МПС СССР — ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Аспирант КАЗАКЕВИЧ М. И.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Днепропетровск
1967

Публичная защита диссертации состоится на заседании Ученого совета 14 марта 1967 г.

Просим Вас и сотрудников Вашего учреждения, интересующихся темой диссертации, принять участие в заседании Ученого совета или прислать свои отзывы о работе по адресу:

г. Днепропетровск, 10, ул. Университетская, 2, институт инженеров железнодорожного транспорта.

Дата отправки автореферата 10 февраля 1967 г.

МПС СССР — ГУУЗ

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Аспирант КАЗАКЕВИЧ М. И.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель —
доктор технических наук,
профессор Н. Г. БОНДАРЬ

Днепропетровск
1967

Работа выполнена в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта.

Колебательные процессы получили широкое распространение во многих областях техники, чем обусловили бурное развитие науки о колебаниях. Классическая, линейная, теория колебаний, разработанная Лагранжем, дала ключи к раскрытию многих явлений науки и техники. Однако, с развитием таких технических отраслей, как радиотехника и электроника, автоматика и телемеханика, виброметрия и вибротранспорт, теория автоматического регулирования и другие, возник ряд проблем, в решении которых линейная теория оказалась недостаточной. Эти проблемы требовали разработки новой теории со своими методами — теории нелинейных колебаний, значительно более сложной, чем классическая теория.

Отдельные исследования по нелийненым колебаниям относятся к XIX столетию и принадлежат выдающимся математикам М. В. Остроградскому, К. Вейерштрассу, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунову. Работы А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова по исследованию нелинейных дифференциальных уравнений легли в основу новой теории нелинейных колебаний. Дальнейший толчок к развитию методов теорий нелинейных колебаний дали работы Г. Дуффинга и, в особенности, Ван-дер-Поля.

Исключительная роль в развитии методов нелинейной теории колебаний и решении ряда проблем принадлежит советским ученым Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, Н. М. Крылову, Н. Н.. Боголюбову, А. А. Андронову и их ученикам Б. В. Булгакову, Н. Г. Четаеву, Ю. А. Митропольскому и другим*).

В работах, посвященных вынужденным колебаниям, значительное место отведено гармоническому возбуждению. Од-

*) Боголюбов Н. Н., Колебания, Механика в СССР за 30 лет, 1950.

нако в технике встречаются очень сложные виды возбуждения, и среди них наибольший интерес представляют такие, которые периодически повторяются через определенный интервал времени (период).

К наиболее часто встречающимся в технике периодическим негармоническим силам относятся так называемые инерционные и вращающие силы, развивающиеся в различных механизмах и поршневых двигателях, как, например, в машинах с кривошипно-шатунными и кривошипно-кулисными механизмами, в ткацких станках, плоскопечатных типографских машинах, вибрационных грохотах и других*).

Исследованию вынужденных колебаний нелинейных систем, возбуждаемых негармонической силой, посвящен ряд работ, которые можно подразделить на две группы.

К первой группе относятся работы, посвященные исследованию комбинационных колебаний, возникающих при одновременном действии нескольких гармоник на нелинейную систему. Впервые на комбинационные тона обратил внимание Гельмгольц. Известно, что при звучании двух нот с частотами p и q часто слышатся два тона с частотами p—q и p+q, особенно при громком звучании. Объясняя это явление, Гельмгольц предположил, что механическая колебательная система человеческого уха обладает своего рода нелинейностью. Это акустическое явление рассмотрено также в работах Рэлея, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, Ямамото и Хаяси, а также Дуффингом, который предложил для решения этой задачи нестрогий приближенный метод. Суть всех вышеупомянутых работ сводится к тому, что при воздействии внешней силы, состоящей из нескольких гармоник, на нелинейную систему вынужденные колебания совершаются не только с частотами гармоник внешней силы (p и q), но и с комбинационными тонами, построенными из этих частот (2p, 2q, q+p, q—p, O и т. д.).

Ко второй группе относятся работы, исключающие наличие комбинационных колебаний в системах, находящихся под действием нескольких гармонических возмущающих сил. Прежде всего, отметим монографию И. Г. Малкина «Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний», в которой точными методами Пуанкаре-Ляпунова исследует-

*) Инструкция по определению динамических нагрузок от машин, устанавливаемых на перекрытиях промышленных зданий, ЦНИИСК, 1966 г.

ся характер и устойчивость периодических решений уравнения вида

$$\ddot{x}+\alpha x-\beta x^3=\xi(h\cos pt+k\cos qt-2n\dot{x});$$
$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \xi>0,\ \xi\ll 1,$$

где p и q — целые числа; $q>p$. Введенная автором физическая гипотеза о преобладании в вынужденном колебании гармоник с частотами p и q позволила исследовать характер развития колебаний.

Качественные исследования И. Г. Малкина положили начало более глубокому изучению вынужденных колебаний нелинейных систем под действием нескольких гармонических возмущающих сил и, в частности, изучению взаимного влияния гармоник друг на друга.

Так, изучению взаимного влияния гармоник в нелинейных системах для установившихся движений посвящена работа А. И. Чекмарева «Взаимное влияние гармоник в нелинейных системах». В ней с помощью метода Ван-дер-Поля строится приближенное решение уравнения колебаний

$$\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=h\cos pt+k\cos qt;\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$

С помощью полученного приближенного решения, а также экспериментально на специально сконструированной установке автор получает весьма ценные практические выводы о ходе развития амплитуд и устанавливает явление исключения (подавления) действия гармоник в нелинейных системах в отличие от принципа суперпозиции в линейных системах. Влияние диссипативных сил на аналогичную систему исследовал В. П. Рубаник асимптотическими методами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Полученные В. П. Рубаником амплитудно-частотные кривые отличаются от кривых А. И. Чекмарева лишь тем, что в них отсутствуют бесконечные и некоторые неустойчивые ветви. Теоретически-экспериментальные исследования В. П. Терских подтвердили выводы А. И. Чекмарева.

Метод малого параметра был применен Ю. М. Дроздовым к задаче о колебаниях в нелинейной системе при периодическом возбуждении, представленном двумя гармониками с соотношением частот возбуждения 1:3. Очень важные практические выводы о взаимном влиянии гармоник друг на друга, полученные А. И. Чекмаревым, В. П. Терских, В. П. Рубаником и Ю. М. Дроздовым, совпадают с качественными исследованиями И. Г. Малкина.

Тем не менее, авторами вышеупомянутых работ не были получены зависимости между наибольшими отклонениями систем (амплитудами колебаний) и основной частотой возмущающей силы.

Настоящая работа посвящена исследованию установившихся колебаний нелинейных систем с одним или с несколькими (несмежными) положениями равновесия под действием периодических возмущающих сил. Рассматриваются как ситемы без сопротивления, так и диссипативные системы, причем исследуется влияние вязкого и турбулентного сопротивления на установившиеся колебания. В результате решений получаются приближенные аналитические выражения для амплитудно-частотных характеристик. Исследуется влияние гармоник на резонансные значения амплитуд в диссипативных системах. В основу исследований положена физическая гипотеза о преобладании колебаний с частотами возмущающих сил, т. е. пренебрегаем комбинационными тонами и субгармоническими колебаниями.

Для проверки полученных аналитических решений используются электронные цифровые вычислительные машины Урал-1 и Урал-3, а также электронные нелинейные моделирующие установки ЭМУ-8 и МН-7.

Диссертационная работа состоит из краткого введения, девяти глав, обсуждения результатов с выводами, списка использованной литературы и приложения.

Во введении даны в общих чертах основные этапы развития теории нелинейных колебаний.

Краткое содержание первой главы, посвященной историческому обзору с анализом выполненных исследований периодического негармонического возбуждения нелинейных систем и общей характеристике цели исследования, изложено выше.

В первом разделе диссертации, объединяющем главы со второй по пятую включительно, исследованию подлежат нелинейные системы, имеющие одно устойчивое положение равновесия. Рассматривается восстанавливающая сила, которая как правило, описывается нечетной функцией $R(x)$ от обобщенной координаты x. При этом уравнение $R(x)=0$ имеет лишь один корень, соответствующий центру периодических движений и равный нулю, если этот центр совпадает с началом отсчета координаты x.

Во второй главе изложен метод, принятый для исследования стационарных колебаний нелинейных систем, возбуждаемых периодическими негармоническими силами — метод переменного масштаба*). Основная идея этого метода заключается в том, что в исследуемом нелинейном дифференциальном уравнении делается замена переменных и зависимых, и независимых. Причем, зависимая переменная заменяется так, чтобы заменяющее дифференциальное уравнение было непременно линейным. Выполненная таким образом линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений принципиально отличается от таких хорошо известных методов, как метод эквивалентной линеаризации Крылова-Боголюбова**), или метод прямой линеаризации***), когда линеаризуются нелинейные члены.

В этой главе рассмотрены свободные колебания с целью определения собственных частот нелинейных систем.

$$\ddot{x} + R(x) = 0$$

В первом приближении при рассмотрении только стационарных колебаний ($t \to \infty$) собственная частота системы определяется по формуле

$$\nu = \sqrt{\alpha(1 + 0{,}756\tau)}\,; \qquad \tau = \frac{\beta}{\alpha} x_0^2, \qquad (2)$$

где x_0 — начальное смещение ($t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=0$).

Метод переменного масштаба является приближенным в силу линеаризации фазовой функции.

Глава третья посвящена исследованию нелинейных систем без сопротивления:

$$\ddot{x} + R(x) = F(x). \qquad (3)$$

В этой главе рассмотрены различные виды возмущающей силы:
постоянная сила

$$F(t) = F_0 = \text{const},$$

бигармоническая косинусоидальная сила

$$F(t) = F_1 \cos \omega t + F_2 \cos \mu\omega t,$$

*) Бондар М. Г., Доповіді АН УРСР, №№ 10, 11 (1961), № 7 (1962), № 3 (1963).

**) Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд. Ан УССР, 1937.

***) Пановко Я. Г., Инж. сб. АН СССР, т. 13, 1952.

бигармоническая синусоидальная сила

$$F(t) = F_1 \sin \omega t + F_2 \sin \mu\omega t$$

и произвольная периодическая сила. Здесь μ — соотношение гармоник.

Действие постоянной силы сводится к смещению центра колебаний. В системах с жесткой характеристикой восстанавливающей силы это смещение определяется однозначно в отличие от системы с мягкой характеристикой, когда смещение центра колебаний может иметь два значения в зависимости от характера приложения силы и ее величины.

При бигармоническом возбуждении определяются уравнения амплитудно-частотных характеристик. Для косинусоидальной бигармонической возмущающей силы, когда соотношение гармоник μ принимает целочисленные значения ($\mu = 2, 3, 4...$), амплитудно-частотная кривая описывается уравнением

$$\omega^2 = \nu^2 - \frac{\nu F_1}{f(A)}\left(1 + \frac{1}{\gamma\Omega}\right); \quad \gamma = \frac{F_1}{F_2}; \quad \Omega = \frac{\nu^2 - \mu^2\omega^2}{\nu^2 - \omega^2}, \tag{4}$$

а для синусоидальной силы —уравнением

$$\omega^2 = \nu^2 - \frac{\nu F_1}{f(A)}\sqrt{1-\lambda^2}\left(1 + \frac{2\lambda}{\gamma\Omega}\right), \tag{5}$$

Здесь $f(A)$ — амплитудная функция, а параметр λ равен:

$$\lambda = -\frac{1}{8}\gamma\Omega + \sqrt{\frac{1}{64}\gamma^2\Omega^2 + \frac{1}{2}}$$

Физически амплитудно-частотную характеристику можно интерпретировать как ход развития амплитуд при непрерывном медленном увеличении основной частоты возмущающей силы ω.

При бигармоническом возбуждении ход развития амплитуд, описываемый уравнением (4) или (5), характеризуется следующими основными этапами. В самом начале увеличения частоты возбуждения ω, когда разность $\nu - \mu\omega$ далека от нуля, амплитуда колебаний при действии двух гармоник больше, чем при раздельном их действии. На этом участке влияние основной гармоники на амплитуду колебаний, вызванных действием второй гармоники, существенно. В дальнейшем, с возрастанием частоты возбуждения ω, когда $\nu - \mu\omega \to 0$, развиваются резонансные амплитуды от действия второй гармоники с частотой $\mu\omega$. На этом участке влияние основной гармоники на ход развития колебаний невелико. Затем идет участок развития колебаний, вызванных действием основной гармоники, и, пока разность $\nu-\omega$ не близка к нулю, влияние второй гармоники существенно. Когда же эта разность $\nu-\omega\to 0$, развиваются резонансные амплитуды гармоники с основной частотой ω Здесь влияние второй гармоники мало. После резонанса по основной частоте ω развиваются колебания с амплитудой, большей, чем при раздельном действии гармоник.

Описанный выше ход развития амплитуд отвечает качественным исследованиям И. Г. Малкина.

Действие произвольной периодической силы периода T легко сводится к действию полигармонической силы с основной частотой $\omega=\frac{2\pi}{T}$ благодаря разложению первой в ряд Фурье*).

Уравнения амплитудно-частотных характеристик аналогичны уравнениям (4) и (5) с той лишь разницей, что в данном случае вычитаемое в правой части формул (4) и (5) содержит сумму бесконечного ряда. При этом, ход развития амплитуд также аналогичен случаю бигармонической возмущающей силы, но в отличие от последнего имеет бесконечное множество резонансных ветвей. Следует заметить, что при резонансах по высшим частотам $\omega_m (m\to\infty)$ колебательная система (3) ведет себя почти как линейная: «скелетные» кривые $\omega_m=\nu$ близки к вертикали.

В четвертой главе рассмотрено влияние линейных диссипативных сил на установившиеся колебания нелинейных систем:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+R(x)=F(t) \tag{6}$$

В случае бигармонического возбуждения таких систем уравнение кривой развития амплитуд имеет вид

$$A=\frac{F_1}{\sqrt{(\nu^2-n^2-\omega^2)^2+4n^2\nu^2}}+\frac{F_2}{\sqrt{(\nu^2-n^2-\mu^2\omega^2)^2+4n^2\nu^2}}, \tag{7}$$

где F_1 и F_2 — амплитуды гармоник с частотами ω и $\mu\omega$ соответственно, μ — соотношение гармоник: $\mu=2, 3, 4,\ldots$ Си-

*) Предполагаются выполнимыми условия Дирихле.

стема имеет двухрезонансный режим. Резонанс по высшей частоте наступает, когда $\omega = \frac{\sqrt{\nu^2 - n^2}}{\mu}$, а по низшей частоте — когда $\omega = \sqrt{\nu^2 - n^2}$. Эти выражения являются геометрическими местами точек, в которых касательные к амплитудно-частотной кривой (7) — горизонтальные прямые. Если поочередно подставить резонансные значения частот в уравнение (7), можно найти резонансные значения амплитуд. Так, при первом резонансе значение амплитуды равно

$$A_{p1} = \frac{F_2}{2n\nu} \rho_{12}$$

а при втором резонансе

$$A_{p2} = \frac{F_1}{2n\nu} \rho_{21},$$

Коэффициенты ρ_{ij} характеризуют влияние i-ой гармоники на резонансное значение амплитуды при резонансе по j-ой гармонике:

$$\rho_{12} = 1 + \frac{2n\mu^2}{\nu(\mu^2 - 1)} \frac{F_1}{F_2}; \quad \rho_{21} = 1 + \frac{2n}{\nu(1 - \mu^2)} \frac{F_2}{F_1} \tag{8}$$

Если $F_1 > 0$; $F_2 > 0$, а $\mu > 1$, то $\rho_{12} > \rho_{21}$.

К таким же результатам можно прийти, если воспользоваться методом прямой линеаризации.

Таким образом, наличие вязкого сопротивления в нелинейной системе сказывается на отсутствии бесконечных ветвей амплитудно-частотной кривой. Коэффициенты влияния ρ_{ij} указывают на то, что резонансные значения амплитуд при бигармоническом возбуждении отличаются от резонансных значений амплитуд при раздельном действии гармоник. Они зависят как от соотношения гармоник μ, так и от соотношения между амплитудами возмущающих гармоник F_1 и F_2. Причем, $\rho_{12} > 1$, а $\rho_{21} < 1$. Т. е. вторая гармоника уменьшает резонансное значение амплитуды, вызванное действием основной гармоники, и, наоборот, основная гармоника увеличивает резонансное значение амплитуды, вызванное действием второй гармоники.

Если нелинейные диссипативные системы возбуждаются произвольной периодической силой периода Т, то при выполнении условий Дирихле ее можно разложить в ряд Фурье, представить в виде полигармонического ряда с основной частотой $\omega = 2\pi/T$.

Уравнения амплитудно-частотных кривых аналогичны (7), только содержат бесконечное число членов. В выражениях резонансных значений амплитуд диссипативных систем стоят суммы бесконечных рядов. Поэтому, естественно, возникает вопрос о сходимости этих рядов.

На примере сложной функции возбуждения, имеющей симметрию третьего рода, показано получение уравнений для хода развития амплитуд установившихся колебаний и резонансных значений амплитуд. В частности, резонансное значение амплитуды при резонансе по m-ой гармонике определяется по формуле

$$A_{pm} = \frac{2m^2 F_0}{\pi^2 \nu^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+\pi^2\lambda^2}}{\lambda^2 \sqrt{(m^2-\lambda^2)^2+4m^4 N^2}};$$

$$m, \lambda = 1, 3, 5, \ldots, \tag{9}$$

где F_0 — наибольшее значение возмущающей силы за период. Входящий в эту формулу бесконечный ряд сходится и его сумма пропорциональна дзета-функции Римана $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Таким образом, сколь бы ни было велико число гармоник, составляющих разложение в ряд Фурье сложной периодической силы $F(t)$, резонансные значения амплитуд имеют конечные значения.

Сопоставление формулы (9) с выражением резонансного значения амплитуды при моногармоническом возбуждении с частотой $m\omega$

$$A^*_{pm} = \frac{F_0 \sqrt{4+\pi^2 m^2}}{\pi^2 m^2 n \nu}$$

дает влияние на резонансное значение амплитуды при резонансе по m-ой гармонике всех остальных гармоник, входящих в ряд Фурье (функции возбуждения), которое имеет вид

$$\rho_m = \frac{2m^4 N}{\sqrt{4+\pi^2 m^2}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+\pi^2\lambda^2}}{\lambda^2 \sqrt{(m^2-\lambda^2)^2+4m^4N^2}}; \quad m, \lambda=1,3,5,\ldots,$$

где $N = \frac{n}{\nu}$. С возрастанием порядка гармоник коэффициент ρ_m увеличивается. Однако, здесь надо учесть очень существенное обстоятельство. Как правило, коэффициенты ряда Фурье с возрастанием порядка гармоник резко уменьшаются. Поэтому оказывается целесообразным ограничивать ряд Фурье несколькими членами.

Нелинейные системы с турбулентным сопротивлением исследованы в пятой главе. Характерной особенностью поведения таких систем при возбуждении их как бигармоническими, так и произвольными периодическими силами, по сравнению с системами с вязким сопротивлением, является то, что в них резонансные колебания гасятся сильнее: резонансные значения амплитуд в первом случае значительно меньше, чем во втором. Эту же особенность можно наблюдать и в системах с линейной характеристикой восстанавливающей силы.

Второй раздел объединяет главы шестую, седьмую и восьмую. В нем рассматриваются колебания нелинейных систем, имеющих несмежные формы устойчивого равновесия. Благодаря тому, что в таких системах переход от одной устойчивой формы к другой происходит скачкообразно, они получили название систем с перескоком. Системы с перескоком нашли очень широкое применение в технике, это: пружинные механизмы, хлопающие мембраны, желобчатые полосы, обратный маятник со спиральной пружиной, гибкие пологие оболочки и т. д.*).

В шестой главе дан вывод уравнения движения свободных колебаний систем с перескоком на двух простейших примерах: ферма Мизеса и обратный маятник со спиральной пружиной. На основании полученного нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{q} - \alpha q + \beta q^3 = 0; \ \alpha > 0, \ \beta > 0$$

определяются периоды свободных колебаний систем с перескоком. В силу физических особенностей таких систем в зависимости от начальных условий возможны колебания относительно одного из устойчивых положений равновесия $q = \pm\sqrt{\alpha/\beta}$ — назовем эти колебания малыми — или относительно равновесного состояния $q=0$ с охватом всех трех положений равновесия (неустойчивого $q=0$ и устойчивых $q=\pm\sqrt{\alpha/\beta}$) — эти колебания назовем большими. Для нахождения периода малых колебаний можно пользоваться построенной номограм-

*) Пановко Я. Г., Губанова И. И., Устойчивость и колебания упругих систем, «Наука», 1964.

мой или приближенной формулой, полученной методом переменного масштаба

$$T_{м} \cong \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha}\sqrt[9]{2-\tau}},$$

а больших колебаний — точной формулой

$$T_{б} = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha(\tau-1)}}; \qquad \tau = \frac{\beta}{\alpha}A^{2},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, а k — его модуль, $k = \sqrt{\frac{\tau}{2(\tau-1)}}$; или приближенной формулой, полученной методом переменного масштаба

$$T_{б} \cong \frac{8{,}16}{\sqrt{2\alpha}\sqrt[3]{\tau-2}}.$$

Сопоставление результатов вычислений по точным и приближенным формулам дает расхождение, меньшее 5%.

Исследование вынужденных колебаний ведется методом переменного масштаба. Показана возможность линеаризации фазовой функции.

В седьмой главе рассмотрено гармоническое возбуждение систем с перескоком. При линеаризации по методу переменного масштаба нелинейное дифференциальное уравнение приводится к двум линейным для малых и больших колебаний. Так, для малых колебаний получается уравнение

$$\ddot{q} + \nu_{м}^{2}\left(q - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = F(t),$$

а для больших

$$\ddot{q} + \nu_{б}^{2} q = F(t).$$

Здесь $\nu_{м}$ и $\nu_{б}$ — частоты малых и больших колебаний соответственно.

В соответствии с этими уравнениями получены выражения амплитудно-частотных характеристик

$$\omega^{2} = \nu_{м}^{2} \mp \frac{F_{0}}{A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \quad \text{и} \quad \omega^{2} = \nu_{б}^{2} \mp \frac{F_{0}}{A}.$$

В зависимости от амплитуды возмущающей силы F_0 будут развиваться вначале либо малые, либо большие колебания. Установлено критическое значение $F_0^{кр}$ такое, что неравенство

$$F_0 < F_0^{кр} \tag{10}$$

является условием существования малых колебаний в дорезонансной зоне частот возбуждения.

Наличие вязкого сопротивления в системах с перескоком при гармоническом возбуждении существенно влияет на амплитуды колебаний только вблизи резонанса. При этом ход развития амплитуд описывается уравнениями

$$\omega^2 = \nu_м^2 - n^2 \mp \sqrt{\frac{F_0^2}{\left(A - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2} - 4n^2\nu_м^2},$$

$$\omega^2 = \nu_б^2 - n \mp \sqrt{\frac{F_0^2}{A^2} - 4n^2\nu_б^2},$$

а резонансные значения амплитуд равны

$$A_р = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{F_0}{2n\nu_м} \quad \text{и} \quad A_р = \frac{F_0}{2n\nu_б}$$

для малых и больших колебаний соответственно.

Ход развития амплитуд стационарных колебаний систем с перескоком резко отличается от систем, рассмотренных в первом разделе. Так, при нулевой частоте (действие постоянной силы F_0) возможны малые или большие колебания в зависимости от выполнения условия (10). В дальнейшем, с возрастанием частот возбуждения амплитуды стационарных колебаний возрастают. Если вначале развиваются малые колебания, то при некоторой частоте, меньшей резонансной, происходит срыв на верхнюю ветвь, которая может оказаться в зависимости от параметров системы и коэффициента затухания в зоне развития больших колебаний. Тогда резонансные значения амплитуд будут соответствовать большим колебаниям. После резонанса системы, который имеет место при значении частоты возмущающей силы

$$\omega_р^2 = \nu^2 - n^2$$

происходит срыв амплитудно-частотной кривой (если резонансная ветвь находится в зоне развития больших колебаний) на нижнюю ветвь, расположенную в зоне развития малых колебаний.

Глава восьмая посвящена исследованию бигармонического возбуждения систем с перескоком. Если в системе сопротивление отсутствует, то амплитудно-частотные кривые описываются уравнениями

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{F_1}{\nu_м^2 - \omega^2} + \frac{F_2}{\nu_м^2 - \mu^2\omega^2}}$$

и

$$A = \frac{F_1}{\nu_б^2 - \omega^2} + \frac{F_2}{\nu_б^2 - \mu^2\omega^2}$$

при малых и больших колебаниях соответственно, т. е. имеют две бесконечные (резонансные) ветви. Если в систему ввести диссипативные силы, пропорциональные скорости, то бесконечные ветви исчезают, уравнения амплитудно-частотных характеристик принимают вид

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{F_1}{\sqrt{(\nu_м^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\nu_м^2}} +}$$

$$\overline{+ \frac{F_2}{\sqrt{(\nu_м^2 - n^2 - \mu^2\omega^2)^2 + 4n^2\nu_м^2}}}$$

и

$$A = \frac{F_1}{\sqrt{(\nu_б^2 - n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\nu_б^2}} + \frac{F_2}{\sqrt{(\nu_б^2 - n^2 - \mu^2\omega^2)^2 + 4n^2\nu_б^2}}$$

для малых и бо́льших колебаний соответственно.

Резонансные значения амплитуд при резонансах по основной и второй (с частотой $\mu\omega$) гармоникам при их совместном действии отличаются от резонансных значений амплитуд при их раздельном действии. Установлены соответствующие коэффициенты влияния i-ой гармоники на j-ую гармонику ρ_{ij}, имеющие прежний вид (8) и зависящие как от соотношения амплитуд возмущающей силы F_1 и F_2, так и от соотношения гармоник μ и коэффициента затухания n.

Характер развития амплитуд колебаний систем с перескоком при бигармоническом возбуждении значительно сложнее, чем при гармоническом возбуждении. Чтобы выяснить, какие начинают развиваться колебания с увеличением частот, начиная с $\omega = 0$, пользуемся неравенством (10), в котором принимаем $F_0 = F_1 + F_2$. На конкретных примерах при различном выборе величины F_i (так, чтобы $F_0 < F_0^{кр}$ и $F_0 > F_0^{кр}$) рассмотрен ход развития амплитуд. Определены диапазоны частот, при которых развиваются только малые или только большие колебания.

В девятой главе описано применение электронных цифровых вычислительных машин и электронных нелинейных моделирующих установок для исследования нелинейных колебательных систем.

Для численного интегрирования на ЭЦВМ Урал-3 принят метод Рунге-Кутта. В результате решений определялась амплитуда установившегося режима как функция основной частоты возбуждения ω. Однако при решении выпадают целые ветви резонансной кривой: одна устойчивая и одна неустойчивая. Тем не менее ход развития амплитуд, полученный путем численного решения, совпадает с результатом приближенных аналитических решений.

Следует отметить, что при решении нелинейного дифференциального уравнения колебаний систем с перескоком при бигармоническом возбуждении на ЭЦВМ Урал-3 был обнаружен субгармонический резонанс второго рода, т. е. при частоте возбуждения, кратной собственной частоте: $\omega = 2\nu$ при заданной кратности гармоник $\mu = 2$. Амплитуда стационарных колебаний при субгармоническом резонансе меньше, чем при резонансе по основной частоте.

Электронные моделирующие устройства обладают целым рядом известных преимуществ перед ЭЦВМ, кроме того, их можно рассматривать как динамические системы, описываемые аналогичными исследуемым системам дифференциальными уравнениями, в том числе нелинейными. При моделировании применялись электронные нелинейные моделирующие машины непрерывного действия двух типов: ЭМУ-8 и МН-7. На полученных осциллограммах хорошо прослеживаются срывы амплитуд установившихся колебаний при изменении основной частоты возбуждения. Ход развития амплитуд, полученный с помощью моделирования, подтверждает результаты аналитических решений; при этом расхождения не превышают 10%. При моделировании так же, как и при численном интегрировании на ЭЦВМ, выпадают две ветви резонансных кривых: одна — устойчивая и одна — неустойчивая.

ВЫВОДЫ

Исследовано периодическое негармоническое возбуждение ряда нелинейных систем. Исследование проведено с помощью метода переменного масштаба, электронных цифровых вычислительных машин и нелинейных моделирующих установок.

При решении линеаризованных уравнений использовалась физическая гипотеза Каца-Малкина о преобладании в решениях гармоник с теми же частотами, что и возмущающая сила. Эта гипотеза нашла свое подтверждение экспериментальными данными, полученными в виде осциллограмм на нелинейных моделирующих машинах ЭМУ-8 и МН-7.

Полученные аналитические выражения амплитудно-частотных характеристик позволяют определить амплитуду стационарных колебаний этих систем в зависимости от амплитуды и частоты возмущающей силы.

Результаты исследований стационарных колебаний нелинейных систем двух видов: систем с одним и несколькими положениями равновесия позволяют сделать следующие основные выводы.

1. При возбуждении нелинейных систем периодическими негармоническими силами колебания не носят монорезонансный характер, т. е. амплитудно-частотные кривые имеют несколько резонансных ветвей в зависимости от количества гармонических составляющих возмущающей силы. Ход развития амплитуд стационарных колебаний таков, что при возбуждении нелинейной системы полигармоническими силами, содержащими m гармоник, система последовательно m раз вступает в резонанс по этим гармоникам, начиная с высшей. При этом, в нерезонансных зонах амплитудно-частотных кривых наличие нескольких гармоник в выражении возмущающей силы существенно влияет на величину амплитуды стационарных колебаний.

2. При резонансе по одной из частот возмущающей силы $F(t)$ ход развития амплитуд очень близок с ходом развития амплитуд при монохроматическом движении с той же частотой. Несмотря на это, резонансные значения амплитуд при полигармоническом возбуждении отличаются от резонансных значений амплитуд при моногармоническом возбуждении с резонансной частотой. Коэффициенты влияния ρ_{ij} характеризуют влияние нерезонансных гармоник на резонансную амплитуду. Они зависят как от соотношения амплитуд возмуща-

ющих гармонических сил, так и от кратности гармоник. Причем, установлена следующая закономерность $\rho_{ij} > \rho_{ji}$ (если $i < j$).

3. В системах с перескоком, имеющих три положения равновесия, могут осуществляться малые колебания относительно одного из крайних положений равновесия, являющихся устойчивыми, или большие колебания с охватом всех трех равновесных состояний в зависимости от амплитуды возмущающей силы (при фиксированной частоте). Критерий существования больших колебаний обусловлен неравенством $F_0 > F_0^{кр}$ причем, при бигармоническом возбуждении $F_0 = F_1 + F_2$. Если же амплитуду возмущающей силы считать фиксированной, то можно установить диапазоны частот возбуждения, в которых существуют большие или малые колебания.

При малых колебаниях системы с перескоками ведут себя как системы с мягкой характеристикой восстанавливающей силы, а при больших колебаниях — как системы с жесткой характеристикой восстанавливающей силы.

4. Исследование на ЭЦВМ и ЭМУ обнаружило удовлетворительное совпадение результатов машинных и аналитического решений. Однако надо учитывать, что при использовании ЭЦВМ и ЭМУ для решения нелинейных дифференциальных уравнений мы не имеем возможности дать качественный анализ исследуемой системы. Поэтому необходимо иметь хотя бы приближенные аналитические решения, которые затем с помощью ЭЦВМ или ЭМУ могут быть уточнены.

Одновременно, в наиболее точном решении (на ЭЦВМ Урал-3) установлено (как и можно было предвидеть) существование субгармонических колебаний.

Основное содержание диссертации опубликовано в печати:

1. М. И. Казакевич. К вопросу о бигармоническом возмущении нелинейных систем, Труды ДИИТа, вып. 53, 1964.
2. Н. Г. Бондарь, М. И. Казакевич. К обоснованию приема линеаризации фазовой функции в методе переменного масштаба. Труды ДИИТа, вып. 64, 1966.
3. М. И. Казакевич. Периодическое возбуждение нелинейных систем, Труды ДИИТа, вып. 64, 1966.
4. М. И. Казакевич. Возмущение нелинейных систем с сопротивлением произвольной периодической силой, Совещание по проблемам нелинейных колебаний механических систем, Тезисы докладов, ЛКИ, Ленинград, 1965.
5. М. И. Казакевич, Д. П. Чуваев. Вынужденные колебания систем с перескоком, Совещание по проблеме нелинейных колебаний механических систем, Тезисы докладов, РПИ-ЛКИ-РИИГА, Рига, 1966.

Материалы диссертации доложены на

— Совещаниях по проблемам нелинейных колебаний механических систем, Рига — 1964 и 1966 г.г., Ленинград — 1965 г.

— Совещании по некоторым проблемам динамики сооружений и машин, ДИИТ-ДИСИ-ДФ ИМ АН УССР, Днепропетровск, 1964.

— Заседании семинара по механике Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта, 1966 г.

БТ 09565. Областная книжная типография,
Днепропетровского областного управления по печати,
г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.
Заказ № 196-м. Тираж 200. Объем 1,25 п. л. Подписано к печати 28.1-67 г.