

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫЕ СТЕРЖНИ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Аркадий Маневич, Сергей Ракша

Украинский государственный химико-технологический университет
Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

1. Введение

Задача определения оптимальных параметров центрально сжатого тонкостенного стержня, в частности, Π -образного (швеллерного) профиля исследовалась в ряде работ, преимущественно в 60-70е годы (см. библиографический указатель [1]). Основная трудность решения задачи связана с учетом требований местной устойчивости. Для точного расчета местных критических напряжений необходимо рассматривать стержень как соединение взаимодействующих пластин, что представляет отдельную достаточно сложную задачу, требующую привлечения вычислительной техники. В связи с этим аналитическое решение задачи оптимального проектирования тонкостенного стержня было возможным лишь при использовании приближенных зависимостей и различных допущений. Такие решения были получены в ранних работах [2-5]. Что касается эффективных численных методов оптимизации - методов нелинейного программирования - то их разработка в те годы только начиналась, и они только начинали входить в расчетную практику.

Второй важный вопрос связан с используемым критерием общей устойчивости. Известно, что в зависимости от предела текучести и гибкости стержня (оптимальное значение которой определяется, как видно из полученного ниже решения задачи оптимизации, безразмерным параметром $P/(L^2 E)$, P - сжимающая сила, L - длина, E - модуль упругости) механизм разрушения сжатого тонкостенного стержня различен. Для малых и средних значений гибкости исчерпанию несущей способности предшествует местное выпучивание элементов (с уменьшением "эффективной ширины" стержня) и развитие пластических деформаций (с последующей общей упруго-пластической потерей устойчивости). Для больших гибкостей происходит чисто упругая потеря устойчивости.

Поэтому естественно, что в работах по оптимизации сжатых тонкостенных стержней применялись различные критерии и ограничения. В работе [6] оптимальные параметры Π -образного стержня (с отбортовками и без них) определялись из условия, что предельное напряжение - предел текучести (с учетом "эффективной ширины" стержня) и общая потеря устойчивости (изгибная или изгибно-крутильная) стержня с редуцированным сечением достигаются одновременно. Такой подход связан с использованием приближенных формул для расчета местного выпучивания, эмпирических и полумпирических зависимостей для "эффективной ширины", и полученная оптимальная конфигурация стержня зависит от механических свойств материала.

Представляется, что наряду с таким подходом желательно иметь строгое решение задачи оптимизации для случая чисто упругой потери устойчивости, основанное на линейной теории устойчивости. Такое решение, которое непосредственно применимо для стержней большой гибкости, в общем случае можно рассматривать как "предельное", определяющее идеализированную оптимальную конструкцию для упругого материала. Сравнение с этим решением других решений, основанных на более сложных моделях, позволит оценить, к какому дополнительному расходу материала и изменениям в конфигурации сечения приводят физическая и геометрическая нелинейности.

В данной работе приведены результаты решения задачи весовой оптимизации центрально сжатых стержней открытого профиля двух типов: а) швеллера; б) швеллера с отгибами, полученные

на основе точных решений линейной задачи устойчивости с использованием эффективного численного метода нелинейного программирования. Толщина профиля предполагается постоянной, что соответствует гнутым либо холодно-катанным профилям.

2. Постановка и метод решения задачи

Рассматривается шарнирно опертый тонкостенный стержень открытого профиля (рис.1,а), нагруженный сжимающей силой P , приложенной по центру тяжести сечения. Длина стержня L , сила P и характеристики материала стержня (модуль упругости E , модуль сдвига G , коэффициент Пуассона ν) считаются заданными. Отдельно выполнялась оптимизация для профиля типа швеллера с одинаковой толщиной стенки и полки (без отгибов) и профиля с отгибами на свободных краях полки внутрь сечения. Для этих двух вариантов оптимизации будем использовать обозначения III и IIIО соответственно. К варьируемым параметрам проектирования, определяемым из условия минимума веса, относятся толщина профиля t , ширина полки b_1 , стенки b_2 и отбортовки b_3 (рис.1,а).

Задача оптимизации ставится как задача нелинейного программирования. Ограничения задачи включают условия устойчивости по изгибной, изгибно-крутильной и местной формам выпучивания в виде $\sigma \leq \sigma_{kp}^{(i)}$, где $\sigma_{kp}^{(i)}$ - критические напряжения i -ой формы. Ограничения по прочности не ставились, т.е. предполагалось, что предел текучести материала достаточно высокий.

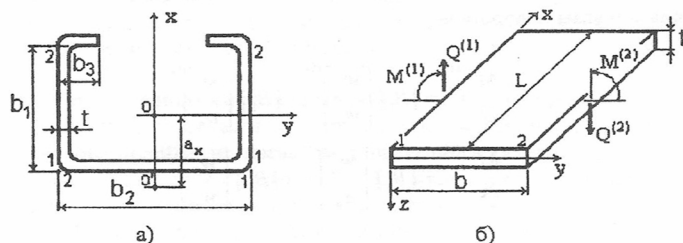


Рис.1. Поперечное сечение стержня (а) и местные оси координат пластин, составляющих профиль (б)

Как известно, в задачах оптимизации удобно оперировать безразмерными параметрами, что позволяет обобщить полученные результаты на широкий ряд конструкций одного класса (см., например, Шенли [7]). Безразмерные параметры нагрузки P^* , веса стержня G^* , и напряжений σ^* принимались в виде

$$P^* = \frac{P}{L^2 \cdot E} 10^6, \quad G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3, \quad (1)$$

где A - площадь поперечного сечения стержня, которое характеризуется, в свою очередь, безразмерными геометрическими параметрами $b_2/L, b_1/b_2, t/b_1, t/b_2$ (масштабные множители введены для удобства).

Ограничения по общим формам потери устойчивости. Критические напряжения общей формы определялись по теории Власова В.З. [8]. Общее уравнение в случае центрального сжатия для сечения с одной осью симметрии распадается на два уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma &= 0; \\ \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & a_x \sigma \\ a_x \sigma & r^2(\sigma_x - \sigma) \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

где a_x - координата центра изгиба профиля; $r^2 = (I_x + I_y)/A + a_x^2$,
 $\sigma_x = \pi^2 EI_x / (A \cdot L^2)$, $\sigma_y = \pi^2 EI_y / (A \cdot L^2)$ - изгибные эйлеровы напряжения;
 $\sigma_w = (\pi^2 EI_w / L^2 + GI_d) / (A \cdot r^2)$ - критические напряжения для чистой крутильной формы (I_x , I_y , I_w , I_d - моменты инерции сечения при изгибе и кручении). Из первого уравнения получаем критические напряжения для изгибной формы - $\sigma_y = \sigma$. Критические напряжения изгибно-крутильной моды равны значению меньшего из корней второго уравнения, которое можно записать в виде

$$(1 - a_x^2/r^2)\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_w)\sigma + \sigma_x\sigma_w = 0. \quad (2)$$

Ограничения по местной форме выпучивания. При расчете местной формы гнутого профиля стержень рассматривается как соединение пластин с точными условиями сопряжения по линиям контакта [9]. Для каждой из пластин (рис.1,б) решение дифференциального уравнения устойчивости принимается в виде $w = w(\eta) \sin m\pi\xi$ ($w(\eta)$ - функция прогиба по ширине пластинки, $\eta = b/L$; $\xi = x/L$ - продольная координата; m - число продольных полуволн).

Силовые факторы на краях "1", "2" (верхний индекс, в скобках) пластинок можно выразить через перемещения w и углы поворота w_η

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(1)} &= [B_1] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_2] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}; \\ \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}^{(2)} &= [B_3] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(1)} + [B_4] \begin{bmatrix} w \\ w_\eta \end{bmatrix}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[B_k] = \{b_{ij}^{(k)}\}$ - матрицы, приведенные в [9].

Граничные условия на свободных краях (равенство нулю моментов и поперечных сил) и условия сопряжения на линиях соединения (равенство углов поворота $w_{\eta,i} = w_{\eta,j}$ и равенство нулю алгебраической суммы изгибающих моментов $M_{,i} + M_{,j} = 0$, нижний индекс после запятой - номер края пластины) приводят к системе линейных однородных уравнений и соответствующему характеристическому уравнению, которое при целочисленной минимизации по числу продольных полуволн m определяет критические напряжения местного выпучивания.

Для профиля с отгибами, в зависимости от ширины отбортовки, возможны местные формы двух типов: а) линия соединения полки и отбортовки перемещается (в случае малой ширины отбортовки, рис.2,а); б) линия соединения полки и отбортовки не перемещается (в случае достаточно большой ширины, рис.2,б). Для случая (а) наряду с матрицей изгибной жесткости отбортовки необходимо вводить матрицу мембранной жесткости, и граничные условия включают также мембранные усилия и перемещения. Детали расчёта, которые здесь опущены, можно найти в [10].

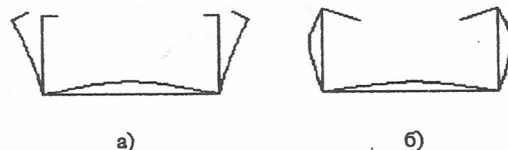


Рис. 2. Местные формы для профиля с отгибами

Необходимо отметить, что зависимость напряжений местной формы от m для сжатых тонкостенных стержней может иметь два локальных минимума (один из которых определяется преимущественно параметрами полки, а другой - стенки), и при изменении параметров в процессе оптимизации эти минимумы изменяются. Поэтому при поиске оптимальных параметров стержня напряжения местной формы рассчитывались для широкого диапазона чисел продольных полуоволн (т.е. вместо одного ограничения по местной устойчивости рассматривалось множество ограничений, как правило, для значений $m = 2 - 35$).

Метод решения задачи оптимизации. При выполнении расчетов использовался разработанный ранее пакет программ, позволяющий исследовать устойчивость тонкостенных стержней по общей и местной формам, а также использовалась программа, реализующая метод оптимизации - линейаризованный метод приведенного градиента (ЛМПГ) [11]. Многолетний опыт применения алгоритма ЛМПГ при решении задач оптимизации подкрепленных пластин и оболочек (а также других задач) показал высокую эффективность и надежность метода. Для достижения оптимума требовалось, как правило, 20-30 итераций при относительной погрешности определения оптимальных параметров порядка 10^{-3} .

3. Результаты расчета

При решении задачи оптимизации все оптимальные безразмерные параметры сжатого тонкостенного стержня определяются заданием одного безразмерного параметра нагрузки P^* . (При дополнительном задании длины стержня L определяются действительные размеры оптимальных стержней).

Значения параметра P^* принимались в диапазоне (0...2), в котором, как показало решение, расчет устойчивости в упругой области можно считать оправданным (значения критического напряжения оптимального стержня не превышают предела текучести хороших сталей). В этом диапазоне было выбрано 10 значений параметра P^* , для которых решалась задача оптимизации. На рис.3,а показаны поперечные сечения оптимальных стержней фиксированной длины $L = 1$ м, рассчитанные для профиля III при различных значениях параметра нагрузки P^* . Необходимо отметить стабильность отношения ширины (и площади) стенки и полок оптимальных профилей во всем рассмотренном диапазоне изменения параметра нагрузки: $b_1/b_2 = 0,43...0,42$. Коэффициенты устойчивости по местной форме также оказываются стабильными: для полки $k_1 = 0,64...0,65$ и стенки $k_2 = 3,5...3,58$ (коэффициенты устойчивости k связаны с критическими напряжениями формулой

$$\sigma = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2.$$

Параметры сечений полученных оптимальных стержней хорошо соотносятся с параметрами стандартных стальных гнутых швеллеров (но, как правило, имеют меньшую толщину профиля). Рассчитанные поперечные сечения профилей с отгибами на краях полок (ШО) для длины $L = 1$ м показаны на рис. 3,б. При этом несколько уменьшилась относительная ширина полок (в сравнении с вариантом Ш) - $b_1/b_2 = 0,37...0,39$, ширина отбортовки составляет около 1/3 ширины стенки ($b_2/b_1 = 0,36...0,33$), коэффициенты устойчивости элементов профиля - $k_1 = 0,79...0,75$ и стенки $k_2 = 5,5...5,55$. Относительная толщина элементов оптимальных профилей Ш и ШО, возрастает с увеличением нагрузки. Для некоторых значений параметра P^* относительные толщины данные приведены в табл.1.

Таблица 1

Параметр нагрузки P^*	Профиль Ш		Профиль ШО	
	t/b_1	t/b_2	t/b_1	t/b_2
0,5	0,049	0,021	0,049	0,018
1,0	0,056	0,024	0,058	0,021
1,5	0,061	0,026	0,061	0,023
2,0	0,065	0,027	0,066	0,024

Приведенные значения безразмерных параметров оптимальных стержней позволяют однозначно определить геометрические размеры оптимальных сечений при заданных P и L .

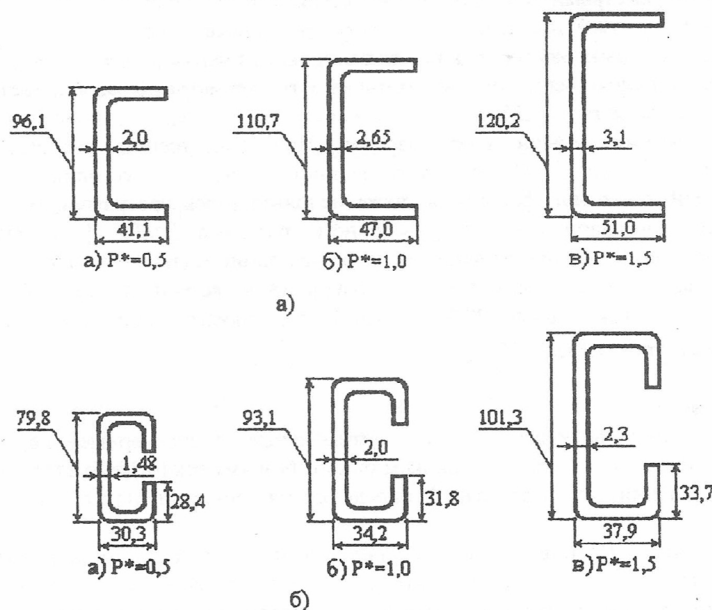


Рис.3. Оптимальные профили поперечных сечений при различных значениях параметра нагрузки P^* для длины $L=1$ м (размеры - в мм)

Активными ограничениями задачи оптимизации оказываются условия устойчивости по изгибно-крутильной и одной из местных форм выпучивания, а также условие равенства толщины элементов профиля. По общей изгибной форме критические напряжения оказываются выше на 10-15%.

Значения безразмерного параметра веса G^* и безразмерных напряжений σ^* для двух рассмотренных профилей представлены на рис. 4.

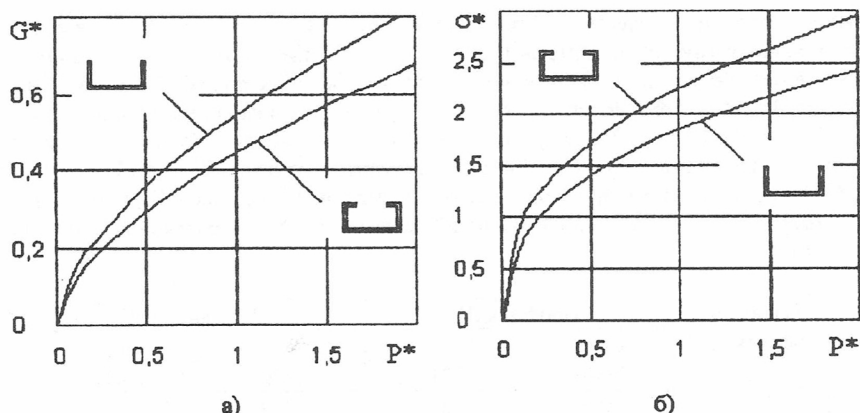


Рис.4. Зависимости безразмерных параметров веса и напряжений оптимальных стержней от параметра нагрузки для профилей III и IIIО.

Зависимости $G^*(P^*)$ и $\sigma^*(P^*)$, представленные на рис. 4, с большой точностью (погрешность не превышает 1%) аппроксимируются степенными функциями:

швеллер без отгибов - $\sigma^* = 1,93P^{0,396}$; $G^* = 0,518P^{0,604}$;

швеллер с отгибами - $\sigma^* = 2,249P^{0,394}$; $G^* = 0,445P^{0,606}$.

Эти выражения позволяют не только легко определять напряжение и вес оптимального стержня, но и находить предельные значения P , до которых применимо данное решение. Эти предельные значения определяются из условия $\sigma^* = \frac{\sigma_s}{E} \cdot 10^3$, где σ_s - предел текучести материала стержня. Как видно из рис.4, усиление профиля отгибами полок приводит к снижению веса оптимального стержня на 16% (и соответственному увеличению напряжения)

Литература

- [1]. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель. Часть 1. АН СССР, СО, Институт гидродинамики. Новосибирск, 1975, с. 140-157.
- [2]. Kirste L. Beitrag zum Problem des "Tragwerks-Mindestgewicht" // Z. Flugwissenschaften. 1960, Bd. 8, №12, s. 352-359.
- [3]. Saelman B, Rubin A.E Designing minimum-section columns // Mach. Design. 1961, V.33, №22, p. 167-169.
- [4]. Górski S. Optimalizacja projektowania stalowych dwugależiowych prętów ściskanych osiowo // Inz-ia i budown. 1968, t.25, №12, s. 465-469.
- [5]. Губайдулин Р.Г. Метод определения оптимального сечения центрально сжатых стоек // Изв. вузов. Строит-во и арх-ра. 1969, №2, с. 12-18.
- [6]. Yoshida H., Maegawa K. The optimum cross section of channel columns. Int. J. Mech. Sci., V. 21, 1979, N 3, pp. 149-160.
- [7]. Шэнли Ф.Р. Анализ веса и прочности самолётных конструкций. М., Оборонгиз, 1957. - 408 с.
- [8]. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Изд-е 2-е. М.: ГИФМЛ. 1959, 568 с.
- [9]. Маневич А.И., Ракша С.В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях. В сб.: Theoretical Foundations in Civil Engineering. 4, V.1, part 2 (Proc. Of the Polish-Ukrainian seminar, Warsaw, July 1996), Dnepropetrovsk, 1996, с. 270-275.
- [10]. Маневич А.И. Устойчивость пластин и оболочек с ребрами таврового профиля // Строит. механика и расчет сооружений, 1985, № 2, с. 34-38.
- [11]. Маневич А.И., Зайденберг А.И. Линеаризованный метод приведенного градиента для решения задач нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974, №6, с. 13-18.

OPTIMAL COMPRESSED COLUMNS OF OPEN CROSS-SECTION

Arkadiy Manevich, Sergey Raksha

Ukrainian State University of Chemical Technology
Dnepropetrovsk State Technical University of Railway Transport

Results of solution of the weight minimization problem for thin-walled columns with open cross-section under compression are presented. Two types of cross section are considered: a) channel and b) channel with lips. The solution is based on the exact analysis of the linear stability problem for the overall (flexural and flexural-torsional) buckling and for local buckling modes and uses an efficient method of nonlinear programming. Optimal parameters of the columns are presented in tabular, graphic and approximate analytical forms.