$+ q_x \left(M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(3)} \right) + q_x c_x M_{0011}^{(1)}. \quad (6)$$

Матрицы M_{1x} , M_{2x} , M_{3x} имеют тот же порядок, что и матрица M_x и дают возможность формального построения уравнений частот для многопролетных балок с любым сочетанием продольно-линейных и поворотных упругих опор в форме (1).

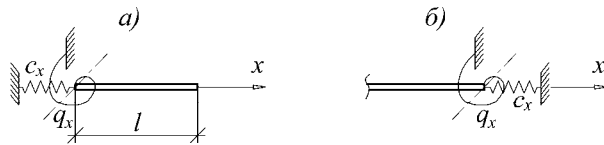


Рис. 3

Для вектора V_n участка балки с упругими опорами на правом конце (рис. 3, б) независимо от вида граничных условий на левом конце можно записать:

$$V_n = V_{1100} + q_x V_{1010} + c_x V_{0101} + q_x c_x V_{0011}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что вектор V_n в уравнении (1) будет представлять собой столбец матрицы M_x , соответствующий правому свободному концу (код граничных условий 1100), плюс столбец с кодом 1010, умноженный на жесткость q_x , плюс столбец с кодом 0101, умноженный на жесткость c_x , плюс столбец с кодом 0011, умноженный на произведение жесткостей $q_x c_x$.

Для участка балки с сосредоточенной массой m в месте расположения упругих связей необходимо вместо c_x и q_x подставить соответственно $c_x - m\omega_j^2$ и $q_x - J_m\omega_j^2$ где J_m – момент инерции сосредоточенной массы относительно оси x .

В качестве примера рассмотрим балку, один конец которой заделан, другой свободен и нагружен сосредоточенной массой m . Уравнение частот определяется непосредственно элементом матрицы M_{3x} с кодами 1100 и 0011, удовлетворяющими граничным условиям по концам балки:

$$S - \frac{m\omega_j^2}{\alpha\lambda_n} V - \frac{J_m\omega_j^2}{\beta\lambda_k} U + \frac{mJ_m\omega_j^4}{\alpha\beta\lambda_n\lambda_k} T = 0. \quad (8)$$

Раскрывая значения функций S , T , U , V , после преобразований получим:

$$1 - \frac{\lambda_n}{m'} \operatorname{tg} \lambda_n - \frac{\lambda_k}{i'} \operatorname{tg} \lambda_k + \frac{\lambda_n \lambda_k}{m' i'} \operatorname{tg} \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_k = 0. \quad (9)$$

Для продольных колебаний при $\lambda_k \rightarrow 0$

$$\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n = m', \quad (10)$$

для крутильных – при $\lambda_n \rightarrow 0$

$$\lambda_k \operatorname{tg} \lambda_k = i'. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) в точности совпадают с приведенными в работе [5]. Выражения в правой части $m' = \frac{\mu l}{m}$ и $i' = \frac{J_x l}{J_m}$ представляют, со-

ответственно, отношение массы всей балки к массе, сосредоточенной на ее конце, и отношение момента инерции всей балки к моменту инерции сосредоточенной массы.

Если пренебречь массой балки по отношению к массе груза, т. е. при $\mu \rightarrow 0$; $\lambda_n, \lambda_k \rightarrow 0$ получим

$$(\omega^2 - \omega_n^2)(\omega^2 - \omega_k^2) = 0, \quad (12)$$

$$\text{откуда } \omega_1 = \omega_n = \sqrt{\frac{EF}{ml}}, \quad \omega_2 = \omega_k = \sqrt{\frac{GJ_k}{J_m l}}.$$

Рассмотрим неразрезную балку с различными сечениями в пролетах (рис. 4).

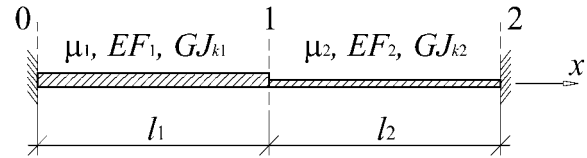


Рис. 4

Уравнение частот получим умножением строки матрицы M_x (табл. 2), соответствующей условию закрепления начала первого стержня (код 0011), на столбец матрицы M_x , соответствующий граничным условиям конца второго стержня (код 0011):

$$\frac{T_1 S_2}{\lambda_{n1} \lambda_{k1} \alpha_1 \beta_1} + \frac{V_1 U_2}{\lambda_{n1} \lambda_{k2} \alpha_1 \beta_2} + \frac{V_2 U_1}{\lambda_{n2} \lambda_{k1} \alpha_2 \beta_1} + \frac{T_2 S_1}{\lambda_{n2} \lambda_{k2} \alpha_2 \beta_2} = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13), переходя к пределу функций при $\lambda_k \rightarrow 0$ (продольные колебания) и $\lambda_n \rightarrow 0$ (крутильные колебания), после преобразований получим известные решения [6].

$$\operatorname{tg} \lambda_{n1} + \frac{\lambda_{n1} \alpha_1}{\lambda_{n2} \alpha_2} \operatorname{tg} \lambda_{n2} = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \lambda_{k1} + \frac{\lambda_{k1} \beta_1}{\lambda_{k2} \beta_2} \operatorname{tg} \lambda_{k2} = 0. \quad (15)$$

Аналогичным путем рассчитываются и более сложные цепные стержневые системы. Такой подход позволяет свести их расчет к мно-

гократно повторяемому циклу арифметических операций при переходе от одного блока системы к другому. Предлагаемая форма учета упругих закреплений представляется более удобной, чем обычно используемая в методе прогонки, поскольку отпадает необходимость введения специальных матриц перехода с большим числом нулевых элементов.

Для определения форм колебаний в качестве исходной логической модели используется такое же отображение, как и для построения матричной формы уравнений частот. Неизвестные начальные параметры могут быть вычислены по правилу Крамера способом прогонки [7].

Условия периодичности в неразрезных конструкциях позволяют упростить значительную часть инженерных расчетов. К примеру, для продольных колебаний неразрезных регулярных и квазирегулярных балок с постоянными по длине массой μ , жесткостью EF , равными пролетами и продольно-линейными промежуточными упругими опорами выражение (1) об-
ращается в

$$V_1 M_{1x}^{n-2} V_n = 0. \quad (16)$$

Для удобства программирования и вычислений на ЭВМ представим матрицу M_{1x} как сумму двух матриц $M_{1x} = M_x + c_x M_p$, где

$$M_p = M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)}. \quad (17)$$

Матрицы M_x и M_p обладают замечательными особенностями при многократном их перемножении. Так, функции $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ при возведении матрицы M_x в n -ю степень преобразуются в такую же матрицу M_x с функциями элементов $S(n\lambda)$, $T(n\lambda)$, $U(n\lambda)$, $V(n\lambda)$.

В свою очередь, матрицу M_p разделим на две матрицы M_{p1} и M_{p2} . Принимая при $\lambda_k \rightarrow 0$, $S = U = \cos \lambda_n$, $T = V = \sin \lambda_n$ получим

$$M_{p1} = \frac{1}{\alpha \lambda_n} \sin \lambda_n E_1, \quad M_{p2} = \cos \lambda_n E_2, \quad \text{где}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $M_{p2}^n = 0$ и $M_{p2} M_{p1} = 0$. Поэтому для матрицы M_p^n можно записать:

$$M_p^n = M_{p1}^{n-1} (M_{p1} + n M_{p2}), \quad (18)$$

или

$$M_p^n = \left(\frac{1}{\alpha \lambda_n} \right)^n \sin^n \lambda_n \times \\ \times E_1^{n-1} (E_1 + n \alpha \lambda_n \operatorname{ctg} \lambda_n E_2). \quad (19)$$

Для крутильных колебаний регулярной балки с упругими опорами относительно поворота промежуточных опорных сечений уравнение частот имеет вид:

$$V_1 M_{2x}^{n-2} V_n = 0. \quad (20)$$

Как и в предыдущем случае, представим матрицу M_{2x} суммой двух матриц

$$M_{2x} = M_x + q_x \bar{M}_p, \quad (21)$$

где $\bar{M}_p = M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(3)}$ и $\bar{M}_p = \bar{M}_{p1} + \bar{M}_{p2}$.

Принимая при $\lambda_n \rightarrow 0$, $S = V = \cos \lambda_k$, $T = U = \sin \lambda_k$, можно записать

$$\bar{M}_{p1} = \frac{1}{\beta \lambda_k} \sin \lambda_k \bar{E}_1; \quad \bar{M}_{p2} = \cos \lambda_k \bar{E}_2, \quad \text{где}$$

$$\bar{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\bar{M}_{p2}^n = 0$, $\bar{M}_{p2} \bar{M}_{p1} = 0$ и

$$\bar{M}_p^n = \bar{M}_{p1}^{n-1} (\bar{M}_{p1} + n \bar{M}_{p2}). \quad (22)$$

Подставляя выражения для $\bar{M}_{p1}$ и $\bar{M}_{p2}$ в (22), получим

$$\bar{M}_p^n = \left(\frac{1}{\beta \lambda_k} \right)^n \sin^n \lambda_k \times \\ \times \bar{E}_1^{n-1} (\bar{E}_1 + n \beta \lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k \bar{E}_2). \quad (23)$$

Таким образом, предложенный алгоритм построения ассоциированных матриц позволяет учитывать различные виды упругих закреплений, а также систематизировать динамический

расчет континуальных балок. Решения для матриц, входящих в уравнения (16), (20), дают возможность в простой форме получить уравнения частот неразрезной регулярной балки с любыми граничными условиями, а также избежать значительных вычислительных трудностей, связанных с появлением малых разностей больших чисел.

В дальнейших исследованиях предполагается применить конечные автоматы к моделированию свободных и вынужденных колебаний многопролетных балок, имеющих сосредоточенные включения в продольную жесткость, с учетом сил неупругого сопротивления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов А. С. Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций // 6th International Conference «Modern Building Materials, Structures and Techniques» (19-21 May 1999, Vilnius, Lithuania) // Proceedings. – Vol. III. – Vilnius: Technika, 1999, P. 223-228.
2. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
3. Эйхе Г. Н. Приложение теории конечных автоматов к решению задач динамики стержневых конструкций. Исследование статики и динамики мостов: Межвуз. сб. науч. тр. ДИИТа. – Д., 1985. – С. 91-105.
4. Распопов А. С. Колебания континуальных балок с промежуточными опорами. / Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. Вип. 9. – Д.: ДИИТ, 2005. – С. 199-202.
5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение (Ленингр. отд.), 1976. – 320 с.
6. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
7. Эйхе Г. Н. Построение форм колебаний балок на упругих опорах. / Г. Н. Эйхе, А. С. Распопов. Вопросы статической и динамической работы мостов: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1990. – С. 69-72.
8. Лазарян В. А. Обобщенные функции в задачах механики / В. А. Лазарян, С. И. Конашенко. – К.: Наук. думка, 1974. – 192 с.

Поступила в редколлегию 05.01.2008.