

УДК 656.222

Ю. В. ЧИБІСОВ, канд. техн. наук, доц., ДНУЗТ ім. академіка В. Лазаряна,
Дніпропетровськ

ФОРМУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПОТОКІВ ПОЇЗДІВ НА МЕРЕЖІ ЗАЛІЗНИЦЬ

У даній статті запропонована математична модель раціонального розподілу поїздопотоків по залізничній мережі. Основна мета досліджень – розробка алгоритму формування напрямків поїздопотоків по найкоротшому шляху мережі залізниць, що забезпечить мінімальні витрати енергоресурсів на просування поїздів. Розподіл потоків по мережі виконано за допомогою теорії графів. В якості критерію оптимальності обрано мінімум поїздо-кілометрів пробігу.

Ключові слова: залізнична мережа, потік поїздів, математична модель, раціональний розподіл, векторна оптимізація.

Вступ. У часи дефіциту рухомого складу, а також під час переходу значної кількості рухомих одиниць залізничного транспорту у приватну власність, все більшої актуальності набувають питання раціонального використання вагонного та локомотивного парку, а також питання мінімізації витрат енергоресурсів на просування вагоно- та поїздопотоків. В умовах ринкових відносин на транспортному ринку, залізниця повинна приділяти більше уваги щодо якісного обслуговування кожного клієнта. Для підтримки конкурентоспроможності залізниць необхідно впроваджувати нові технології щодо покращення використання технічних засобів транспорту.

Аналіз досліджень та публікацій. Задачі розподілу поїздопотоків по залізничній мережі за різними критеріями розглянуто багатьма авторами і має безліч алгоритмів її рішень [1 – 3]. Завдання раціонального розподілу потоків між станціями також широко представлена в літературі [4 – 7]. Потоківі задачі, як правило, зводяться до пошуку такого розподілу потоків у мережі, при якому б забезпечувався екстремум деякого критерію. При цьому необхідно враховувати обмеження, що накладаються умовами збереження потоків у вузлах і неперевикнення потоками пропускної спроможності дуг. Типовими потіковими задачами є задача про потік мінімальної вартості, про максимальний потік, транспортна задача, задача про призначення та інші. Для їх розв’язання розроблено

© Ю. В. ЧИБІСОВ, 2013

чимало ефективних алгоритмів, сформувався навіть відповідний напрям обчислювальних методів під назвою потокового програмування [8].

Формулювання мети та задачі досліджень. Відомі моделі розподілу потоків у мережах [8] базуються на поняттях теорії графів [9]. Це пов'язано з тим, що граф дає можливість наочно відобразити структуру мережі, а параметри його вузлів і дуг – представити основними числовими характеристиками її елементів. Набір характеристик залежить від природи системи, що досліджується, а також характеру задач, що вирішуються, однак у поточкових моделях їх, як правило, представляють такими параметрами, як зовнішній потік у вузлі, потік по дузі, пропускна спроможність дуги, вартість транспортування одиниці потоку по дузі тощо.

Для того, щоб виконати розподіл потоків по залізничній мережі, за допомогою алгоритмів, описаних у теорії графів [2 – 4, 10 – 11], необхідно представити залізничну мережу у вигляді графу з відповідними пунктами відправлення та призначення транспортної продукції (поїздів), а також задати вагу кожної дуги (відстань між пунктами).

В якості критерію оптимальності обираємо мінімум поїздо-кілометрів пробігу:

$$C = \sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot l(\omega) \rightarrow \min, \quad (1)$$

де $l(\omega)$ – довжина шляху ω ;

$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega}$ сумарний потік на графі $G(V, E)$.

Постановка задачі розподілу поїздопотоків на мережі. У даній статті завдання визначення раціональних потоків на мережі представлено як задача векторної оптимізації.

Нехай $G(V, E)$ – неорієнтований граф з переліком вершин V і ребер E . Кожному ребру відповідає число $R(e)$.

Граф $G(V, E)$ має задані потоки P_{ij} , $i, j \in V$.

Нехай W_{ij} – набір простих шляхів з i в j , а ω – деякий простий шлях з W_{ij} .

Позначимо через $X_{ij\omega}$ частину потоку P_{ij} , який реалізується на шляху ω , тоді має місце

$$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} = P_{ij}. \quad (2)$$

Введемо індикатор ребра e на шляху ω , тобто

$$I_{\omega}(e) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } e \in \omega; \\ 0, & \text{якщо } e \notin \omega, \end{cases} \quad (3)$$

тоді сумарний потік по ребру e для набору шляхів W_{ij} складе

$$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot I_{\omega}(e), \quad (4)$$

а загальний потік по даному ребру e дорівнюватиме

$$N(e) = \sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot I_{\omega}(e); \quad e \in E. \quad (5)$$

Якщо $\bar{N}(e)$ – максимально допустимий потік для ребра, то повинно виконуватися обмеження по пропускній спроможності:

$$N(e) \leq \bar{N}(e), e \in E. \quad (6)$$

Якщо припустити, що $l(\omega)$ – довжина шляху ω , $l(\omega) = \sum_{e \in \omega} R(e)$, то величина

$$Pr = \sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} \cdot l(\omega) \quad (7)$$

може слугувати оцінкою раціональності розподілу заданих потоків P_{ij} , $i, j \in V$ на графі $G(V, E)$.

Позначимо E_* – набір ребер, які були використані для побудови набору простих шляхів між усіма вершинами, тоді величина

$$L(E_*) = \sum_{e \in E_*} R(e) \quad (8)$$

відображає довжину мережі.

Тобто, має місце завдання визначити такий розподіл потоків $X_{ij\omega}$, щоб показники $Pr(E_*)$ і $L(E_*)$ були мінімальними, і виконувалися умови (2) та (6).

Іншими словами завдання розподілу поїздопотоків зводиться до задачі векторної оптимізації

$$\begin{pmatrix} L(E_*) \\ Pr(E_*) \end{pmatrix} \rightarrow \min, \quad (9)$$

за умов (2) та (6).

Зауважимо, що в підсумовуванні $\sum_{i,j \in V}$ повинно бути $i < j$, це означає, що буде визначено розподіл потоків в одному напрямку (туди), якщо $i > j$, то отримаємо розподіл в іншому напрямку (назад).

Якщо розглядати граф $G(V, E)$ як модель мережі залізниці, вершини – найменування станцій, то розуміючи під $R(e)$ – відстань, а P_{ij} як поїздопотік між пунктами i та j по ребру e , тоді $L(E_*)$ являє собою довжину мережі вантажних перевезень, а $Pr(E_*)$ з точністю до постійного множника відображає витрати часу на доставку вантажу [12 – 14].

Формування напрямків поїздопотоків по найкоротшому шляху з $(i \rightarrow j)$

Вибір напрямку здійснюється за формулою:

$$\min_{e \in E \setminus E_*} \frac{Pr(E_* \cup \{e\}) - Pr(E_*)}{l(E_* \cup \{e\}) - l(E_*)}. \quad (10)$$

Графічне представлення формування напрямків поїздопотоків відображено на рис. 1.

Нехай e_* реалізує мінімум, тоді, поповнивши $E_* = E_* \cup \{e_*\}$, прийдемо в точку A_2 (рис. 1) і т. д. таких точок буде $|E \setminus E_*| + 1$.

Зауважимо, що $Pr(E_* \cup \{e\}) \leq Pr(E_*)$

так як $L(E_* \cup \{e\}) \leq L(E_*)$.

Число напрямків поїздопотоків з i в

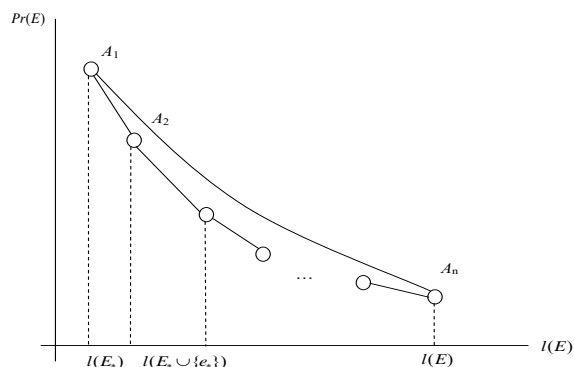


Рис. 1 – Формування напрямку поїздопотоків по найкоротшому шляху з i в j

j по найкоротшому шляху з $(i \rightarrow j)$ буде $N(N+1)/2$, де $N = |V|$.

Побудова простих шляхів на графі. Як один з варіантів побудови простих шляхів на графі, може служити наступний алгоритм. Нехай N – кількість вершин у графі $G(V, E)$; zn – початкова вершина; zk – кінцева вершина. Необхідно визначити всі прості шляхи з zn в zk .

1) Позначимо KP – безліч простих шляхів; KW – безліч варіантів можливих шляхів.

2) Задаємо початкову та кінцеву вершину zn і zk . Поповнюємо $KW = \{\{zn\}\}$.

3) Вибираємо варіант можливого шляху $w \in KW$ і видаляємо його з безлічі KW .

4) Визначаємо z_1, z_2, \dots, z_p суміжні вершини для шляху w .

5) Перевіряємо кожну суміжну вершину $z_i, i = \overline{1, p}, p < N$:

5.1) якщо $z_i = zk$, то $KP \cup \{w \cup z_i\}$ – поповнюємо множину простих шляхів новим простим шляхом;

5.2) якщо $z_i \cap w = \emptyset$, то $KW \cup \{w \cup z_i\}$ – поповнюємо множину варіантів можливих шляхів новим варіантом.

6) Якщо $KW = \emptyset$ – множина варіантів можливих шляхів порожня, то побудовані всі прості шляхи, інакше переходимо до пункту 5.2.

Для прикладу розглянемо побудову простих шляхів на частині мережі залізниць України, представленій у спрощеному вигляді, схема якої у вигляді графу наведена на рис. 2.

Розглянемо граф G , що містить $N = 7$ вершин (рис. 2). Визначимо всі прості шляхи з $zn = 2$ в $zk = 4$. Поповнюємо множину варіантів шляхів $KW = \{\{1\}\}$.

Обираємо один з варіантів $w = \{1\}$; видаляємо його з множини $KW = \{\}$.

Визначаємо суміжні вершини для шляху $w = \{1\}$ $z_1 = 3, z_2 = 1$; кількість суміжних вершин $p = 2$.

Так як $z_1 \neq zk, z_2 \neq zk$, то $KP = \{\}$.

Поповнюємо множину варіантів шляхів новими варіантами $KW = \{\{2, 3\}, \{2, 1\}\}$.

Обираємо один з варіантів $w = \{2, 3\}$; видаляємо його з множини $KW = \{\{2, 1\}\}$.

Визначаємо суміжні вершини для шляху $w = \{2, 3\}$ $z_1 = 4, z_2 = 7$; кількість суміжних вершин $p = 2$.

Так як $z_1 = zk$, а $z_2 \neq zk$, то $KP = \{2, 3, 4\}$.

Поповнюємо множину варіантів шляхів новими варіантами $KW = \{\{2, 3, 7\}, \{2, 1\}\}$.

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2, 3, 7\}$ - $KP = \{2, 3, 4\}$,

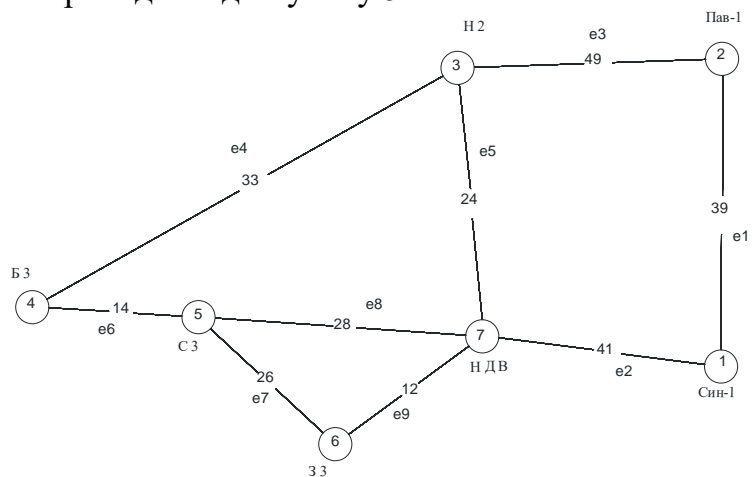


Рис. 2 – Залізнична мережа у вигляді графу

$$KW = \{\{2,3,7,5\}, \{2,3,7,6\}, \{2,1\}\}.$$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,3,7,5\} - KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}\}.$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,3,7,6\} - KW = \{\{2,3,7,6,5\}, \{2,1\}\}.$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,3,7,6,5\} - KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}, \{2,3,7,6,5,4\}\},$ а також видаляємо цей варіант з множини рішень $KW = \{\{2,1\}\}.$

Додаємо до варіанту $KW = \{\{2,1\}\}$ суміжну вершину $z_1 = 7$, тоді $KW = \{\{2,1,7\}\}.$ Тепер додаємо до варіанту $KW = \{\{2,1,7\}\}$ три суміжні вершини $z_1 = 3, z_2 = 5, z_3 = 6.$ тоді $KW = \{\{2,1,7,3\}, \{2,1,7,5\}, \{2,1,7,6\}\}.$ Так як $z_1 \neq z_k, z_2 \neq z_k,$ а також $z_3 \neq z_k,$ то кількість можливих варіантів шляхів $KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}, \{2,3,7,6,5,4\}\}.$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,1,7,3\},$ додаємо до нього суміжну вершину $z_1 = 4,$ тоді $KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}, \{2,3,7,6,5,4\}, \{2,1,7,3,4\}\},$ при цьому $KW = \{\{2,1,7,5\}, \{2,1,7,6\}\}.$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,1,7,5\},$ додаємо до нього суміжну вершину $z_1 = 4,$ тоді $KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}, \{2,3,7,6,5,4\}, \{2,1,7,3,4\}, \{2,1,7,5,4\}\},$ при цьому $KW = \{\{2,1,7,6\}\}.$

Розглядаючи варіант шляху $w = \{2,1,7,6\},$ додаємо до нього суміжну вершину $z_1 = 5,$ тоді $KW = \{\{2,1,7,6,5\}\}.$ Так як $z_1 \neq z_k,$ то продовжуємо пошук можливих шляхів. Додаємо до варіанту $KW = \{\{2,1,7,6,5\}\}$ суміжну вершину $z_1 = 4,$ тоді $KW = \{\},$ при цьому додаємо шлях $w = \{2,1,7,6,5,4\}$ до множини шляхів, тоді $KP = \{\{2,3,4\}, \{2,3,7,5,4\}, \{2,3,7,6,5,4\}, \{2,1,7,3,4\}, \{2,1,7,5,4\}, \{2,1,7,6,5,4\}\}$ Кінець алгоритму.

На рис. 3 представлена графічна реалізація методу побудови простих шляхів.

Таким чином, із вершини 2 в вершину 4 існує 6 можливих шляхів руху поїздопотоків.

Розподіл поїздопотоків за напрямками. Нехай у підграфу $H(V, E_*) \in W(E_*)$ напрямів, ω – деякий шлях з $W(E_*),$ тоді, якщо ребро $e \in \omega,$ то поїздопотік по даному ребру від напрямку позначимо через $X(e, \omega).$ Сумарний потік по ребру e складе

$$N(e) = \sum_{\substack{\omega \in W(E_*) \\ e \in \omega}} X(e, \omega). \quad (11)$$

Величина $N(E_*) = \max_{e \in E_*} N(e)$ визначає максимальний поїздопотік, тоді якщо $N(E_*) \leq \bar{N},$ то граф $H(V, E_*)$ є допустимим з точки зору пропускної спроможності шляху. У випадку, коли максимально допустимий потік \bar{N} у кожного ребра різний,

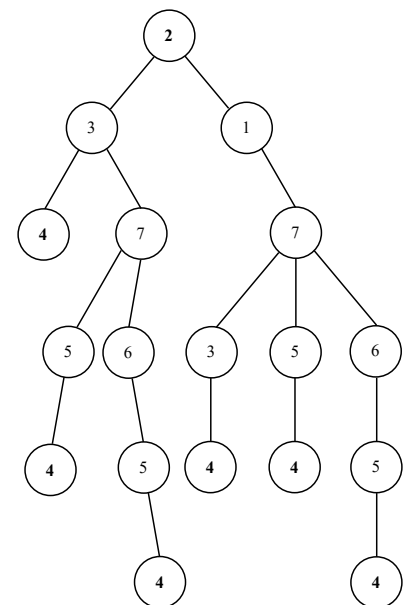


Рис. 3 – Графічна реалізація методу побудови простих шляхів

то допустимість графа $H(V, E_*)$ визначається співвідношенням $N(e) \leq \bar{N}(e)$, $\forall e \in E_*$. Формула для підрахунку величини $N(e, \omega)$ являє собою вираз

$$X(e, \omega) = \sum_{\rho=1}^{j(e)} \sum_{v=j(e)+1}^{m_\omega} P(i_\rho, i_v), \quad (12)$$

де $P(i_\rho, i_v)$ – поїздопотік з i_ρ в i_v ;

$(j(e), j(e)+1)$ – номери вершин в маршруті ω , які з'єднані ребром $e \in \omega$;

m_ω – число вершин у маршруті ω .

Розглянемо граф G (рис. 4), що відображає залізничну мережу між 7 пунктами. Задаємо назви ребер:

$e1=\{1,2\}$, $e2=\{1,7\}$, $e3=\{2,3\}$, $e4=\{3,4\}$, $e5=\{3,7\}$, $e6=\{4,5\}$, $e7=\{5,6\}$, $e8=\{5,7\}$, $e9=\{6,7\}$.

Задана матриця відстаней $R(e)$ і поїздопотоків P_{ij} мають вигляд:

$$R(e) = \begin{bmatrix} 0 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41 \\ 39 & 0 & 49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 & 33 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 26 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 12 \\ 41 & 0 & 24 & 0 & 28 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 20 & 0 & 5 & 5 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 18 & 40 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 3 & 10 \\ 2 & 11 & 14 & 0 & 5 & 7 & 16 \\ 3 & 10 & 11 & 5 & 0 & 20 & 8 \\ 0 & 21 & 8 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Обмеження з пропускної спроможності для кожного ребра приймаємо однаковим. Воно буде рівним $\bar{N}(e) = 140$.

Використовуючи пакет символьних обчислень *Maple* [15 – 17], отримаємо рішення з розподілу поїздопотоків на простих шляхах з урахуванням пропускних спроможностей ребер.

На першому етапі виконання завдання побудуємо остовний граф мінімальної сумарної довжини [2 – 3] $H(V, E_*)$, який показано на рис. 5. Сумарна довжина побудованого графа $H(V, E_*)$ становить $L(E_*) = 171$, набір ребер даного графа являє собою $E_* = \{e1, e3, e4, e5, e6, e9\}$.

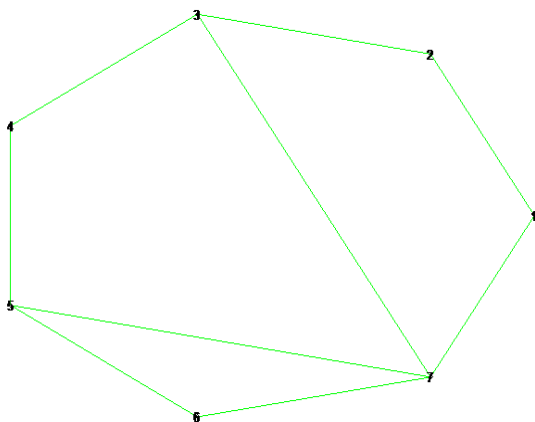


Рис. 4 – Вихідний граф мережі

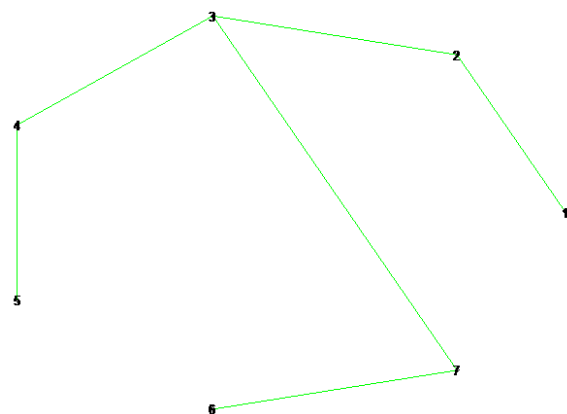


Рис. 5 – Остовний граф мінімальної сумарної довжини

Побудована множина всіх простих шляхів з i в j , при чому $i < j$, тобто розглядається один напрямок (туди), для графа $H(V, E_*)$ представлено в табл. 1

Таблиця 1 – Перелік шляхів графа

3\B	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6	B 7
3 1	[e1]	[e1, e3]	[e1, e3, e4]	[e1, e3, e4, e6]	[e1, e3, e5, e9]	[e1, e3, e5]
3 2	–	[e3]	[e3, e4]	[e3, e4, e6]	[e3, e5, e9]	[e3, e5]
3 3	–	–	[e4]	[e4, e6]	[e5, e9]	[e5]
3 4	–	–	–	[e6]	[e4, e5, e9]	[e4, e5]
3 5	–	–	–	–	[e6, e4, e5, e9]	[e6, e4, e5]
3 6	–	–	–	–	–	[e9]

Розподіл поїздопотоків на множині простих шляхів здійснюється наступним чином: з вершини 1 в вершину 2 по шляху [e1] реалізується поїздопотік 2; з вершини 1 в вершину 3 по шляху [e1, e3] реалізується поїздопотік 20; з вершини 1 в вершину 5 по шляху [e1, e3, e4, e6] реалізується поїздопотік 5; з вершини 1 у вершину 6 по шляху [e1, e3, e5, e9] реалізується поїздопотік 5; з вершини 1 у вершину 7 по шляху [e1, e3, e5] реалізується поїздопотік 14; з вершини 2 у вершину 4 по шляху [e3, e4] реалізується поїздопотік 18; з вершини 2 у вершину 5 по шляху [e3, e4, e6] реалізується поїздопотік 40; з вершини 2 у вершину 7 по шляху [e3, e5] реалізується поїздопотік 17; з вершини 3 в вершину 4 по шляху [e4] реалізується поїздопотік 11; з вершини 3 в вершину 5 по шляху [e4, e6] реалізується поїздопотік 7; з вершини 3 в вершину 6 по шляху [e5, e9] реалізується поїздопотік 3; з вершини 3 в вершину 7 по шляху [e5] реалізується поїздопотік 10; з вершини 4 в вершину 5 по шляху [e6] реалізується поїздопотік 5; з вершини 4 в вершину 6 по шляху [e4, e5, e9] реалізується поїздопотік 7; з вершини 4 в вершину 7 по шляху [e4, e5] реалізується поїздопотік 16; з вершини 5 в вершину 6 по шляху [e6, e4, e5, e9] реалізується поїздопотік 20; з вершини 5 в вершину 7 по шляху [e6, e4, e5] реалізується поїздопотік 8.

При даному розподілі навантаження на кожне ребро за поїздопотоків відображене в табл. 2.

Таблиця 2 – Навантаження ребер за поїздопотоків

Ребро	e1	e3	e4	e5	e6	e9
Довжина	39	49	33	24	14	12
Поїздопотік	46	119	132	95	65	35

Даний розподіл поїздопотоків задовольняє обмеження з пропускної спроможності.

А значення показника раціональності розподілу потоків складе $Pr(E_*)=15591$ поїздо-км.

Множина ребер, які не увійшли в граф $H(V, E_*)$ являє собою $\{e2, e7, e8\}$.

Побудуємо всі можливі комбінації з елементів даної множини:

$QE = \{\{e2\}, \{e7\}, \{e8\}, \{e2, e7\}, \{e2, e8\}, \{e7, e8\}, \{e2, e7, e8\}\}$.

Вибираючи з побудованої множини комбінацію ребер мінімальної ваги, по черзі додаємо їх до графа $H(V, E_*)$ і проводимо розподіл поїздопотоків на отриманому графі для всіх простих шляхів.

Тобто наступним кроком для розподілу поїздопотоків буде додавання до графа

$H(V, E_*)$ ребра $\{e7\}$, вага якого дорівнює 26, рис. 6.

Тепер множина ребер даного графа являє собою

$E_* = \{e1, e3, e4, e5, e6, e7, e9\}$. Розподіл потоку з доданим ребром відбувається аналогічним чином: з вершини 1 в вершину 2 по шляху $[e1]$ реалізується поїздопотік 2; з вершини 1 в вершину 3 по шляху $[e1, e3]$ реалізується поїздопотік 20; з вершини 1 в вершину 5 по шляху $[e1, e3, e4, e6]$ реалізується поїздопотік 5; з вершини 1 у вершину 6 по шляху $[e1, e3, e5, e9]$ реалізується поїздопотік 5; з вершини 1 у вершину 7 по шляху $[e1, e3, e5]$ реалізується поїздопотік 14; з вершини 2 у вершину 4 по шляху $[e3, e4]$ реалізується поїздопотік 18; з вершини 2 в вершину 5 по шляху $[e3, e4, e6]$ реалізується поїздопотік 40; з вершини 2 у вершину 7 по шляху $[e3, e5]$ реалізується поїздопотік 17; з вершини 3 в вершину 4 по шляху $[e4]$ реалізується поїздопотік 11; з вершини 3 в вершину 5 по шляху $[e4, e6]$ реалізується поїздопотік 7; з вершини 3 в вершину 6 по шляху $[e5, e9]$ реалізується поїздопотік 3; з вершини 3 в вершину 7 по шляху $[e5]$ реалізується поїздопотік 10; з вершини 4 в вершину 5 по шляху $[e6]$ реалізується поїздопотік 5; з вершини 4 в вершину 6 по шляху $[e6, e7]$ реалізується поїздопотік 7; з вершини 4 в вершину 7 по шляху $[e6, e7, e9]$ реалізується поїздопотік 16; з вершини 5 в вершину 6 по шляху $[e7]$ реалізується поїздопотік 20; з вершини 5 в вершину 7 по шляху $[e7, e9]$ реалізується поїздопотік 8.

При цьому розподіл навантаження на кожне ребро за поїздопотокм відображений в табл. 3.

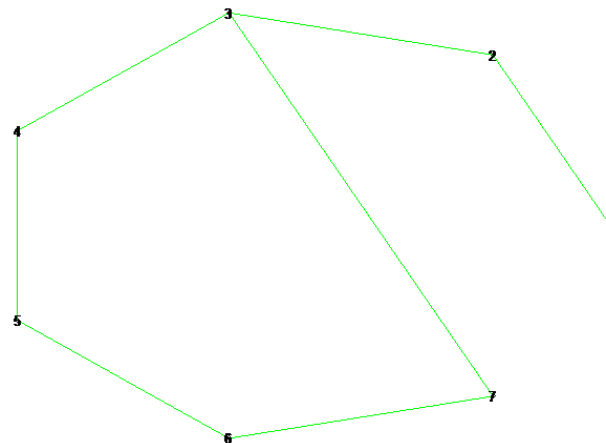


Рис. 6 – Додавання ребра $\{e7\}$ до графу мінімальної довжини

Таблиця 3 – Навантаження ребер поїздопотокм

Ребро	e1	e3	e4	e5	e6	e7	e9
Довжина	39	49	33	24	14	26	12
Поїздопотік	46	119	81	49	80	51	32

Отримані значення не перевищують обмежень з пропускної спроможності.

Значення показника раціональності розподілу потоків складе $Pr(E_*)=14304$ поїздо-км.

Для подальшого розподілу поїздопотоків, додаємо в граф $H(V, E_*)$ комбінації ребер з множини QE . Значення показників раціональності розподілу потоків для даних графів зведемо в табл. 4.

Серед розглянутих 8 варіантів (починаючи з графа мінімальної довжини $H(V, E_*)$, і закінчуючи повним графом G) тільки чотири незрівнянних між собою по Парето [12]. Це варіант 1 графа $H(V, E_*)$, довжина шляху якого $L(E_*)=171$ км, значення показника $Pr(E_*)=15591$ поїздо-км; варіант 2 графа $H(V, E_*)$ (до графа $H(V, E_*)$ додали ребра $\{e7\}$), довжина шляху якого $L(E_*)=197$ км, значення показника $Pr(E_*)=14304$ поїздо-км.

Таблиця 4 – Значення показників раціональності при додаванні в граф комбінації ребер, починаючи з мінімальної ваги

Номер варіанта	Ребра, що додаються до графу	Вага ребер, що додаються, км	Сумарна довжина шляху графа, км	Значення показника раціональності, поїздо- км
1	-	-	171	15591
2	e7	26	197	14304
3	e8	28	199	14442
4	e2	41	212	14067
5	e7, e8	54	225	15364
6	e2, e7	67	238	12215
7	e2, e8	69	240	12303
8	e2, e7, e8	95	266	11925

Варіант 6 з табл. 4 (до графа $H(V, E_*)$ додали ребра $\{e2, e7\}$); довжина шляху $L(E_*) = 238$ км, значення показника $Pr(E_*) = 12215$ поїздо-км; варіант 5 з табл. 4 (до графа $H(V, E_*)$ додали ребра $\{e2, e7, e8\}$), довжина шляху $L(E_*) = 266$ км, значення показника $Pr(E_*) = 11925$ поїздо-км; варіант 8 з табл. 4 (до графа $H(V, E_*)$ додали ребра $\{e2, e4, e9\}$); довжина шляху $L(E_*) = 266$ км, значення показника $Pr(E_*) = 11925$ поїздо-

-км, а решта «гірші», ніж ці чотири.

Графічне представлення незрівнянних між собою по Парето варіантів представлено на рис. 7.

Таким чином, рішенням завдання векторної оптимізації

(9) за умов (2) і (6) для розглянутого прикладу є варіанти 1, 2, 3, 5, та 8 з табл. 4, що значно скоротило число усіх можливих варіантів рішень для прийняття рішення.

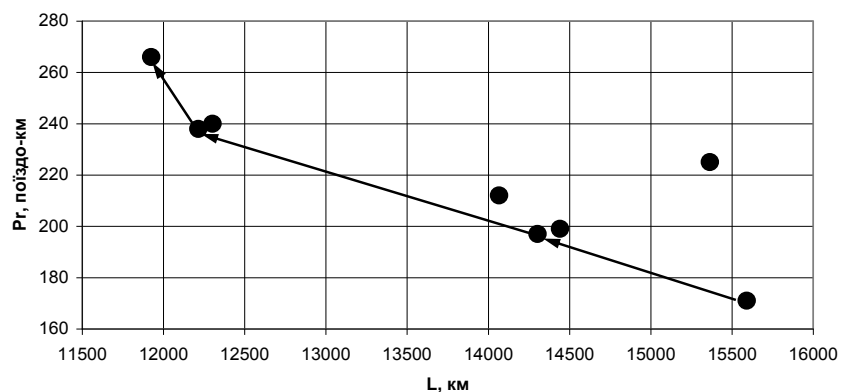


Рис. 7 – Графічне представлення незрівнянних варіантів по Парето

Висновки. Задача розподілу потоків поїздів на мережі має ряд недоліків:

- задача вирішується для однорідного вантажу;
- призначення поїздопотоків не витримуються;
- не враховується пропускна спроможність залізничних ділянок;
- при визначенні оптимального розподілу враховується лише один критерій;
- немає можливості врахувати багатокількість перегонів;
- не враховуються різні категорії поїздів;
- не враховуються різні коефіцієнти зйому пропускної спроможності поїздами, та інші.

Тому розподіл поїздопотоків по мережі необхідно виконувати з урахуванням зазначених факторів та обмежень. Таким чином, рішенням завдання векторної

оптимізації (9) за умов (2) і (6) для розглянутого прикладу є варіанти 1, 2, 3, 5, та 8 з табл. 4, що значно скоротило число усіх можливих варіантів рішень для прийняття рішення. Вибір конкретного варіанту, це вже завдання не математичне.

Отже, завдання визначення раціональних потоків на мережі може бути представлено як задача векторної оптимізації з відповідними обмеженнями. Дана задача має широке застосування.

Якщо розглядати граф $G(V, E)$ як модель залізничної мережі, вершини – найменування відповідних пунктів призначення, то розуміючи під $R(e)$ – відстань, а під P_{ij} – поїздопотік між пунктами i та j , $L(E_*)$ являє собою довжину мережі вантажних перевезень, а $Pr(E_*)$ з точністю до постійного множника відображає витрати часу на перевезення.

Рішення даної задачі дозволяє значно скоротити число усіх можливих варіантів рішень, і допомогти прийняти рішення, серед незрівнянних по Парето варіантів, вибрати оптимальний.

Список літератури: 1. Форд, Л. Р. Потоки в сетях. / Л. Р. Форд., Д. Р. Фалкерсон // – М.: «Мир», 1966. Перевод с англ. 372 с. 2. Березина, Л. Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. / Л. Ю. Березина // – М.: Просвещение, 1979. – 143 с. 3. Носов, В. А. Комбинаторика и теория графов / В. А. Носов // Издательство: Московский государственный институт электроники и математики, 1999. 4. Юнушкин, А. А. Распределение потоков в транспортных сетях (зарубежный опыт) / А. А. Юнушкин // Вестник транспорта. – 2007. – №12. – С. 31-34. 5. Поттгофф Г. Теория транспортных потоков. / Г. Поттгофф // – Берлин., 618 с. 6. Андерсон, Д. А. Дискретная математика и комбинаторика [Текст] / Джеймс А. Андерсон // пер. з англ. – М.: Вид. дім «Вільямс», 2004. – 960 с. 7. Босов, А. А. Визначення раціональних маршрутів руху поїздів на мережі доріг [Текст] / А. А. Босов, Ю. В. Чибісов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 34 – Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010. – С. 180-188. 8. Йенсен, П. Потокоевое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес // – М.: Радио и связь, 1984. – 392 с. 9. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес // – М.: Мир, 1978. – 432 с. 10. Паночийшин, Ю. М. Задача розподілу потоків у мережах із багатьма джерелами і стоками / Ю. М. Паночийшин // Вісник Хмельницького національного університету №4, 2009 – с. 112 – 116. 11. Кірік, О. Є. Розподіл потоків у мережах складної кільцевої топології / О. Є. Кірік // Наукові вісті НТУУ «КПІ» секція Інформаційні технології, системний аналіз та керування (вип. 2) – 2009 р. – с. 18 – 26. 12. Поденоський, В. В. «Парето-оптимальные решения многокритериальных задач» / В. В. Поденоський, В. Д. Ногін // – М.: Наука. Головна редакція фізико-математичної літератури, 1982. – 256 с. 13. Седых, В. И. «Парето-оптимальное моделирование инженерных задач» / В. И. Седых, В. П. Болотов, Ю. К. Машиунин, А. Г. Сатаев // Комп'ютерний журнал. Наукова стаття, 2004. – 22 с. 14. Bosov, A. A. Vector Optimization by Two Objective Junctions / A. A. Bosov, G. N. Kodola, L. N. Savchenko [Електрон. ресурс]: опис. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/0708.4307v1>. 15. Аладьев, В. З. "Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект" / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба // Монография / Гродно: Гродненский Госуниверситет, 2011, 517 с. 16. Эдвардс, Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни. // 3-е издание. Киев.: Диалектика-Вильямс, 2007. ISBN 978-5-8459-1166-7. 17. Курсанов, М. Н. Графы в Maple / М. Н. Курсанов // М.: Физматлит, 2007, 168с.

Надійшла до редколегії 05.09.2013

УДК 656.222

Формування раціональних потоків поїздів на мережі залізниць / Чибісов Ю. В. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2013. - № 56 (1029). – С.66-76. – Бібліогр.: 17 назв.

В данной статье предложена математическая модель рационального распределения поездопотоков по железнодорожной сети. Основная цель исследований – разработка алгоритма формирования направлений поездопотоков по кратчайшему пути сети железных дорог, что

обеспечит минимальные расходы энергоресурсов на продвижение поездов. Распределение потоков по сети выполнено с помощью теории графов. В качестве критерия оптимальности выбран минимум поезд-километров пробега.

Ключевые слова: железнодорожная сеть, поток поездов, математическая модель, рациональное распределение, векторная оптимизация.

Mathematical model of the rational trainflow distribution on the rail network was offered in this article. The main purpose of research work is development of the algorithm which will help to make the shortest paths of the trainflows, which will provide a minimum expenditure of energy resources to the promotion of trains. The trainflows distribution on the network was made with the help of the graph theory. The minimum of the train-kilometers was chosen as the optimality criterion.

Keywords: railway network, train flow, mathematical model, rational distribution, vector optimization.