

Міністерство освіти і науки України  
Український державний університет науки і технологій

Факультет «Комп'ютерних технологій і систем»

Кафедра «Автоматика та телекомунікації»

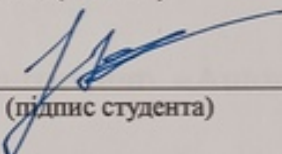
## Пояснювальна записка

до кваліфікаційної роботи  
на здобуття освітнього ступеня «магістр»

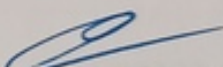
на тему: Дослідження методів оцінки стійкості рішення диференційного рівняння другого порядку, що описує роботу параметричного генератора частоти (назва теми на українській мові з наказу про затвердження тем за магістрами)

за освітньою програмою «Автоматика та автоматизація на транспорті»  
зі спеціальності: 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Виконав: студент групи АТ2222 (968М)

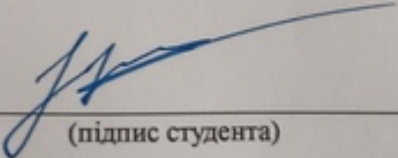
  
/ Сергій КОКУЛОВ /  
(підпис студента)

Керівник: доцент кафедри АТ

  
/ Катерина Яшук /  
(підпис керівника)

Засвідчую, що у цій роботі немає запозичень  
з праць інших авторів без відповідних  
посилань.

Студент

  
(підпис студента)

Дніпро – 2024 рік

to Master's Thesis

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(назва теми на англійській мові з наказу про затвердження тем за магістрами)

Done by the student of the group AT2222 (968M)

/Serhii Kokulov /

**Dnipro – 2024**

**Міністерство освіти і науки України**  
**Український державний університет науки і технологій**

Факультет: Комп'ютерні технології і системи

Кафедра: Автоматика та телекомунікації

Рівень вищої освіти: Другий (магістерський)

Освітня програма: Автоматика та автоматизація на транспорті

Спеціальність: 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології  
(шифр та назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри АТ

\_\_\_\_\_ Володимир ГАВРИЛЮК  
(підпис)

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_р.

**З А В Д А Н Н Я**

на кваліфікаційну роботу \_\_\_\_\_ магістра

(ступінь вищої освіти)

студенту Кокулову Сергію Сергійовичу  
(Прізвище, Ім'я По батькові)

**1. Тема**

роботи: Дослідження методів оцінки стійкості рішення диференційного рівняння другого порядку, що описує роботу параметричного генератора частоти

Керівник роботи: Ящук Катерина Іванівна, к.т.н., доцент

(Прізвище, Ім'я, По батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом від "21" листопада 2022р. № 1149ст

2. Строк подання студентом роботи: 04.12.2023 р.

3. Вихідні дані до роботи:

Структурні та принципові схеми

параметричного генератора частоти нормативна документація, довідкові дані

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно опрацювати):

4.1 Аналітична частина: виконати аналітичний огляд існуючих засобів захисту пристроїв сигналізації, централізації та блокування від впливу потужних імпульсних завад

4.2 Основна частина: 1) Розкрити суть кожного з методів дослідження стійкості диференційного рівняння;

- 
- 2) Вирішити рівняння методом Ван-дер-Поля;  
3) Вирішити рівняння методом Пуанкаре;  
Здійснити порівняльну характеристику методу Ван-дер-Поля та Пуанкаре
- 
- 4.3 Охорона праці та захист навколишнього середовища: не передбачена
- 
- 4.4 Економічна частина: не передбачена
- 
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень):  
Фазова характеристика параметричного генератора, фазовий портрет генератору частоти
- 

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Аналітична частина	04.07.2023	
2	Основна частина	3.10.2023	
3	Оформлення кваліфікаційної роботи	09.01.2024	
4	Подання кваліфікаційної роботи до кафедри	14.01.2024	
5	Захист кваліфікаційної роботи на засіданні Екзаменаційної комісії	22.01.2024 – 28.01.2024	

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

Сергій КОКУЛОВ

\_\_\_\_\_ (Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_ (підпис)

Катерина ЯЩУК

\_\_\_\_\_ (Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

## РЕФЕРАТ

**Пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи магістра:**

51 сторінка, 8 рисунків та 22 джерела літератури.

**Об'єкт розробки** – параметричний генератор частоти на неколінеарних магнітних полях.

**Мета роботи** – дослідження стійкості рішень диференційного рівняння, що описує роботу параметричного генератора частоти для забезпечення коректної роботи пристрою під час захисту пристроїв автоматики від потужних імпульсних завад.

**Методи дослідження** – аналіз існуючих засобів захисту; методи дослідження стійкості рішень нелінійних диференційних рівнянь другого порядку

У першому розділі було здійснено аналіз існуючих засобів захисту пристроїв автоматики від потужних імпульсних завад у вигляді перенапруг та грозових розрядів.

У другому розділі розглядається пристрій захисту від потужних імпульсних завад, його принципова електрична схема та принцип дії. Розглядається диференційне рівняння, що описує роботу генератора.

У третьому розділі розкривається суть методів Ван-дер-Поля та Пуанкаре, які досліджують стійкість рішень нелінійних диференційних рівнянь.

У четвертому розділі рівняння параметричного генератора частоти було вирішено методом Ван-дер-Поля та методом Пуанкаре. Були отримані графіки, що відображають фізичні процеси, які відбуваються у пристрої. Також було здійснено порівняльну характеристику обох цих методів і зроблено висновки щодо доцільності їх застосування

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1. РОЗДІЛ ОГЛЯДУ .....	6
1.1 Необхідність приладів ефективного захисту від потужних імпульсних завад.....	6
1.2 Особливості апаратури живлення та захисту пристроїв СЦБ7	
2. ПАРАМЕТРИЧНИЙ ГЕНЕРАТОР ЧАСТОТИ ПГ 50:50.....	12
2.1. Перетворювач частоти ПЧ 50/25 та Параметричний генератор ПГ 50/50 .....	12
3. РОЗГЛЯД МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РІШЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	18
3.1. Залежність поведінки найпростішої консервативної системи від параметра.....	18
3.2. Фазові траєкторії та інтегральні криві на фазовій площині.....	23
3.3. Метод Пуанкаре.....	26
3.3.1. Ідея методу Пуанкаре.....	28
3.4. Метод Ван-дер-Поля .....	30
4. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДАМИ ПУАНКАРЕ ТА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ .....	37
4.1. Оцінка стійкості рішення.....	37
4.2. Порівняльна характеристика методів Ван-дер-Поля та Пуанкаре .....	41
ВИСНОВКИ.....	45
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....</b>	<b>46</b>

## ВСТУП

З розвитком інфраструктури залізничного транспорту та поліпшенням характеристик руху зростають вимоги до систем сигналізації, централізації та блокування (СЦБ). Збільшення швидкостей руху і обсягів перевезень вимагає вдосконалення захисту пристроїв від комутаційних перенапруг та грозових розрядів, оскільки їх вплив може призводити до дестабілізації та руйнівних наслідків, що впливають на економічні показники залізничного транспорту. Розробка сучасних пристроїв для захисту апаратури від перенапруг стає важливим завданням. Електронні пристрої систем залізничної автоматики та телемеханіки (ЗАТ) опиняються в складних електромагнітних умовах, під впливом потужних імпульсних завад, таких як розряди грози та комутаційні перенапруги від тягової мережі.

З введенням в експлуатацію швидкісних поїздів на залізницях України, зростає необхідність у вдосконаленні захисту пристроїв сигналізації, централізації та блокування. Комутаційні перенапруги та грозові розряди стають серйозними факторами, які ускладнюють роботу пристроїв залізничної автоматики та телемеханіки. Безперебійне їх функціонування є важливим аспектом для забезпечення безпеки руху по залізниці.

На сучасному етапі не існує пристроїв, здатних повністю захистити апаратуру систем залізничної автоматики та телемеханіки (ЗАТ) від впливу грозових перешкод. У зв'язку з цим постає необхідність розробки пристрою захисту від імпульсних завад, який володів би високим коефіцієнтом корисної дії, забезпечував стабільність напруги на виході та відповідав б тепловим режимам експлуатації пристроїв систем сигналізації, централізації та блокування (СЦБ) на залізниці. У цьому контексті, параметричний генератор (ПГ), що працює на неколінеарних магнітних полях, визначається як пристрій, спрямований на живлення та захист апаратури, з урахуванням специфічних потреб залізничного транспорту.

Але параметричний генератор частоти ПГ 50:50 потребує подальшого дослідження, як практичного, як і теоретичного. Адже цей пристрій представляє

собою нелінійну систему, у якій протікають складні процеси. Математична модель параметричного генератору частоти на неколінеарних магнітних полях представляє собою нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Для того, щоб розуміти, як протікають фізичні процеси у цьому пристрої, при досягненні якого значення параметру генерації відбуватимуться автоколивання генератору, в яких станах перебуває генератор, потрібно дослідити стійкість рішень диференціального рівняння цього пристрою, застосувати різні методи і здійснити їх порівняльний аналіз. Це є основною задачею дипломної роботи.

## 1. Розділ огляду

### 1.1 Необхідність приладів ефективного захисту від потужних імпульсних завад

На залізниці пристрої ефективного захисту від потужних імпульсних завад є надзвичайно важливим елементом для забезпечення безпеки та нормальної експлуатації електричного та електронного обладнання. Приведемо кілька ключових аспектів, які пояснюють важливість цих заходів на залізниці.

1. Безпека пасажирів та екіпажу. Потужні імпульсні завади можуть впливати на роботу електричної системи залізниці, такої як сигнальні системи, блоки живлення та електричне обладнання поїздів. Захист від цих завад є критичним для забезпечення безпеки пасажирів та персоналу сигналізації та зв'язку: Належна робота систем сигналізації та зв'язку надзвичайно важлива для управління рухом поїздів та передачі важливої інформації. Потужні імпульсні завади можуть порушити роботу цих систем і викликати ситуації, що загрожують безпеці.

2. Запобігання аваріям та регулювання руху. Системи автоматичного регулювання руху поїздів: Належна робота систем автоматичного регулювання руху поїздів залежить від ефективного функціонування електронних пристроїв та сенсорів. Захист від імпульсних завад необхідний для попередження аварій та забезпечення точного контролю за рухом поїздів.

3. Системи енергопостачання. Силкові трансформатори та інші обладнання: Силкові трансформатори та інші елементи енергопостачання можуть бути піддані перенапругам чи імпульсним завадам, що призводить до збоїв у роботі та навіть до пошкодження обладнання. Захист від імпульсних завад допомагає запобігти цим негативним наслідкам

4. Збереження інфраструктури. Стійкість систем зв'язку та керування: Збереження інфраструктури залізниці, такої як мережі зв'язку та систем керування, є критичним для нормальної експлуатації. Захист від імпульсних завад гарантує, що ці системи можуть функціонувати стійко та надійно.

Отже, ефективний захист від потужних імпульсних завад є обов'язковим для забезпечення безпеки, надійності та ефективності функціонування залізничного транспорту та його інфраструктури.

## 1.2 Особливості апаратури живлення та захисту пристроїв СЦБ

Досвід експлуатації демонструє, що автоматичні вимикачі багаторазової дії (АВМ) виявляють 8,62% відмов при короткому замиканні, 16,38% при тяговому струмі і 12,93% під час гроз. Напівпровідникові пристрої, такі як блоки БС-ДА, аварійні реле тощо, є особливо вразливими до грозових та комутаційних впливів. Дешифраторні блоки БС-ДА становлять 26% від загальної кількості відмов під час грозового періоду з травня по серпень.

Надходження напруги через трансформатор типу ОМ до низьковольтних кіл основного та резервного живлення пристроїв АБ, а також трансформація енергії під час гроз через колійний трансформатор типу ПОБС-3 призводять до відмов діодів Д242А. Пробій цих діодів може призвести до перегорання обмотки трансформатора СОБС-2А, що в свою чергу може викликати відсутність показань світлофору і суттєво впливати на безпеку руху [13, 11].

На практиці виявлено, що амплітуда наведених перенапруг (ПН) у колах постійного струму може сягати значень  $400\pm 800$  В, що достатньо для пошкодження напівпровідникових елементів у блоках БС-ДА. Для захисту діодів та лінійних кіл живлення від ПН передбачено вирівнювачі. За статистикою експлуатації виявлено, що 52% відмов діодів трапляється відсутністю захисту вирівнювачами, але 48% відмов відбувається при наявності вирівнювачів. Це свідчить про недоліки типових засобів захисту [5].

Важливо відзначити, що більше 28% відмов від ПН у грозовий період припадає на аварійні та трансмітерні реле. Вентильні розрядники типу РВНШ-250(500) широко використовуються для захисту пристроїв сигнальної установки, проте вони забезпечують захист електричних кіл лише з робочою напругою до 360 В, що може бути недостатнім для ефективної роботи [7, 15].

Останні розробки зазначають використання розрядників РКН-600 як альтернативи РВНШ-250 для захисту вводів живлення та кіл вводу-виводу.

Розрядник РКН призначений для захисту ізоляції апаратури від змінного струму з напругою ПН до 250 В та постійного струму з напругою до 120 В, що виникають внаслідок грозових розрядів та комутаційних процесів у лініях електроживлення.

Також від кінця 90-х років випускаються тиристорні пристрої типів ЗТ-1(2), які призначені для захисту апаратури у рейкових колах змінного струму з частотою до 75 Гц та робочою напругою до 220 В (УЗТ-1) або до 60 В (УЗТ-2) від комутаційних ПН, що виникають при аварійних режимах роботи тягової мережі. З 1996 року також випускається керамічний розрядник РКВН як заміна РВНШ-250.

У випадку електротяги змінного струму, прилади автоблокування та автоматичної локомотивної сигналізації також захищаються від перенапруг, що виникають в силових колах напругою 110/220 В завдяки розрядникам і вирівнювачам. Колійні прилади РК оберігаються від комутаційних перенапруг, спричинених короткими замиканнями контактної мережі змінного струму. На живильному кінці РК встановлюють вирівнювачі типу ВС-220, а на приймальному - вирівнювачі типу ВС-90.

Лінійні кола на ділянках з автономною тягою захищаються вентиляними розрядниками або газонаповненими розрядниками Р-35 або Р-350 з обох кінців кабельного вводу.

Для захисту напівпровідникової апаратури СЦБ використовуються різні типи вирівнювачів. Вирівнювачі ВОЦШ-220 і ВОЦШ-110 служать для захисту від перенапруг у електричних колах з номінальною напругою 220 і 110 В змінного струму при частоті 50 Гц.

Аналіз показав, що вище вказані засоби захисту (ЗЗ) від перенапруг, як виявив досвід експлуатації систем А і Т, не відповідають вимогам термічної стійкості, встановленим проектними нормами [20]. Таким чином, проблема захисту апаратури РК від перенапруг залишається актуальною.

Введенням параметричних генераторів (ПГ) частоти на неколінеарних магнітних полях можна вирішити цю проблему. ПГ ефективно працює в умовах

великої експлуатаційної складності, забезпечуючи захист пристроїв СЦБ від потужних імпульсних електромагнітних завад, грозових розрядів, вібрацій тощо. Інтеграл Джоуля, що складає від 2,5 до 8 кДж, став основним параметром проектування та конструкції [15, 21].

Вимоги до вторинних джерел живлення (ВДЖ) визначаються рядом критеріїв, включаючи забезпечення стабільної живильної напруги на високому рівні (1-3%) навіть у випадку значних змін напруги від первинних джерел. Також необхідно досягти відсутності пульсацій вихідної напруги, тобто здійснити фільтрацію гармонік, і забезпечити захист навантаження від температурних коливань зовнішнього середовища, а також від перенапруг і коротких замикань.

Складним і відповідальним компонентом ВДЖ є стабілізатори напруги, які можна класифікувати за методом стабілізації на параметричні та компенсаційні. Параметричні включають ферорезонансні стабілізатори, пристрої з термооперами, стабілітрони тощо. З іншого боку, компенсаційні стабілізатори використовують систему автоматичного регулювання для компенсації всіх дестабілізуючих впливів, які можуть впливати на вихідну напругу. Зазвичай як джерело опорної напруги використовується стабілітрон, а регулювання проводиться за допомогою транзистора.

Треба враховувати, що ВДЖ, окрім стабілізатора, також включає фільтр, випрямляч, пристрій захисту від перенапруг і перевантажень і інші компоненти, що робить його складною багатокomпонентною електромагнітною системою. Це ускладнює процес налаштування та експлуатації ВДЖ, особливо в пристроях залізничної автоматики. В порівнянні з параметричними індуктивними стабілізаторами, особливо при їх використанні в системах залізничної автоматики, ВДЖ може відступати за надійністю роботи. Аналіз відмов напівпровідникових ВДЖ свідчить, що вони не в повній мірі відповідають вказаним вимогам. З параметричних пристроїв ВДЖ, які використовують феромагнітні елементи, найвідоміші індуктивні параметрони з виходом на другу субгармоніку. Їх висока надійність, простота конструкції, висока стабілізація та

здатність протистояти впливу ПЗ забезпечили їм широке застосування в системах залізничної автоматики.

Тривалий експлуатаційний досвід параметричних перетворювачів частоти 50/25 Гц підтвердив їх переваги, високу надійність та ефективність для живлення систем залізничної автоматики. Використання цих перетворювачів дозволило уникнути гармонік, ідентичних гармонікам тягового струму, у вихідному спектрі напруги. Це особливо важливо для живлення рейкових колійних систем та колійних приймачів, де проблеми з коефіцієнтом повернення та захистом від ПЗ є ключовими.

ТРК характеризуються низьким коефіцієнтом повернення колійних приймачів (КПП), що суттєво погіршує ефективність ТРК. Це призводить до скорочення граничної довжини, обмеження контролю основних режимів та загрози безпеки руху поїздів. Проблема посилюється тим, що напівпровідникова апаратура ТРК має обмежену захищеність від перешкод тягового струму та грозових розрядів.

У зв'язку з цим, виникає потреба у розробці параметричних індуктивних вторинних джерел живлення для ТРК. Такий джерело повинно вирішувати дві ключові проблеми: підвищення коефіцієнта повернення приймача та захист апаратури від ПЗ через мережу живлення.

Розглянемо умови роботи та захист понижуючих трансформаторів ОМ, які підключаються до високовольтних ліній електропостачання. Такі трансформатори взаємодіють із грозовими та комутаційними перенапругами і можуть відмовляти, особливо під час літніх грозових періодів. Грозозахисне обладнання, яке використовує іскрові проміжки, може не ефективно захищати трансформатори від дугових замикань, особливо при низьких струмах. Це ставить під сумнів працездатність системи та може викликати перепал проводу у випадку КЗ, що виникає через перекриття ізоляторів фаз на одній опорі внаслідок удару блискавки в лінію.

Іскрові проміжки (ІП) мають кілька недоліків:

1. Коротке замикання: Спрацювання ІП призводить до короткого замикання.

2. Перенапруги: При перехідному процесі можуть виникати перенапруги на поздовжній ізоляції трансформаторів, реакторів і електричних машин.

3. Статистичний розкид: Великий статистичний розкид пробивних напруг ускладнює координацію ізоляції та ін.

Для захисту вимірювальних трансформаторів напруги використовують запобіжники типу ПКН. Запобіжники ПКН 001-10 УЗ з кварцовим наповнювачем є струмообмежуючими приладами. Запобіжники ПКН 011-10 і ПКН 011-12 можуть використовуватися для захисту силових трансформаторів потужністю 1,25 кВА з номінальною напругою 6 кВ. Запобіжники ПКН 011-35 і ПКН 011-36 застосовуються для захисту силових трансформаторів потужністю 4 кВА з номінальною напругою 27,5 кВ і трансформаторів потужністю 10 кВА з номінальною напругою 35 кВ.

Запобіжники, розміщені на стороні високої напруги силового трансформатора, мають враховувати умови селективності з тими, що розміщені на стороні низької напруги. Додаткова апаратура передбачається для відключення струмів перевантаження трансформатора. Запобіжники ПКН є вібростійкими і допускають механічні впливи.

Для відключення струму короткого замикання в запобіжниках з кварцовим піском використовується інтенсивна деіонізація дуги в щілинах наповнювача. Спрацювання патрона відбувається при відсутності показань приладів в колі трансформатора напруги. Запобіжники ПКН порівняно з ПКТ мають менші розміри, але не обладнані показчиками спрацювання. Установка грозозахисту на лініях електропередачі 6-10 кВ передбачає застосування грозозахисних засобів в зонах з числом грозових годин понад 40 на рік. Незважаючи на досвід експлуатації, існуючі засоби грозозахисту не завжди є надійними та можуть вимагати періодичної перевірки. Зазначені засоби можуть також бути причиною загорянь та пробоїв ізоляції обладнання напівпровідникових елементів і розрядників, що погіршує ситуацію та збільшує тривалість відмов.

## 2. Параметричний генератор частоти ПГ 50:50

### 2.1. Перетворювач частоти ПЧ 50/25 та Параметричний генератор ПГ 50/50

Перетворювач частоти ПЧ 50/25 на рис. 2.1.1 є електромеханічним пристроєм, призначеним для зміни частоти змінного струму з 50 Гц на 25 Гц. Такі перетворювачі широко використовуються на залізницях для живлення рейкових колій (РК) [1].

Перетворювачі частоти ПЧ 50/25 були створені для оптимізації роботи рейкових колій на залізницях. Такий тип перетворювачів дозволяє живити рейкові кола частотою 25 Гц від високовольтної лінії змінного струму з частотою 50 Гц, що дає можливість легко резервувати живлення автоблокування.

Вони застосовуються у:

1. Рейкові кола (РК): Головне застосування перетворювачів частоти полягає у живленні рейкових колій на залізницях. Рейкові кола використовуються для передачі електричної енергії до потягів, контролю швидкості та інших систем, які вимагають електричного живлення.

2. Живлення РК від мережі 50 Гц: Зазвичай в країнах із промисловою частотою 50 Гц, таких як Україна, створюють ПЧ 50/25 для забезпечення ефективного живлення РК, які працюють на частоті 25 Гц, від стандартної мережі з частотою 50 Гц.

3. Оптимізація стабільності та ефективності: Використання РК, які працюють на частоті 25 Гц, може покращити стабільність системи при зниженому опорі ізоляції та зменшити споживання енергії.

Принцип роботи полягає у наступному: Статичні однофазні електромагнітні перетворювачі частоти ПЧ 50/25 пристосовані для перетворення струму частотою 50 Гц у змінний струм частотою 25 Гц. Вони зазвичай мають конструкцію з електромагніту та блоку конденсаторів.

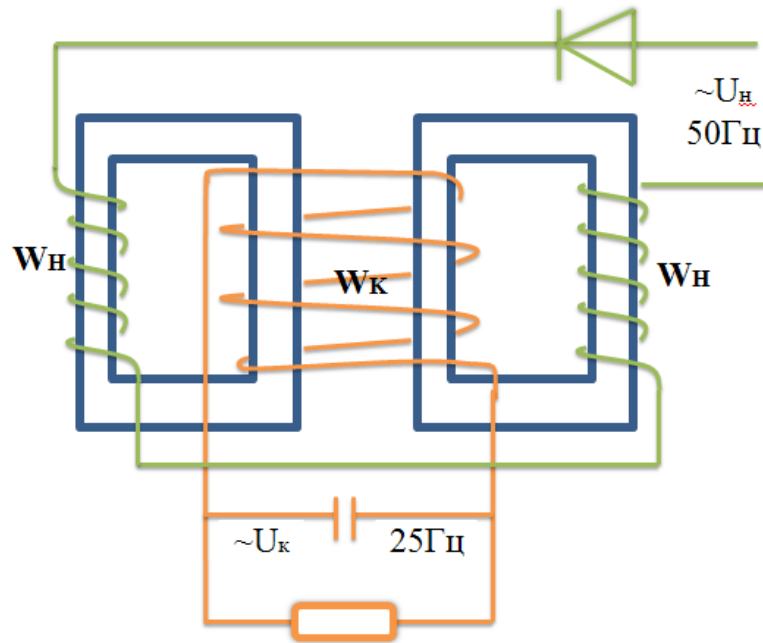


Рисунок 2.1.1 – Конструкція ПЧ 50/25

Завдання для його створення полягає у забезпеченні рейкових колій оптимальною електричною енергією при частоті 25 Гц для ефективного функціонування різних систем на залізницях.

А перевагою є те, що перетворювачі можуть сприяти зменшенню впливу сильних імпульсних завад, забезпечуючи більш стабільне живлення РК.

У цілому, перетворювачі частоти ПЧ 50/25 відіграють ключову роль у забезпеченні надійного та ефективного функціонування рейкових колій на залізницях.

Параметричний генератор ПГ 50/50 (на рис. 2.1.2) є електричним пристроєм, призначеним для генерації стабільного струму з частотою 50 Гц.

Параметричний генератор був створений для стабільного і точного вироблення струму частотою 50 Гц. Він використовує явище параметричного резонансу, що полягає в зміні енергетичних параметрів системи змінюваним електричним струмом.

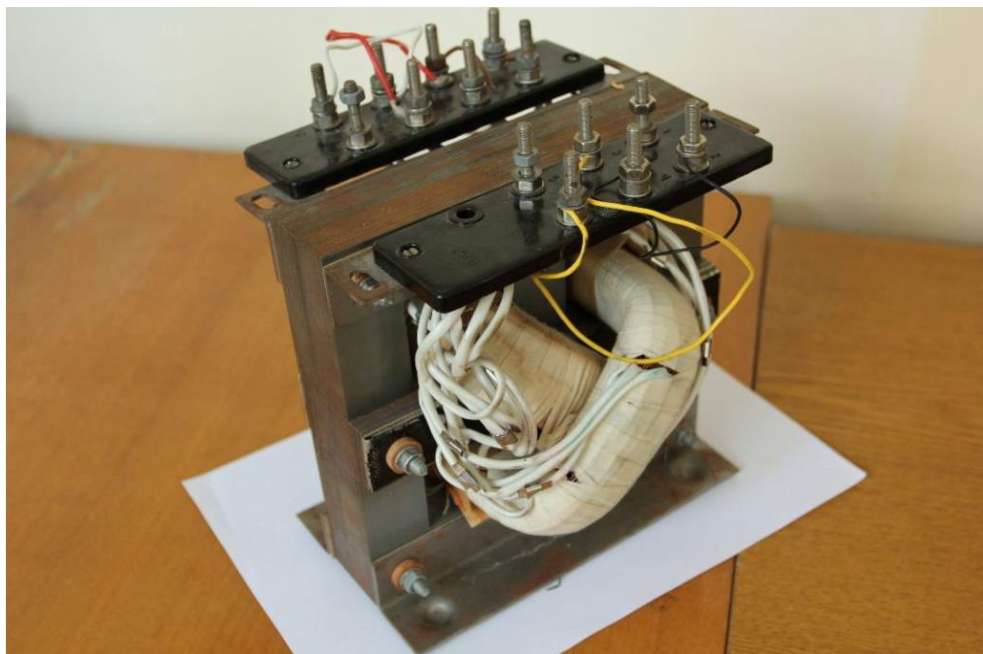


Рисунок 2.1.2 – Макетний зразок ПГ 50/50

Головне застосування ПГ 50/50 - це створення стабільного вторинного блоку живлення. Він може бути використаний у системах живлення для забезпечення стабільного та надійного електричного потоку. А однією з ключових особливостей ПГ 50/50 є зменшення впливу сильних імпульсних завад на електромережі та обладнання.

Основний принцип роботи полягає в використанні параметричного резонансу, де енергетичні параметри системи змінюються відповідно до змінного електричного струму.

Збудження електромагнітних коливань реалізується на основі параметричного збільшення комбінації вхідної обмотки накачки та вихідної обмотки, що має важливу роль у генерації стабільного струму.

Основне завдання полягає в наданні ефективного генерування стабільного струму частотою 50 Гц для захисту обладнання від непередбачуваних коливань.

ПГ 50/50 має важливу особливість - зменшення впливу сильних імпульсних завад, що дозволяє захистити електричне обладнання від непередбачених впливів.

Параметричні генератори, такі як ПГ 50/50, широко використовуються в різних галузях техніки та автоматизації для створення стабільного та надійного електричного живлення.

Але присутність обмотки зворотного зв'язку в конструкції параметричного генератора є суттєвим недоліком, оскільки через неї може потрапляти імпульсний вплив на вихідну обмотку. Ще одним серйозним недоліком є низька стабільність вихідної напруги при збільшенні вхідної напруги. З цією метою був розроблений новий параметричний генератор, головним завданням якого було підвищення надійності, покращення енергетичних характеристик і коефіцієнта стабілізації напруги на виході[19].

Це було досягнуто шляхом спрощення вхідного кола та включення конденсатора в коло, ємність якого утворює резонансний контур з індуктивністю обмотки накачки. Резонансний контур був створений для полегшення передачі енергії в систему, а обмотку накачки розділено на дві зустрічно з'єднані секції з різною кількістю витків.

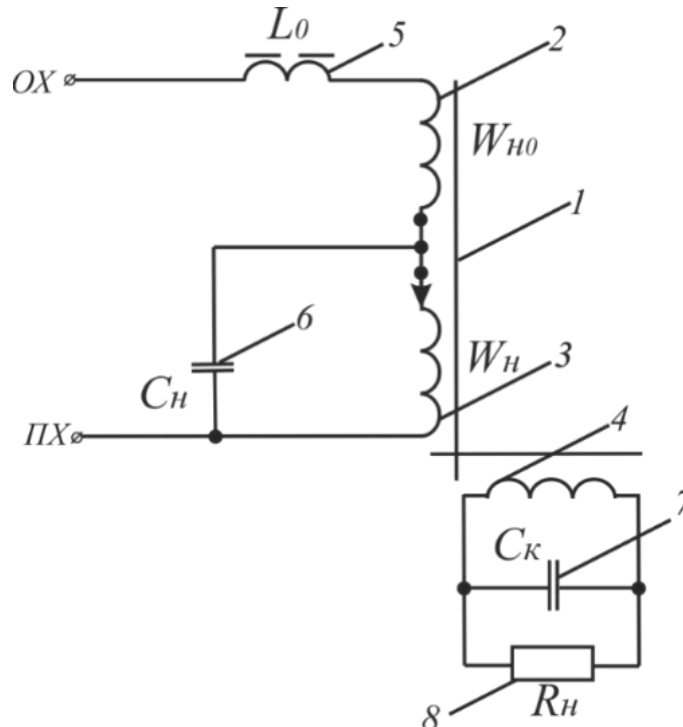


Рисунок 2.1.3 – Двоконтурний параметричний генератор з захистом навантаження від завад

На рис. 2.1.3 можна побачити схему параметричного генератора. Він має феромагнітне осердя (1), обмотку накачки, що складається із секцій  $W_{H0}$  (2) та  $W_H$  (3), контурну обмотку (4), лінійну індуктивність (5), яка послідовно підключена до секції  $W_{H0}$  (2) вхідної обмотки  $W_H$  (2, 3), та конденсатор (6), який паралельно підключений до секції  $W_H$  (3) обмотки накачки. Також є вихідний контур, що містить конденсатор (7) та навантаження (8), які паралельно підключені до обмотки ланцюга  $W_k$ .

У схемі вхідного кола параметричного генератора (ПГ), яке включає LC-контур (контур із лінійною індуктивністю та конденсатором), використовуються дві секції обмотки накачки,  $W_H$  та  $W_{H0}$ , які з'єднані зустрічно. Одна з секцій  $W_{H0}$ , спільно з лінійною індуктивністю  $L_0$ , обмежує індукцію в обмотці накачки при збільшенні напруги джерела чи наявності ферорезонансних струмів у LC-контурі.

При збільшенні напруги на обмотці накачки відбувається насичення сталі, що супроводжується зниженням індуктивності цієї обмотки. Також реактивні опори контуру, утвореного конденсатором та індуктивністю обмотки, досягають межі ферорезонансного струму. У такому випадку сила струму в ланцюзі зростає, а струм від фідерної мережі зменшується, що веде до збільшення коефіцієнта корисної дії (ККД).

Додавання резонансного LC-контуру до вхідного кола ПГ дозволяє зменшити струм на вході ПГ майже обернено-пропорційно зростанню струму в середині контуру. Це покращує енергетичні характеристики ПГ, забезпечуючи збільшення позитивної енергії та покращення ККД.

Для принципової схеми ПГ 50:50 було складено систему рівнянь згідно законів Кірхгофа, для якої втрати на гістерезис не враховуються, а активні опори обмоток накачки та контуру дорівнюють нулю[2].

$$\begin{cases} i_2 = i_{C_K} + i_{R_H} \\ U_2 = U_{R_H} = U_{C_K} = \frac{1}{C_K} \int i_{C_K} dt \\ U_1 = W_1 S \frac{db_1}{dt} \end{cases} \quad (2.1)$$

де  $i_2$  - струм контурної обмотки;

$i_{C_K}$  - струм, що протікає через ємність контурної обмотки  $C_K = 40 \text{ мкФ}$  ;

$i_{R_H}$  - струм, що протікає через опір навантаження  $R_H = 240 \text{ Ом}$ .

Далі отримано диференціальне рівняння параметричного контуру генератора:

$$\frac{d^2 b_2}{dt^2} + \frac{1}{R_H C_K} \frac{db_2}{dt} + \frac{l}{W_K^2 C_K S} h_2 = 0 \quad (2.2)$$

де  $h_2$  - нелінійна функція створених обмотками накачки та контуру магнітних індукцій  $b_1$  та  $b_2$ ,

$$W_K = 300, S = 20,2 * 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Як ми бачимо, отримали нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке потребує розв'язку. Особливої уваги заслуговує дослідження стійкості вирішення диференціального рівняння, адже існує їх велика кількість.

Якщо параметричний генератор частоти розглядати як консервативну систему, то потрібно дослідити поведінку цієї системи в залежності від зміни параметра.

### 3. Розгляд методів дослідження стійкості рішення нелінійних диференційних рівнянь другого порядку

#### 3.1. Залежність поведінки найпростішої консервативної системи від параметра

Консервативна система є винятковою системою у тому сенсі, що для неї існує інтеграл енергії. Інакше кажучи, якщо ми довільним чином, хоча б і скільки завгодно мало, змінюватимемо вигляд рівнянь руху, то ці рівняння, взагалі кажучи, перестануть задовольняти умові консервативності. Однак, зараз розглядатимемо тільки такі зміни параметрів, що характеризують нашу систему, у яких вона залишається консервативною. Для простоти припустимо, що у нас є лише один змінний параметр і що від цього параметра залежить лише потенційна енергія системи.

Завдання полягатиме в дослідженні того, як змінюється вид фазової площини при зміні параметра. Основними елементами, що визначають якісну картину інтегральних кривих для консервативних систем, є особливі точки та сепаратрис. Якщо ми знаємо вид сепаратрис (особливі точки типу сідла суть точки самоперетину сепаратрис) і відносне розташування сепаратрис і станів рівноваги типу центру, то ми можемо відтворити в загальних рисах всю картину інтегральних кривих.

При зміні параметра інтегральні криві змінюватимуться. Однак, якщо, ми припустимо, потенційна енергія являє собою аналітичну функцію параметра, то ці зміни будуть відбуватися безперервно. Загальний вигляд інтегральних кривих буде зазнавати, взагалі кажучи, лише кількісних змін, і лише за деяких особливих, так званих «біфуркаційних» значеннях параметра ми матимемо якісні зміни характеру інтегральних кривих. Як вже сказано, у разі консервативної системи основними елементами, що визначають якісну картину інтегральних кривих на фазовій площині, є особливі точки та сепаратрис. Тому біфуркаційними значеннями параметра в цьому випадку служать ті значення

параметра, при яких відбувається зміна числа або характеру цих основних елементів.

Точніше і більш загально можна дати таке визначення, не пов'язане з консервативністю системи: значення параметра  $\lambda = \lambda_0$  ми назвемо звичайним, якщо існує таке кінцеве  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), що всім  $\lambda$ , задовольняючих нерівності  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ , ми маємо одну і ту ж топологічну структуру розбиття фазової площини на інтегральні криві. Інші значення параметрів, для яких ця умова не дотримується, назвемо біфуркаційними.

Викладу порівняно точно розвинену Пуанкаре теорію залежності станів рівноваги від параметра, оскільки вона знадобиться при дослідженні нашої автоколивальної системи; інші біфуркаційні випадки, пов'язані з залежністю сепаратрис від параметра, лише заілюструємо прикладами.

$$\ddot{x} = f(x), \quad (3.1)$$

Припустимо, що потенційна енергія системи (2.1), а отже, водночас і сила, є функцією параметра  $\lambda$ , який може набувати різних значень. Положення рівноваги ( $\dot{x} = \bar{x}$ ) характеризуються тим, що для них сила дорівнює нулю, тобто

$$f(\bar{x}, \lambda) = 0 \quad (3.2)$$

Вирішуючи це рівняння відносно  $\bar{x}$ , можна знайти положення рівноваги, які має аналізована консервативна система при тому чи іншому значенні параметра  $\lambda$ , можна простежити, як змінюються положення рівноваги при зміні  $\lambda$ .

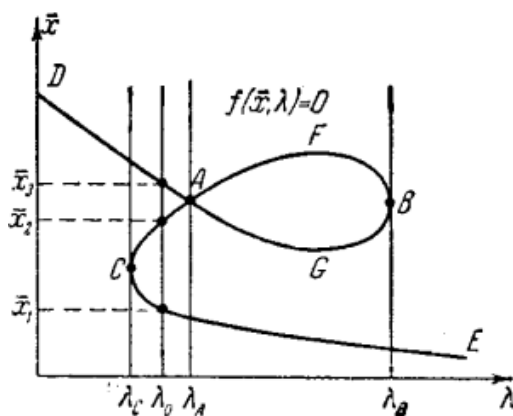


Рисунок 3.1.1 – Біфуркаційна діаграма

Залежність положень рівноваги від параметра може бути наочно проілюстрована так званою біфуркаційною діаграмою - кривою  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , побудованої на площині  $\lambda, \bar{x}$ .

Нехай, наприклад, ця крива має вигляд, зображений на рис. 3.1.1. Пряма  $\lambda = \lambda_0$ , паралельна осі ординат, перетинає криву  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  у трьох точках; це, очевидно, означає, що при даному значенні параметра  $\lambda = \lambda_0$  - система має три положення рівноваги  $\bar{x} = \bar{x}_1$ ,  $\bar{x} = \bar{x}_2$  і  $\bar{x} = \bar{x}_3$ . При зменшенні  $\lambda$  положення рівноваги  $\bar{x} = \bar{x}_1$  і  $\bar{x} = \bar{x}_2$  зближуються, при  $\lambda < \lambda_c$  зливаються і потім пропадають (при  $\lambda < \lambda_c$  існує тільки одне положення рівноваги:  $\bar{x} = \bar{x}_3$ ). Значення параметра  $\lambda < \lambda_c$  є, таким чином, біфуркаційним значенням. Також біфуркаційними будуть значення  $\lambda < \lambda_A$  і  $\lambda < \lambda_B$ , при яких також відбувається зміна числа рівноважних станів системи[3].

Диференціюючи рівняння по  $\lambda$ , маємо:

$$\frac{df}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\lambda} + \frac{df}{d\lambda} = 0 \quad (3.3)$$

Чи

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = - \frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)} \quad (3.4)$$

Звідси випливає, що навколо точки кривої  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , для якої  $f'_x(\bar{x}, \lambda) \neq 0$ ,  $\bar{x}$  є безперервно диференціюючою функцією  $\lambda$ . Тому, якщо для деякого значення параметра  $\lambda = \lambda_0$  система рівнянь

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 0, \\ f'_x(x, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

не має дійсних рішень для  $x$ , ми можемо стверджувати, що в досить малій околиці цього значення параметра  $\lambda = \lambda_0$  абсциси  $\bar{x}$  всіх положень рівноваги є безперервно диференціюючими функціями, параметра  $\lambda$  і їх число не може змінюватися, Тим самим таке значення  $\lambda = \lambda_0$ , не є біфуркаційним (у тому сенсі, що при переході  $\lambda$  через  $\lambda = \lambda_0$ , не відбувається зміни числа станів рівноваги).

Нехай тепер у деякій точці  $(\lambda, \bar{x})$  кривою  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  також і  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ . Якщо  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ , а  $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) \neq 0$ , то крива в цій точці має вертикальну дотичну, і коли

$\lambda$  проходить (у відповідному напрямку) через значення, що відповідає цій точці, два дійсних кореня для  $\bar{x}$  зливаються, а потім становляться комплексними. Це - точка біфуркації, в якій відбувається зміна числа станів рівноваги (точки В і С на рис. 3.1.1). Якщо ж у точці  $(\lambda, \bar{x})$  кривою  $f(\bar{x}, \lambda) = 0, f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$  і  $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$ , то ми маємо справу з особливою точкою (у сенсі диференціальної геометрії) цієї кривої. Ця точка (точка А на рис. 3.1.1) буде також точкою біфуркації, так як при значенні  $\lambda$ , що відповідає цій точці, число рівноважних станів завжди інше, ніж при сусідніх значення цього параметра.

Таким чином, точки кривої  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , для яких  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ , є точками біфуркації, а відповідні значення параметра  $\lambda$  — біфуркаційними значеннями. Крім цих значень біфуркаційними значеннями параметра  $\lambda$  будуть ті значення, при яких крива  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  йде в нескінченність (це матиме місце, якщо ця крива має нескінченні гілки з вертикальними асимптотами).

Кожному положенню рівноваги  $x = \bar{x}$  відповідає визначений стан рівноваги ( $x = \bar{x}, \dot{x} = 0$ ) - певна особлива точка на фазовій площині. Характер особливих точок або, що все рівно, стійкість станів рівноваги визначається, як можна побачити, знаком похідної  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = -V''_{xx}(\bar{x}, \lambda)$ .

Саме, при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0 \quad (3.6)$$

(потенційна енергія мінімальна) стан рівноваги стійкий (типа центру), а при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0 \quad (3.7)$$

(потенційна енергія максимальна) стан рівноваги є сідлом та нестійкий.

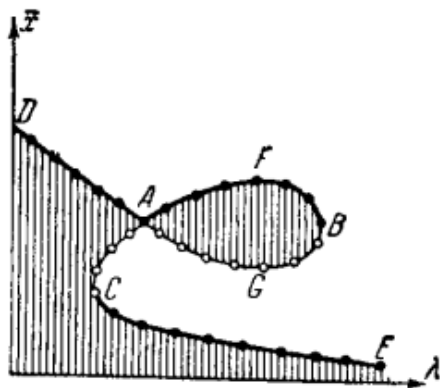


Рисунок 3.1.2 – Зміна стійкості на біфуркаційній діаграмі

Неважко дати, слідуючи Пуанкаре, простий рецепт для швидкого визначення стійкості станів рівноваги за допомогою біфуркаційної діаграми. Відмічу (заштрихую) на площині  $\lambda, \bar{x}$  області  $f(\bar{x}, \lambda) > 0$  (крива  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , очевидно, буде їх кордоном). Якщо дана точка  $(\lambda, \bar{x})$  знаходиться над заштрихованою областю, то вона відповідає стійкому стану рівноваги. Справді, поблизу цієї точки функція  $f(\bar{x}, \lambda)$  зменшується з збільшенням  $\bar{x}$  ( $\lambda$  фіксовано) від позитивних значень усередині заштрихованої області до нуля на кривій  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ . Отже,  $f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0$ , що відповідає особливій точці типу центру і стійкому стану рівноваги. Якщо ж точка кривої  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  лежить під заштрихованою областю, то вона відповідає нестійкому стану рівноваги, тому що для неї в силу аналогічних міркувань має місце нерівність  $f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0$ . Дотримуючись цього рецепту, одразу знаходжу, що, наприклад, на рис. 3.1.2 точки ділянок DA, AFB, CE (накреслені жирною лінією з точками) відповідають стійким, а точки ділянок AGB та AC (накреслених тонкою лінією з кружками) - нестійким станам рівноваги.

Зверну тепер увагу на наступне. Якщо рухатися на біфуркаційній діаграмі вздовж кривої  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , то характер стану рівноваги, тобто його стійкість або нестійкість, буде зберігатися до тих пір, поки ми не дійдемо до точки біфуркації. Неважко бачити, що якщо продовжувати рухатись далі по кривій, слідуючи напрямку дотичної (тобто, стежачи за тим, щоб дотична оберталася безперервно), то в точці біфуркації стійкий стан рівноваги зміниться нестійким і навпаки. На рис. 3.1.2 така зміна стійкості відбувається в точках A, B і C.

Отже, бачимо, що при зміні параметра  $\lambda$  стани рівноваги в кінцевій частині фазової площини можуть зникати і з'являться тільки парами, причому (і це відмінна особливість консервативних систем) стан рівноваги може змінити свою стійкість, наприклад зі стійкого перетворитися на нестійкий, тільки попередньо злившись з іншим станом рівноваги.

У сенсі зміни стійкості стани рівноваги консервативних систем утворюють замкнуту систему, поведінка якої при зміні параметра можна вивчати окремо від поведінки сепаратрис.

Ті значення параметра, за яких стани рівноваги зливаються або йдуть у нескінченність, звичайно, належать до біфуркаційних значень параметра, але, взагалі кажучи, ними не вичерпуються всі біфуркаційні значення, оскільки можуть бути суттєві зміни у характері сепаратрис при незмінному числі і характер станів рівноваги.

### 3.2. Фазові траєкторії та інтегральні криві на фазовій площині

Розглянемо систему двох автономних диференціальних рівнянь першого порядку, що описують рухи деякої динамічної системи другого порядку (треба зауважити, якби я мав одне рівняння другого порядку  $x'' = f(x, x')$ , то заміною  $x' = y$  ми завжди могли б привести його до вигляду  $x' = y, y' = f(x, y)$ , припускаючи, що стани цієї динамічної системи взаємно однозначно і безперервно відповідають точкам фазової площини  $x, y$  [4].

Функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  вважатимемо аналітичними (на всій фазовій площині). Вимога аналітичності функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  введено лише заради деякого спрощення доказів і може бути замінено більш слабкою вимогою існування у цих функцій безперервних часткових похідних тих чи інших порядків (у ряді випадків - першого порядку).

Умови теореми Коші про існування та винятковість вирішення системи диференціальних рівнянь, очевидно, виконані, і тому існує єдина система функцій:  $x = x(t), y = y(t)$ , що задовольняє рівнянням та заданим початковим умовам:  $x = x_0, y = y_0$ , при  $t = t_0$ . Оскільки рішення залежить від початкових умов, то іноді, для того, щоб підкреслити цю обставину, я записуватиму таке рішення у наступному вигляді:

$$x = \varphi(t - t_0; x_0, y_0), \quad y = \psi(t - t_0; x_0, y_0) \quad (3.8)$$

Відмічу, що  $\varphi$  і  $\psi$  є аналітичними функціями не тільки часу  $t$ , але й координат початкового стану системи  $x_0, y_0$ .

Будь-яке рішення (3.8) (із заданими :  $x_0, y_0, t_0$ .) можна розглянути як параметричне рівняння деякої кривої на фазовій площині  $x, y$ , яка пробігається

зображувальною точкою при заданому русі системи. За прийнятою термінологією такі криві зветься кривими фазових траєкторій.

З іншого боку, рішення (3.8) ми можемо розглядати і як рівняння кривих у просторі  $x, y, t$  — як рівняння інтегральних кривих системи рівнянь. Зрозуміло, що кожна фазова траєкторія є проекцією на фазову площину деякої інтегральної кривої у просторі  $x, y, t$ . Дві інші проекції інтегральної кривої (3.8) на площині  $x, y$ , є, очевидно, звичайними осцилограмами змін  $x$  і  $y$  при заданому русі системи.

Більше того, через автономність рівнянь усі їх інтегральні криві (3.8) з однаковими  $x_0, y_0$ , але з різними  $t_0$  утворюють у просторі  $x, y, t$  циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі  $t$ , і, отже, проектується на ту саму фазову траєкторію на фазовій площині. Іншими словами, кожна фазова траєкторія відповідає сукупності рухів динамічної системи, що проходять через одні й ті ж стани та відрізняються один від одного лише початком відліку часу.

Оскільки умови теореми Коші для системи рівнянь виконані, то через кожну точку простору  $x, y, t$ , проходить єдина інтегральна крива цієї системи рівнянь, тобто інтегральні криві в просторі  $x, y, t$  перетинатися не можуть. Те ж саме завдяки автономності рівнянь можна сказати і про фазові траєкторії: вони також не можуть перетинатися, так як через кожну точку фазової площини проходить одна єдина фазова траєкторія.

Для ілюстрації сказаного розгляну такий приклад. Якщо в деякій точці  $(\bar{x}, \bar{y})$  функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  перетворюються в нулі, то рівняння мають своїм рішенням:  $x \equiv \bar{x}, y \equiv \bar{y}$  (а в просторі  $x, y, t$  - інтегральну пряму, паралельну осі  $t$ ); фазова траєкторія, що відповідає цьому стану рівноваги, складається з однієї (ізолюваної) точки. В силу щойно зазначеної властивості фазових траєкторій зображувальна точка, рухаючись по інших фазових траєкторіях, не може прийти в стан рівноваги ні при якому кінцевому  $t$ . Так само зображувальна точка, що не перебуває на граничному циклі, не може прийти на нього за якийсь кінцевий інтервал часу. Таким чином, встановлення станів рівноваги або періодичних коливань в динамічних системах, що описуються рівняннями з правими

частинами, що задовольняють умови теореми Коші, відбувається лише асимптотично (тільки при  $t \rightarrow +\infty$ ).

Якщо поділити одне з рівнянь на інше, то можна виключити час і отримати одне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (3.9)$$

Якщо в багатьох випадках більш легко інтегрується, ніж система другого порядку. Розв'язання цього рівняння  $y=y(x; C)$  (або у неявній формі  $F(x, y)=C$ ), де  $C$  - постійна інтегрування, дає нам сімейство його інтегральних кривих, тобто таких кривих на площині  $x, y$ , які в кожній своїй точці мають нахил дотичної, що визначається рівнянням (3.9). Застосовуючи теорему Коші до рівняння (3.9), можна довести, що внаслідок аналітичності функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  через кожну точку площини  $x, y$  проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (3.9), за винятком, можливо, особливих точок цього рівняння, де воно втрачає сенс. У цьому випадку особливими точками є ті точки, у яких  $P(x, y)=0$  і  $Q(x, y)=0$ , тобто лише стану рівноваги системи (3.8). У них інтегральні криві можуть перетинатися.

Як легко бачити, кожна фазова траєкторія є інтегральною кривою або, принаймні, її частиною, а інтегральна крива (або її дуга), що не проходить через особливу точку, неодмінно є фазовою траєкторією. З іншого боку, інтегральна крива, що проходить через особливу точку, завжди складається з кількох фазових траєкторій. Тим не менш, інтегруючи простіше рівняння (3.9) і знаходячи його інтегральні криві, ми отримуємо одночасно і розбиття фазової площини на фазові траєкторії: фазовими траєкторіями будуть особливі точки (стани рівноваги), інтегральні криві, що не проходять через особливі точки, і дуги інтегральних кривих, укладені між двома особливими точками (або між особливими точками та нескінченністю). Звичайно, рівняння інтегральних кривих (3.9) не дає нам жодних вказівок про напрямок руху зображувальної точки по знайденим фазовим траєкторіям, оскільки час із нього виключено. Напрямок руху зображувальної точки визначається з рівнянь.

### 3.3. Метод Пуанкаре

Наше нелінійне рівняння (або система рівнянь) залежить від деякого параметра  $\mu$  і при певному значенні  $\mu = \mu_0$  (наприклад, при  $\mu = 0$ ) перетворюється у рівняння або систему рівнянь, розв'язання яких нам добре відомо, наприклад, у лінійне рівняння чи систему лінійних рівнянь [6].

Розглянемо нелінійне рівняння для значень  $\mu$ , що мало відрізняються від  $\mu_0$ . Далі розглядатимемо лише періодичні рішення нелінійного рівняння (це обмеження також лежить у суті методу). Для певності припустимо, що система при  $\mu = 0$  звертається в лінійну з постійними коефіцієнтами.

Хід міркувань є цілком загальним, застосовним і за інших припущень.

Отже, розглядатимемо систему нелінійних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu) \quad (3.10)$$

де  $a, b, c, d$  і  $\mu$  - константи; вважаємо, що  $\mu$  досить мале. Далі будемо вважати, що  $f_1$  і  $f_2$  є голоморфними функціями  $x, y$  і  $\mu$ , тобто що їх можна розкласти в степеневі ряди, що сходяться по  $x, y, \mu$  (принаймні при малих значеннях змінних).

Розглядаючи нелінійні члени як результат малого спотворення лінійної системи (що виходить при  $\mu = 0$ ), дізнаюся для яких вихідних періодичних рішень лінійної системи існують періодичні ж (хоча б і з іншим періодом) рішення нелінійної системи, що звертаються у початкові за  $\mu = 0$ , і за яких умов (тобто за яких  $f_1$  і  $f_2$ ) ці періодичні рішення нелінійної системи будуть стійкими.

Розглянемо спочатку випадок  $\mu = 0$ . Рівняння переходять у

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (3.11)$$

Виключення  $y$  у приводить до рівняння

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0. \quad (3.11a)$$

Необхідна передумова подальших розглядів у тому, що отримана лінійна система (3.11) чи рівняння (3.11a) повинна мати періодичні рішення.

Це означає, що характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

повинно мати чисто уявні корені, тобто має бути

$$(a + d) = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0. \quad (3.12)$$

Тоді

$$\lambda_1 = +j\sqrt{ad - bc}, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{ad - bc}$$

або, якщо ввести значення  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_1 = +\sqrt{ad - bc}$ , то можна сказати, що рішення рівняння (3.11а) має цілком певну частоту  $\omega_1$ , що визначається самим рівнянням, Фаза ж і амплітуда періодичного рішення не задаються системою та визначаються початковими умовами. Довільність фази очевидна: час не входить явно в (3.11а), і тому починати відлік можна з будь-якого моменту  $t_0$  (але різниця фаз між  $x$  і  $y$  і відношення амплітуд  $x$  і  $y$  цілком визначені системою: достатньо підставити значення для  $x$  у друге з рівнянь (3.11)).

Отже, ми переконалися, що якщо виконані умови (3.12), то наша система (3.11) має безліч періодичних рішень, що відрізняються одне від одного амплітудою і фазою. Ці рішення мають вигляд:

$$x = K \cos(\omega_1 t + \chi); \quad y = kK \sin(\omega_1 t + \chi + \chi')$$

де  $k$  і  $\chi'$  визначаються через коефіцієнти рівнянь (2.16), а  $K$  і  $\chi$  довільні. В загальному вигляді

$$x = \varphi_0(t, \chi, K); \quad y = \psi_0(t, \chi, K);$$

де  $\varphi_0$  і  $\psi_0$  – періодичні функції  $t$  з періодом  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ ,  $K$  і  $\chi$  – довільні постійні. Такий загальний вигляд будуть мати рішення, якщо при  $\mu = 0$  наша система стає нелінійною, але консервативною, що відповідає випадку центра.

Так як відлік часу можна починати з довільного моменту, то без всіляких обмежень загальності можна вважати  $\chi = 0$ , і тоді рішення нашої лінійною системи може бути написано у вигляді:

$$x = x_0(t, K) = K \cos \omega_1 t; \quad y = y_0(t, K) = kK \sin(\omega_1 t + \chi'). \quad (3.13)$$

### 3.3.1. Ідея методу Пуанкаре

Перш ніж перейти до систематичного викладу теорії Пуанкаре, коротко наведу основну ідею і сформулюю математичне завдання. Нехай нам відоме рішення рівнянь (3.10) при  $\mu = 0$ , тобто, іншими словами, рішення рівнянь (3.11). Нехай це рішення буде  $x = x_0(t, K)$ ;  $y = y_0(t, K)$ . При  $t = 0$  маємо:  $x = x_0(0, K)$ ;  $y = y_0(0, K)$ , де  $K$  - "амплітуда". Слово «амплітуда» ставлю у лапках, маючи на увазі, що рівняння, що виходять за  $\mu = 0$ , взагалі кажучи, можуть бути і нелінійними, але консервативними. (Надалі, однак, ми вважатимемо, що при  $\mu = 0$  рівняння перетворюються на лінійні.) Розглянемо тепер рішення рівнянь (3.10) при  $\mu \neq 0$ . Нехай це будуть:  $x = x(t, \mu, K)$ ,  $y = y(t, \mu, K)$ , що приймають значення  $x = x_0(0, K) + \beta_1$ ;  $y = y_0(0, K) + \beta_2$  при  $t = 0$ ;  $\beta_1$  і  $\beta_2$  — деякі досить малі величини. Пуанкаре шукає ці рішення у вигляді степенних рядів по  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  і  $\mu$  і доводить їх збіжність при досить малих значеннях  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  і  $\mu$ , рівномірну всередині будь-якого заданого кінцевого інтервалу часу  $0 < t < t_1$  (цього доказу збіжності не наведу). Коефіцієнти цих степенних рядів суть функції часу. Ці функції можна обчислити, прирівнюючи коефіцієнти при рівних ступенях  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  і  $\mu$  виразах, що виявилися після підстановки рівняння (3.10) вищезгаданих степенних рядів. Для визначення цих функцій вийдуть лінійні рівняння із певними початковими значеннями. Отже, для  $x$  і  $y$  ми отримуємо деякі вирази:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K), \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K). \quad (3.14)$$

Подивимося тепер, за яких умов ці рішення будуть періодичними. Нехай період розв'язків рівнянь нульового наближення (ці рівняння за нашим припущенням лінійні) буде  $T$ .

Період розв'язків нелінійних рівнянь буде, взагалі кажучи, інший, але оскільки ми шукаємо рішення, що мало відрізняються від рішень лінійних рівнянь, то й період шуканих рішень має бути близьким до  $T$  [8]. Тому ми можемо вважати, що новий період є  $T + \tau$ , де  $\tau$  - деяка невелика «поправка на період». Очевидно, що для того, щоб рішення (3.14) були періодичними з періодом  $T + \tau$ , потрібно, щоб  $x$  і  $y$  при  $t = 0$  і при  $t = T + \tau$  мали однакові значення. Дійсно, якщо ми отримаємо в момент  $t = T + \tau$  ті ж значення змінних  $x$  і  $y$ , як і в

момент  $t = 0$ , то в силу теореми Коші і автономності системи з моменту  $t = T + \tau$  ми отримуємо повторення того, що відбувалося, починаючи з  $t = 0$ , тобто наші рішення справді будуть періодичними з періодом  $T + \tau$ .

Отже, умови періодичності зводяться до співвідношень:

$$\begin{aligned} x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \\ y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \end{aligned}$$

Які, в силу того, що  $T$  є заданою величиною, можна переписати так:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0. \quad (3.15)$$

Ми отримали таким чином два рівняння з трьома невідомими  $\tau, \beta_1, \beta_2$ , але з огляду на те, що рівняння автономні і фаза довільна, ми можемо одне з  $\beta$  зафіксувати, наприклад уявити рівним нулю. Тоді ми отримуємо одне певне періодичне рішення; після того, як це періодичне рішення буде знайдено, додаючи до нього довільну фазу, ми знову відновимо втрачену довільність.

Оскільки за  $\mu = 0$  ми маємо отримати періодичні рішення з періодом  $T$ , тобто без поправки на період, очевидно, що при  $\mu = 0$  і  $\tau = 0$  задовольняється умова періодичності і функції  $\Phi$  і  $\Psi$  звертаються на нуль. Отже,  $\mu$  є спільний множник, і рівняння (3.15) можна переписати так:

$$\mu \Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \mu \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0$$

і умови існування періодичних рішень системи (3.15) будуть мати вигляд:

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0$$

Для того щоб при  $\mu = 0, \beta_1 = \tau = 0$ , потрібно, щоб ці рівняння не містили вільних членів. Прирівнюючи нулю ці вільні члени, ми отримуємо цілком певні значення для амплітуди  $K$  і першого наближення поправки на частоту  $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0}$ . Отже, у цьому випадку можуть існувати періодичні рішення, але не з будь-якими значеннями  $K$ , лише з цілком певними. Відповідно до цього одне з основних завдань може бути сформульовано наступним чином: при  $\mu = 0$  ми маємо незліченну кількість періодичних рішень з довільними амплітудами, але при  $\mu \neq 0$  тільки поблизу деяких цілком певних амплітуд зберігаються періодичні

рішення. Потрібно знайти значення цих амплітуд. При цьому для вирішення питання про форму автоколивань ми часто можемо обмежитися лінійним наближенням, і знання нелінійності нам потрібно тільки для того, щоб визначити величину амплітуди цих коливань. З умов для амплітуд, у випадку якщо у рівняння руху входять будь-які параметри, можна встановити умови біфуркації між періодичними рішеннями, а також між періодичними рішеннями та положеннями рівноваги. Друга частина завдання полягає у визначенні поправки на період  $\tau$ . У багатьох практично цікавих випадках виявляється, що вона в першому наближенні дорівнює нулю, тобто що  $(\frac{\tau}{\mu})_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 0$ .

### 3.4. Метод Ван-дер-Поля

Розглянемо системи, що близькі до гармонійного осцилятора. Рівняння руху таких систем можуть бути написані у вигляді рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (3.16)$$

або, якщо ввести  $y = \dot{x}$ , у вигляді двох рівнянь першого порядку:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \quad (3.17)$$

Тут  $\mu$  — безрозмірний позитивний параметр, який ми надалі вважатимемо досить малим. Розмір цього параметра при заданій функції  $f(x, y)$  визначає ступінь близькості системи, що розглядається, до гармонійного осцилятора[10].

Щоб дослідити систему рівнянь (3.17) при достатньо малих значеннях параметра  $\mu$ , можна скористатися наступним наближенням методом дослідження нелінійних систем, який будемо називати «методом амплітуд, що повільно змінюються» або методом Ван-дер-Поля. Саме замість рівнянь (3.17) можна розглядати інші, складені за певним рецептом, допоміжні, так звані укорочені рівняння Ван-дер-Поля, які дозволяють порівняно просто отримати наближені рішення вихідних рівнянь (тим точніші, чим менше значення параметра  $\mu$ ). Зокрема, завдання відшукування періодичних розв'язків рівнянь (3.17) (завдання відшукування граничних циклів на фазовій площині  $x, y$ ) зводиться до незрівнянно більш простої задачі знаходження станів рівноваги укорочених рівнянь. Слід зазначити, що метод Ван-дер-Поля є адекватним методом дослідження

нелінійних систем, у тому сенсі, що цей метод враховує специфіку нелінійних систем, їх характерні риси, так як укорочені рівняння, так само як і вихідні рівняння, є нелінійними.

Перейду до складання укорочених рівнянь для системи, що нас цікавить (3.17).

Перш за все зауважу, що при  $\mu = 0$  система (3.17) перетворюється у рівняння звичайного гармонійного осцилятора; їх вирішення мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t, \\ y &= -a \sin t + b \cos t \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

або

$$\left. \begin{aligned} x &= K \cos (t + \vartheta), \\ y &= -K \sin (t + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

( $a$  і  $b$  або  $K$  і  $\vartheta$  - постійні інтегрування), а фазовими траєкторіями є кола з центром на початку координат, по яким зображувальні точки рухаються з постійною кутової швидкістю  $\omega = 1$ .

Потрібно шукати рішення рівнянь (3.17) при досить малих  $\mu$  ( $0 < \mu \ll 1$ ) у тому ж вигляді (3.18) або (3.19), але, звісно, вважаючи тепер  $a$  і  $b$  (або  $K$  і  $\vartheta$ ) не константами, а деякими, поки невідомими функціями часу (Вони, як побачимо нижче, будуть функціями часу, що повільно змінюються). Ця заміна змінних  $x, y$  на  $a, b$  (або  $K$  і  $\vartheta$ ) - на «змінні Ван-дер-Поля» геометрично може бути інтерпретована як перехід з фазової площини  $x, y$  на іншу площину (на площину змінних Ван-дер-Поля), що обертається за годинниковою стрілкою щодо площини  $x, y$  (навколо початку координат) з постійною кутової швидкістю  $\omega = 1$ ; на цій площині, що обертається,  $a$  і  $b$  є прямокутними координатами,  $K$  і  $\vartheta$  - полярними; згідно (3.18) та (3.19)  $a, b$  і  $K, \vartheta$  пов'язані між собою співвідношеннями:

$$a = K \cos \vartheta, \quad b = -K \sin \vartheta \quad (3.20)$$

В змінних  $a, b$  рівняння (3.17) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \sin t &= 0, \\ -\frac{da}{dt} \sin t + \frac{db}{dt} \cos t &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \end{aligned}$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ \frac{db}{dt} &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Розглядаючи праві частини отриманих рівнянь як функції трьох змінних  $a$ ,  $b$  і  $t$  (ці функції періодичні по  $t$  з періодом  $2\pi$ ) і розгортаючи їх у ряди Фур'є по  $t$  (коефіцієнти Фур'є є функціями  $a$  і  $b$ ), маємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \varphi_1(a, b) \cos t + \bar{\varphi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\varphi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\psi_0(a, b)}{2} + \psi_1(a, b) \cos t + \bar{\psi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\psi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.21a)$$

Рівняння (3.21) (або (3.21a)) - це наша система (3.17), перетворена до інших змінних, що повільно змінюються  $a$ ,  $b$  ( $\frac{da}{dt}$  і  $\frac{db}{dt}$  є величинами порядку  $\mu$ ). Так як формули перетворення змінних (3.18) містили явно час, то нова система рівнянь неавтономна, хоча початкова система була автономною. Від цієї системи рівнянь (3.21a) у змінних, що повільно змінюються перейдемо до наближених, укорочених рівнянь Ван-дер-Поля:

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2} \quad (3.22)$$

відкидаючи у правих частинах усі «осцилюючі» члени або, інакше кажучи, здійснюючи усереднення правих частин рівнянь (3.21) (або (3.21a)) за явно вхідним часом.

Рішення отриманої системи укорочених рівнянь (3.21) апроксимують при досить малих значеннях параметра  $\mu$  рішення «повної» системи (3.21),

еквівалентної, як уже зазначалося, вхідній системі (3.17). Тому якщо ми знайдемо рішення скорочених рівнянь  $a = a_0(t)$ ,  $b = b_0(t)$ , то за допомогою формул перетворення змінних (3.18) ми отримаємо наближені (але тим більш точні, чим менше значення параметра  $\mu$ ) розв'язання системи (3.17):

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t, \\ y_0(t) &= -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Якщо ж зробити те ж саме для виводу скорочених рівнянь в полярних координатах, замінюючи  $x, y$  на  $K, \vartheta$  то отримаю наступні рівняння:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mu \Psi(K) \quad (3.24)$$

, де

$$\left. \begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \sin u \, du, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u \, du \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

- середні значення по  $u$  періодичних (з періодом  $2\pi$ ) функцій

-  $f[K \cos u, -K \sin u] \sin u$  і  $-\frac{1}{K} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u$ , залежать тільки від  $K$

Проведемо дослідження системи укорочених рівнянь та побудову їх фазових траєкторій на площині змінних Ван-дер-Поля. Почнемо з першого із рівнянь (3.24), яке ми зможемо дослідити незалежно від другого:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K) \quad (3.24a)$$

якісна картина рівняння такого типу, як ми бачили, повністю визначається розташуванням та характером станів рівноваги на відповідній фазовій прямій.

Координати цих станів рівноваги – суть корня рівняння

$$\Phi(K) = 0 \quad (2.11)$$

або

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0 \quad (3.26a)$$

Стан рівноваги  $K = K_i$  буде стійким, якщо

$$\Phi'(K_i) < 0 \quad (3.27)$$

або якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_i \cos u, -K_i \sin u) \, du < 0 \quad (3.27a)$$

і нестійким, якщо

$$\Phi'(K_i) > 0. \quad (3.28)$$

Інші рухи є або асимптотичними к станам рівноваги як при  $t \rightarrow +\infty$ , так і при  $t \rightarrow -\infty$ , або асимптотичними до стану рівноваги для  $t \rightarrow +\infty$  і уходящими в нескінченність для  $t \rightarrow -\infty$  і т.д.

Для цих рухів, як завжди в таких випадках, можуть бути знайдені і аналітичні вирази, з (3.24a) маємо:

$$\mu(t - t_0) = \int_{K_0}^K \frac{dK}{\Phi(K)},$$

Де  $K_0$  – значення  $K$  при  $t = t_0$ , звідки, розрішуючи рівняння відносно  $K$ , маємо:

$$K = K\{\mu(t - t_0)\}$$

Тепер перейду до другого з рівнянь (3.24):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K) \quad (3.24б)$$

Тут потрібно розрізнити два випадки. В першому, що доволі часто зустрічається на практиці,

$$\Psi(K) \equiv 0$$

або

$$\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \equiv 0.$$

В цьому випадку, друге рівняння інтегрується одразу:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta = \text{const} = \vartheta_0$$

і ми можемо одразу уявити собі картину фазових траєкторій на площині змінних Ван-дер-Поля. Всі інтегральні криві суть прямі, що проходять через початок координат і нахилені під всілякими кутами  $\vartheta = \text{const}$ . Рух вздовж кожної з цих прямих відбувається однаково та визначається рівнянням (3.24а) [9]. Корені рівняння (3.26)  $K = K_i$  дають радіуси кіл, кожна точка яких є станом рівноваги

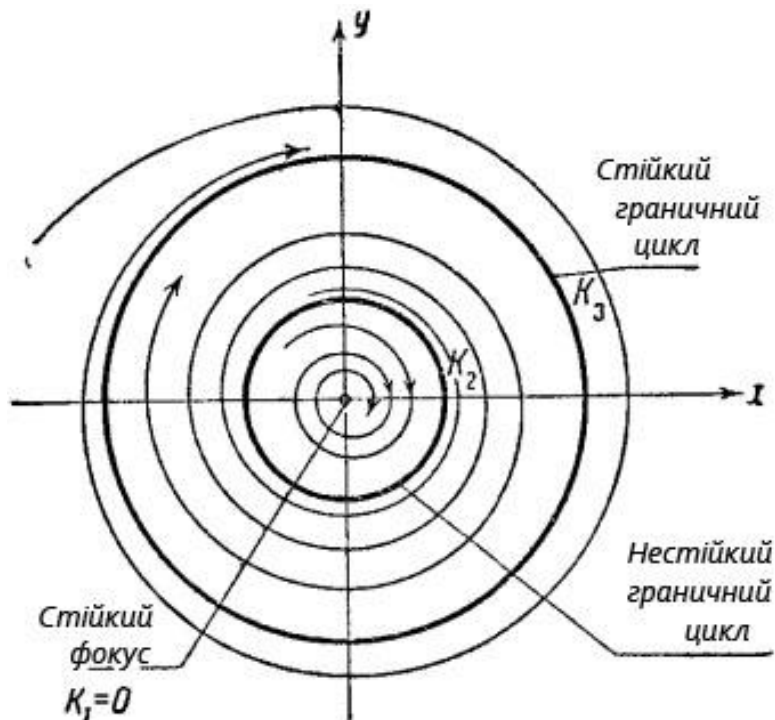


Рисунок 3.4.1 – Фазова площина  $x, y$

Якщо ми перейдемо тепер від площини, що обертається,  $a, b$  до нерухомої фазової площини  $x, y$  за допомогою формул перетворення (3.18) або (3.19), то кола, що складаються з станів рівноваги на площині  $a, b$ , будуть відповідати на площині  $x, y$  колові межові цикли, що мають такі ж радіуси  $K_i$  на рис. 3.4.1. Рух зображувальної точки по будь-якому циклу, що має радіус  $K_i$ , слідує закону:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t = K_i \cos(t + \vartheta_0), \\ y &= -a \sin t + b \cos t = -K_i \sin(t + \vartheta_0), \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Де  $\vartheta_0$  довільне. Довільність початкової фази  $\vartheta_0$ , для періодичних рухів за цим граничним циклом на площині  $x, y$  відповідає тій обставині, що стани рівноваги укорочених рівнянь утворюють на площині  $a, b$  цілі кола.

Одразу видно, що граничний цикл буде орбітно стійкий, якщо відповідні стани рівноваги на площині  $a, b$  будуть стійкі, і навпаки. Інші траєкторії, що являють собою на площині  $a, b$  відрізки прямих, перетворюються на площині  $x, y$  спіралі, взагалі кажучи, що накручуються на граничні цикли або при  $t \rightarrow +\infty$ , або при  $t \rightarrow -\infty$ .

## 4. Дослідження стійкості рішення диференційного рівняння методами Пуанкаре та Ван-дер-Поля

### 4.1. Оцінка стійкості рішення

Метод Пуанкаре (суть методу викладено у п. 3.3) використовується для аналізу диференціальних рівнянь з нестационарними точками та коливаннями. Однією з його переваг є можливість виділення стаціонарних точок та проведення аналізу їхньої стійкості, що є важливим для визначення динаміки системи, а в нашому випадку – фізичних процесів, які відбуваються у колах генератору ПГ 50:50. Порівняно з методом Ван-дер-Поля метод Пуанкаре має дещо спрощені розрахунки[13]. Натомість метод Ван-дер-Поля гарно виявляє стабільність (стійкість системи до настання генерації) та властивості системи в резонансі (перехід фази на  $90^\circ$ ), що є важливою перевагою методу Ван-дер-Поля[11].

Для оцінки стійкості рішення було взяте рівняння (2.2), яке має вид

$$\frac{d^2 b_2}{dt^2} + \frac{1}{R_H C_K} \frac{db_2}{dt} + \frac{l}{W_K^2 C_K S} h_2 = 0$$

з усіма параметрами, що здійснюватимуть вплив на рівняння.

Для переходу до безрозмірного вигляду рівняння (2.2), слід врахувати апроксимацію кривої намагнічування за допомогою кубічного поліному. Цей процес може бути виконаний наступним чином:  $h_2 = k_1 b_2 + k_3 b_2 b_1^2 + k_3 b_2^2$ .

Враховуючи, що зсув фаз  $90^\circ$  між напругою накачки та контуром відповідає його конструкції, запишемо  $b = b_1^2 + b_2^2$ , при чому  $b_1 = \frac{U_1}{4,44 * f * w_1 S_1} * \cos \tau$ .

Під час нормування рівняння, вхідний та вихідний сигнали будуть виражені у такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{b_0} = -x_{1M} \cos \alpha \tau \\ x_2 = \frac{b_2}{b_0} = x_{2M} \sin \alpha \tau \end{cases}$$

До того ж  $b_\sigma = 0,25 T_l$  – базовий периметр;

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{l_2 \cdot k_1}{S_2 C W_2^2}$$

Після введення безрозмірного часу  $\tau = \omega t$  рівняння (2.2) прийме наступний вигляд:

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \delta \frac{dx_2}{d\tau} + \zeta y_2 = 0 \quad (4.1)$$

Де  $\delta = \frac{1}{R_n C_k}, \quad \zeta = \frac{l}{W_k^2 C_k S}$

Оскільки наша система дуже близька до консервативної, тобто фактично є гармонічним осцилятором[12], рівняння для неї можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = f(x_2, \dot{x}_2) \quad (4.2)$$

Де

$$f(x_2, \dot{x}_2) = x_2 - \delta \dot{x}_2 - \zeta y_2 \quad (4.3)$$

Для розв'язання рівняння (4.1) використовувався метод амплітуд, що повільно змінюються. За допомогою відповідних взаємозв'язків отримуємо скорочені рівняння, які описують роботу параметричного генератора:

$$\begin{cases} \frac{dB_2}{d\tau} = -B_2 \delta + \frac{1}{4} k_3 B_2 \cdot B_1^2 \cdot \sin 2\varphi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{4(\zeta k_1 + \frac{1}{2} k_3 B_1^2 - 1) + k_3 B_1^2 \cos 2\varphi + 3B_2^2}{8} \end{cases} \quad (4.4)$$

Вирішимо цю систему рівнянь відносно фази  $\varphi$  :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{\delta}{1 - p - \frac{g}{2} B_1^2 - \frac{3g}{4} B_2^2} \quad (4.5)$$

В результаті розрахунків було отримано два графіки, які відображають роботу параметричного генератора частоти на неколінеарних магнітних полях, зокрема, стійкість рішення нелінійного диференційного рівняння другого порядку.

З фазової характеристики (4.1.1) видно, що після досягнення ПГ напруги генерації 180 В зсув фаз між вхідною та вихідною напругами дорівнює  $90^\circ$ , що пояснює фізику роботи ПГ. Ця напруга називається напругою генерації і є дуже важливим показником у розумінні принципу роботи параметричного генератора[16].

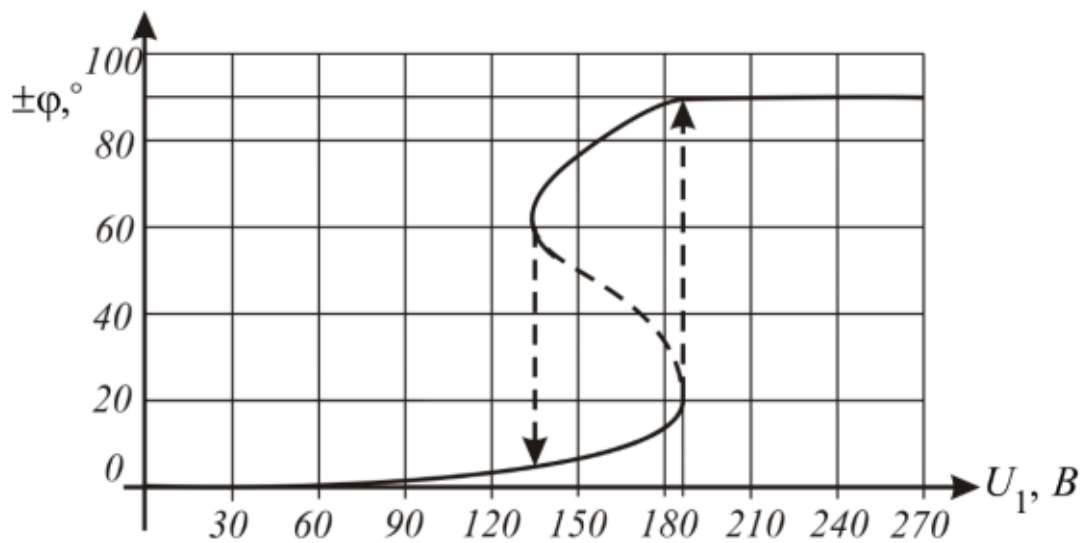
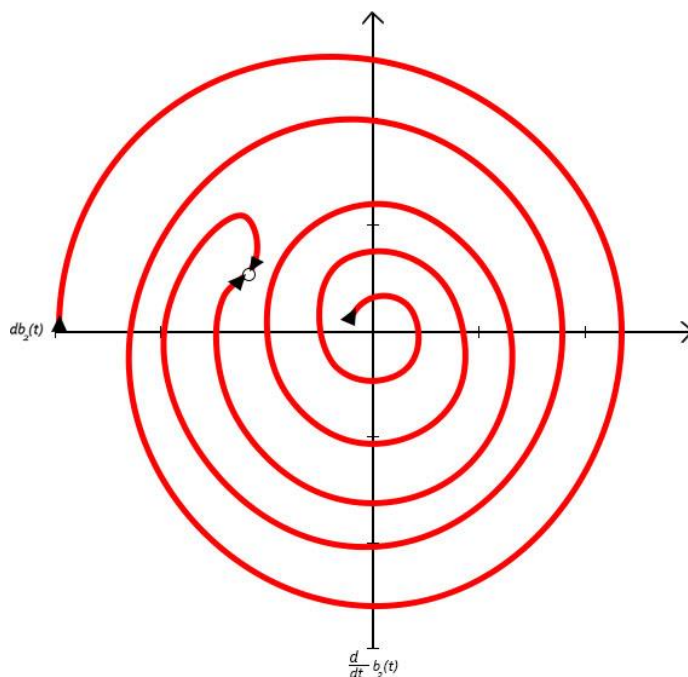


Рисунок 4.1.1 – Фазова характеристика ПГ



#### Рисунок 4.1.2. Фазовий портрет нелінійного диференційного рівняння

Тобто з отриманого графіку ми бачимо, що генератор першо початково перебуває у стійкому стані, у стані рівноваги. При досягненні точки біфуркації вхідною напругою він переходить у нестійкий режим, внаслідок чого в колі спостерігаються автоколивання. У розглянутому нелінійному диференційному рівнянні другого порядку є велика кількість параметрів, від яких залежить вирішення цього рівняння, а отже і відображення роботи всього пристрою в цілому. Ці параметри треба обов'язково враховувати. Недоліками методу Ван-дер-Поля є досить їх невелика кількість параметрів, їх обмеженість, підтримка стійкості в обмеженому діапазоні та обмеженість для складних систем. На разі нашого рівняння це не стосувалося. Усі параметри були враховані і області стійкості відображені на графіку[17].

Якщо говорити про фазовий портрет (рис. 4.1.2), то він дуже наглядно демонструє роботу параметричного генератора частоти на неколінеарних магнітних полях. Бачимо ізольовані траєкторії, які називаються граничними циклами. Можемо спостерігати стійкий граничний цикл, який відображається тим, що фазова площина, яка є околицею, містить фазові траєкторії, які починаються у цій околиці, асимптотично при тому, що  $t \rightarrow +\infty$ . І навпаки, спостерігаємо в околиці граничного циклу фазову траєкторію, яка не наближається до граничного циклу при  $t \rightarrow +\infty$ , цей граничний цикл буде нестійким. Якщо пояснити це на роботі параметричного генератора частоти на неколінеарних магнітних полях, то стійкий граничний цикл на рис. 4.1.2 відповідає стійкому стану рівноваги, в якому знаходиться ПГ 50:50 до того, як напруга на вході досягла величини генерації[14]. Це стан, коли у вхідному колі генератору ще не настав ферорезонанс струмів та не виникли автоколивання. Як бачимо з рис. 4.1.2 два граничних цикли сходяться в одній точці. Саме вона називається точкою біфуркації і відповідає переходу ПГ у режим генерації, що характеризується виникненням автоколивань та ферорезонансу струмів. При досягненні цієї точки параметричний генератор переходить у нестійкий режим, який на графіку відображається у вигляді нестійкого граничного циклу.

Застосований метод Пуанкаре є досить цікавим і він наглядно демонструє ті фізичні процеси, які відбуваються у пристрої. Фазовий портрет нашого пристрою не є складним, та все ж таки для того, щоб «розшифрувати» напрямки руху фазових траєкторій, їх перетинів та з'єднань потрібно володіти достатньою кількістю знань нелінійних фізичних процесів, які сучасною наукою вивчені у меншій мірі, аніж лінійні

#### **4.2. Порівняльна характеристика методів Ван-дер-Поля та Пуанкаре**

Метод Ван-дер-Поля - це математичний метод, який використовується для дослідження змінних коливань у системах диференціальних рівнянь[17].

Метод Пуанкаре - це математичний метод, який використовується для дослідження динамічних систем, зокрема, для аналізу диференціальних рівнянь з нестационарними точками та коливаннями[22].

Переваги методу Ван-дер-Поля:

1. Аналітична можливість. Метод Ван-дер-Поля надає аналітичні розв'язки для деяких видів диференціальних рівнянь, що спрощує розуміння динаміки систем.

2. Стабільність в резонансі. Даний метод може виявити стабільність та властивості системи в резонансі, що є важливим в різних наукових і інженерних дослідженнях.

3. Дослідження осциляцій. Ефективний для вивчення періодичних та нестационарних коливань у системах, де виникають нестационарні ефекти.

4. Використання у фізичних та біологічних системах. Знаходить застосування у вивченні різних фізичних та біологічних систем, таких як електричні коливання, робота серця, хімічні реакції тощо.

Недоліки методу Ван-дер-Поля:

1. Обмеженість для складних систем. Метод може бути обмеженим у вирішенні складних систем з великою кількістю змінних та параметрів.

2. Залежність від обраних параметрів. Результати можуть залежати від обраних параметрів у рівняннях, і невірно вибрані параметри можуть призводити до неточних результатів.

3. Підтримка стійкості в обмеженому діапазоні. Стійкість аналітичних рішень може бути забезпечено лише в обмеженому діапазоні параметрів, що може обмежувати застосування методу для деяких систем.

4. Поширення визначень високих порядків. При взаємодії багатьох порядків диференціювання результати можуть бути складними, а визначення високих порядків може призводити до складних математичних обчислень.

Загалом, метод Ван-дер-Поля є потужним інструментом для аналізу коливань у системах, але важливо розуміти його обмеження та враховувати контекст конкретного застосування.

Переваги методу Пуанкаре:

1. Виділення стаціонарних точок. Метод Пуанкаре дозволяє виділити стаціонарні точки та провести аналіз їхньої стійкості, що є важливим для визначення динаміки системи.

2. Відображення в фазовому просторі. Дозволяє побудувати важливі характеристики системи в фазовому просторі та вивчити взаємовідношення між різними станами системи.

3. Спрощення розрахунків. Для складних систем метод Пуанкаре може спростити розрахунки, концентруючись на стаціонарних точках та їхньому оточенні.

4. Визначення періодичних траєкторій. Відображення Пуанкаре може допомогти визначити періодичні траєкторії та цикли системи.

Недоліки методу Пуанкаре:

1. Залежність від вибору параметрів. Результати методу можуть бути чутливими до обраної параметризації, що може впливати на отримані властивості системи.

2. Важкість у визначенні глобальної динаміки. Визначення глобальної динаміки системи може бути важким завданням, особливо для складних нелінійних систем.

3. Обмеженість до гладких траєкторій. Метод Пуанкаре обмежений в тому сенсі, що він найкраще працює для гладких траєкторій, і може бути менш ефективним у випадках розривних або негладких динамічних систем.

Метод Пуанкаре застосовується в різних галузях, таких як фізика, хімія, біологія та інші, для аналізу динаміки різних систем. Його ефективність визначається контекстом конкретного дослідження та властивостями системи[21].

Щодо порівняння їх між собою, можна привести наступне.

Перевагами методу Ван-дер-Поля є:

1. Аналіз нелінійних осциляторів. Ефективний для аналізу нелінійних осциляторів та уявлення їхньої динаміки.
2. Виділення режимів автоколивань. Вдалий для виділення режимів автоколивань, які можуть виникати в системах.
3. Вивчення асиметрії. Дозволяє досліджувати асиметрію та нелінійні ефекти у динаміці систем.

До недоліків можна віднести:

1. Обмеження до осциляторів. Обмежений у використанні для систем, які не є осциляторами.
2. Низька робоча частота. Добре працює в області низьких робочих частот, але може бути менш ефективним у високофреквентних системах.

Метод Пуанкаре має наступні переваги:

1. Аналіз динамічних систем. Дозволяє проводити загальний аналіз динамічних систем та визначати їхню стійкість.
2. Глобальна перспектива. Забезпечує глобальний погляд на динаміку системи, враховуючи взаємовідношення стаціонарних точок.
3. Застосування до різних систем. Може використовуватися для різних класів систем, включаючи нелінійні та складні.

Недоліки цей метод має такі:

1. Залежність від параметрів. Результати можуть бути чутливими до обраної параметризації, що може впливати на отримані властивості системи.
2. Обмеженість до гладких траєкторій. Менше ефективний для систем із розривними або негладкими динаміками.

Отже, як висновок можна сказати наступне: вибір методу залежить від конкретного завдання та властивостей системи. Метод Ван-дер-Поля часто використовується для аналізу конкретних класів осциляторів. Метод Пуанкаре може бути застосований для загального аналізу різних динамічних систем, зокрема для визначення їхньої стійкості та глобальної динаміки. Обидва методи можуть бути використані як частини більших досліджень, доповнюючи один одного в аналізі різноманітних аспектів динаміки систем.

## ВИСНОВКИ

На залізницях України важливою проблемою є відсутність пристроїв захисту апаратури сигналізації, централізації та блокування від дії потужних імпульсних завад у вигляді перенапруг або грозових розрядів, які би забезпечували 100% захист. Було розглянуто пристрій, що представляє собою параметричний генератор частоти на неколінеарних магнітних полях ПГ 50:50. Для розуміння фізичних процесів, які відбуваються у ньому, було складено нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке фактично є математичною моделлю генератора. Проведено дослідження стійкості рішень цього диференціального рівняння двома методами.

Перший метод Ван-дер-Поля дозволив отримати графік, за допомогою якого визначено точку біфуркації, за якої пристрій переходить у режим генерації. Також з отриманого графіку можна спостерігати, що з переходом у нестійкий режим зсув фаз між вхідною та вихідною напругами дорівнює  $90^\circ$ . Це дозволяє більш глибоко розуміти фізичні процеси параметричного генератора частоти.

Другий метод Пуанкаре надав можливість спостерігати цілісний фазовий портрет роботи пристрою. Він складається з фазових траєкторій, по напрямку руху яких ми можемо оцінювати процеси, що відбуваються у генераторі. Зокрема перебування ПГ 50:50 у стані стійкої рівноваги до досягнення вхідною напругою значення напруги генерації. На графіку дуже наглядно зображений перехід через точку біфуркації до нестійкого режиму роботи параметричного генератора.

Було досліджено обидва методи, приведені їх переваги та недоліки, а також здійснено їх порівняння. У результаті дослідження прийшли висновку, що для отримання глибокого якісного дослідження стійкості рішень нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує роботу параметричного генератора, бажано застосувати обидва методи, які будуть доповнювати один одного.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Ящук К.І. Підвищення надійності системи автоблокування в умовах впливу високих рівнів тягових струмів та потужних імпульсних завад. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна., 2015
2. Хаяси Тихиро Нелинейные колебания в физических системах / Тихиро Хаяси. – Москва : Мир, 1968.
3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – Москва : Физматгиз, 1959.
4. Дмитриев М. В. Грозовые перенапряжения на оборудовании РУ 35-750 кВ и защита от них / М. В. Дмитриев. – Санкт-Петербург : СПбГПУ, 2006.
5. Инструкция по устройству молниезащиты зданий и сооружений. СН РК 2.04-29-2005. – Москва, 1996.
6. Костенко М. В. Заземления в сетях высокого напряжения и средства защиты от перенапряжений : учебное пособие / М. В. Костенко, И. М. Богатенков, Ю. А. Михайлов, Ф. Х. Халилов. – Ленинград : ЛПИ, 1983.
7. Пат. 70601 Україна, МПК В61L 1/00. Параметричний генератор з неколінеарними магнітними полями / А. П. Разгонов, М. О. Ковригін, К. І. Ящук, А. Ю. Журавльов, О. Ю. Лебедев, С. А. Разгонов; заявник Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – № U 2011 11205; заявл. 20.09.2011; опубл. 25.06.2012, Бюл. № 12.
8. Пат. 92628 Україна, МПК В61L 23/00 Двоконтурний параметричний генератор з захистом навантаження від завад / А. П. Разгонов, А. Ю. Журавльов, К. І. Ящук, С. А. Разгонов; заявник та патентовласник Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – № U 2014 03205; заявл. 27.03.2014; опубл. 26.08.2014, Бюл. № 16.
9. Пат. 69209 Україна, МПК В61L 23/00 Параметричний генератор частоти з захистом навантаження від завад / А. П. Разгонов, К. І. Ящук, А. Ю. Журавльов, С. А. Разгонов, О. Ю. Лебедев; заявник та патентовласник Дніпропетровський

національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.  
– № U 2011 11206; заявл. 20.09.2011; опубл. 25.04.2012, Бюл. № 8.

10. Пат. 77216 Україна, МПК В61L 23/00 Параметричний генератор з неколінеарними магнітними полями / А. П. Разгонов, К. І. Ящук, А. Ю. Журавльов, О. Ю. Лебедєв; заявник та патентовласник Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.  
– № U 2012 06526; заявл. 29.05.2012; опубл. 11.02.2013, Бюл. № 3.

11. Пат. 80793 Україна, МПК В61L 23/00 Параметричний генератор з ефективним захистом навантаження від завад / А. П. Разгонов, К. І. Ящук, А. Ю. Журавльов, О. Ю. Лебедєв; заявник та патентовласник Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.  
– № U 2012 14811; заявл. 24.12.2012; опубл. 10.06.2013, Бюл. № 11.

12. Пат. 87844 Україна, МПК В61L 23/00 Параметричний генератор з неколінеарними магнітними полями для живлення пристроїв автоматики і телемеханіки / А. П. Разгонов, К. І. Ящук, А. Ю. Журавльов, О. Ю. Лебедєв; заявник та патентовласник Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – № U 2013 09113; заявл. 19.07.2013; опубл. 25.02.2014, Бюл. № 4.

13. Правила безпечної експлуатації пристроїв автоматики, телемеханіки та зв'язку на залізницях України. ЦШ 0030. – Київ, 2003.

14. Разгонов А. П. Генератор частоты на неколлинеарных магнитных полях как эффективное защитное средство от помех / А. П. Разгонов, Е. И. Ящук // Залізничний трансп. України. – 2011.

15. Разгонов А. П. Защита рельсовых цепей путем применения параметрического трансформатора / А. П. Разгонов, Б. С. Сергеев, Е. И. Ящук // Транспорт Урала. – 2011.

16. Разгонов А. П. Исследование устойчивости периодических решений нелинейного дифференциального уравнения параметрического генератора частоты на неколлинеарных магнитных полях / А. П. Разгонов, Е. И. Ящук // Сучасні проблеми розвитку інтелектуальних систем транспорту : тези

Міжнародної науково-практ. конф. – Дніпропетровськ : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2014.

17. Разгонов С. А. Новое защитное средство электронных схем от помех / С. А. Разгонов, Е. И. Ящук // Вісн. Академії митної служби України. Сер.: «Технічні науки» – 2012.

18. Разгонов А. П. Параметричний генератор частоти – для живлення та захисту навантаження від потужних завод / А. П. Разгонов, К. І. Ящук, С. А. Разгонов // Залізничний трансп. України. – 2014. – № 3.

19. Разгонов А. П. Параметричний трансформатор частоти на неколінеарних магнітних полях як захисний засіб від завод / А. П. Разгонов, А. Ю. Журавлев, Е. И. Ящук // Безпека та електромагнітна сумісність на залізничному транспорті (S&EMC 2012) : тези V Міжнародної науково-практ. конф. – Дніпропетровськ : ДІТ, 2012.

20. Разгонов А. П. 100 %-я защита средств автоматики от воздействия мощных импульсных помех со стороны питающей сети / А. П. Разгонов, Е. И. Ящук, С. А. Разгонов // Проблеми та перспективи розвитку залізничного транспорту : тези 74-ї Міжнародної науково-практ. конф. – Дніпропетровськ : ДІТ, 2014.

21. Руководящие указания по защите от перенапряжений устройств СЦБ. – Москва : Транспорт, 1990.

22. Ящук К. І. Організація захисту навантаження параметричного генератора частоти від потужної імпульсної завади / К. І. Ящук // Матеріали молодих вчених та студентської конференції «Інформаційно-управляючі технології і системи на залізничному транспорті». – Дніпропетровськ : ДНУЗТ, 2012.