

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра теоретичної
та будівельної механіки

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи
на тему

«Розрахунок статично невизначуваних рам методом переміщень»

Електронний аналог
друкованого видання

ДНПРО
2023

УДК 624.04/07(076)

Б 90

Укладачі:

Л. В. Урсуляк, С. А. Костриця, Є. Ф. Федоров, О. О. Болотов

Експерт:

канд. техн. наук, доц. *Ю.М. Горбатюк* (УДУНТ)

Рекомендовано МКФ ЕГ (протокол № 8 від 19.04.23)

Зареєстровано НМВ ДНУЗТ (реєстр. № 639 від 06.07.23)

Б 90 Будівельна механіка : методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи на тему «Розрахунок статично невизначуваних рам методом переміщень» / уклад. С. А. Костриця, Л. В. Урсуляк, Є. Ф. Федоров, О. О. Болотов ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро : УДУНТ, 2023. – 79 с.

У методичних рекомендації на початку наведені стислі відомості з теорії, які необхідні для виконання відповідної розрахунково-графічної роботи. Для поглибленого вивчення теоретичного матеріалу слід скористатися конспектом лекцій в СДН Moodle (ННЦ «Лідер») або літературою, яка надана наприкінці методичних рекомендацій.

Детально розглянуто приклади розрахунків статично невизначених систем різних конфігурацій методом переміщень. Приведені завдання для самостійної роботи. Наведено список рекомендованої літератури, яким слід скористатися для поглибленого вивчення теоретичного матеріалу.

Методичні вказівки сприяють кращому засвоєнню теми «Розрахунок статично невизначуваних рам методом переміщень» дисципліни «Будівельна механіка», розвитку навичок виконання інженерних розрахунків, допомагають скоротити час на виконання розрахунково-графічної роботи.

Для студентів денної та безвіддільної форм навчання технічних спеціальностей.

Іл. 108, бібліогр.: 12 назв.

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ	7
1.1. Визначення кількості невідомих. Основна та еквівалентна системи методу переміщень	8
1.2. Канонічні рівняння методу переміщень.	13
1.3. Матрична форма методу переміщень.....	15
2. РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ НА НЕРУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ.....	17
2.1. Приклад 1	17
2.1.1. Визначення кількості невідомих.....	18
2.1.2. Побудова основної та еквівалентної систем методу переміщень.....	18
2.1.3. Складання системи канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень.....	19
2.1.4. Епюри згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого навантаження.....	20
2.1.5. Визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь статичним способом.	22
2.1.6. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів при невідомих переміщеннях і вільних членів канонічних рівнянь.	24
2.1.7. Розв'язання системи канонічних рівнянь.....	28
2.1.8. Побудова остаточної епюри згинальних моментів	28
2.1.9. Статична перевірка рівноваги вузлів рами	30
2.1.10. Кінематична (деформаційна) перевірка остаточної епюри згинальних моментів.	31
2.1.11. Побудова епюри поперечних зусиль	32
2.1.12. Побудова епюри поздовжніх зусиль.....	35
2.1.13. Визначення опорних реакцій. Перевірка умов рівноваги заданої рами.	36
2.2. Приклад 2.	38
2.2.1. Визначення кількості невідомих.....	39
2.2.2. Побудова основної та еквівалентної системи методу переміщень.....	40
2.2.3. Складання системи канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень.....	41
2.2.4. Побудова епюр згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого навантаження.	42
2.2.5. Визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь статичним способом.	45
2.2.6. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь.	50

2.2.7. Розв’язання системи канонічних рівнянь.....	55
2.2.8. Побудова остаточної епюру згинальних моментів рами.....	55
2.2.9. Статична перевірка рівноваги вузлів рами.	58
2.2.10. Кінематична (деформаційна) перевірка остаточної епюри згинальних моментів.....	59
2.2.11. Побудова епюри поперечних зусиль	60
2.2.12. Побудова епюри поздовжніх зусиль.....	63
2.2.13. Визначення опорних реакцій. Перевірка умов рівноваги заданої рами.	65
2.3. Приклад розрахунку статично невизначеної рами методом переміщень в матричній формі.	66
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	74
4. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	75
ДОДАТОК 1.....	76
ДОДАТОК 2.....	77

ВСТУП

Для розрахунку статично невизначених систем в будівельній механіці розроблено декілька методів.

Перевірка більшості об'єктів, як транспортних систем, так і будівельних конструкцій з точки зору будівельної механіки є статично невизначеними системами. Тобто такими системами, в яких кількість накладених на них в'язів перевищує число в'язів, необхідне для забезпечення геометричної незмінності конструкції.

Статично невизначені конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з статично визначеними, основними з яких є:

- статично невизначена система у порівнянні з відповідною статично визначеною системою, в результаті наявності додаткових «зайвих» в'язів, є більш жорсткою;
- в статично невизначеній системі з'являються менші внутрішні зусилля у порівнянні з відповідною статично визначеною системою, що в свою чергу дозволяє економити матеріал;
- руйнування «зайвих» в'язів в статично невизначеній системі не призводить до руйнування конструкції, а призводить лише до перерозподілу внутрішніх зусиль. В той же час руйнування в опорі в статично визначеній конструкції призводить до утворення геометрично змінної конструкції.

Одним з таких методів є метод переміщень. Метод переміщень був розроблений і впроваджений у практику пізніше ніж метод сил. Утім він набув більшого поширення спочатку при «ручному» (без застосування комп'ютерних програм) розрахунку споруд та систем, завдяки простоті та меншій трудомісткості обчислень для значної кількості досліджуваних об'єктів. Метод переміщень є таким же універсальним методом, як і метод сил, і може бути застосований для розрахунку будь-яких статично невизначених систем. Однак найбільш раціонально застосування цього методу для розрахунку статично невизначених рам і нерозрізних балок. При розрахунку інших статично невизначених систем (ферм, арок і т.д.) рішення методом переміщень виходить більш громіздким в порівнянні з методом сил, і, в ручній реалізації, для розрахунку таких систем метод переміщень, як правило, не застосовується.

В сучасних умовах застосування комп'ютерного проєктування та розрахунків дуже важливим є вивчення і засвоєння принципових аспектів методу переміщень, які студент отримає під час «ручного» розрахунку статично невизначених стержневих систем, оскільки метод переміщень лежить в основі багатьох програмних комплексів призначених для розрахунку статично

невизначених систем на міцність та стійкість. Це дозволяє інженеру не тільки змістовно користуватись програмними засобами, а і оцінювати отримані результати, що прямо залежить від розуміння принципів, на яких побудоване програмне забезпечення. Сьогодні метод переміщень — один з найважливіших оплотів сучасної будівельної механіки, на базі якого створені розрахункові програми для ЕОМ. Внутрішня структура цього методу виявилася ідеально відповідною для формалізованого підходу, орієнтованого для виконання на комп'ютерах.

Перед тим як приступити до виконання розрахунково-графічного завдання, необхідно вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади, що відносяться до змісту завдання. Такі приклади наведені в дистанційних курсах дисциплін «Будівельна механіка залізничного рухомого складу» або «Будівельна механіка (частина 2)» або «Будівельна механіка (скорочений курс)».

Рекомендується уважно прочитати завдання, а також вказівки, які наведені на бланку завдання.

При оформленні розрахунково - графічних робіт необхідно враховувати наступні рекомендації:

1. На стандартному аркуші формату А4 олівцем накреслити в масштабі розрахункову схему рами і вказати всі розміри і величини заданого навантаження;
2. Обчислення проводяться за допомогою будь-яких електронних обчислювальних пристроїв;
3. Пояснювальна записка оформлюється на стандартних аркушах формату А4 чорнилами;
4. При визначенні будь-якої величини спочатку записується формула, в яку потім підставляються числові значення всіх величин, які входять до формули та надається результат;
5. Розрахунок коментується стислими поясненнями.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

При розрахунках статично невизначуваних систем методом сил за невідомі приймаються зусилля в зайвих в'язях (сили чи моменти). Після визначення невідомих нескладно знайти внутрішні сили M , Q , N .

Можна вирішити задачу по іншому: спочатку будь-яким шляхом знайти переміщення, а потім визначити відповідне їм розподілення зусиль.

Саме так роблять при розрахунку статично невизначуваних систем методом переміщень.

Основна ідея методу переміщень полягає в тому, що вихідна система шляхом введення в'язів перетворюється в кінематично визначувану. Тобто, отримана система не повинна мати лінійних та кутових переміщень вузлових точок.

Встановимо зараз, які переміщення стрижня необхідно і достатньо знати, щоб можна було визначити внутрішні зусилля у будь-якому перерізі.

Для цього розглянемо стрижень AB , який виділено з будь-якої плоскої стержневої системи. Під впливом навантаження, яке прикладене до всієї системи, стрижень AB буде згинатися та переміщуватися в нове положення A_1B_1 (рис. 1.1).

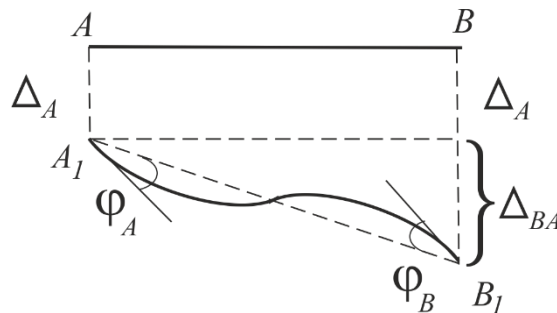


Рис. 1.1 Вигляд довільного стрижня до (AB) та після (A_1B_1) деформації

Нове положення стрижня A_1B_1 можна отримати з початкового внаслідок наступних незалежних переміщень:

1. Поступового переміщення всіх точок стрижня на одну й ту ж саму величину Δ_A . При цьому вісь стрижня залишається прямолінійною, а згинальні моменти та поперечні сили у всіх перерізах стрижня дорівнюють нулю;
2. Переміщення кінця стрижня B на величину Δ_{BA} ;
3. Поворот кінця стрижня A на кут φ_A ;
4. Поворот кінця стрижня B на кут φ_B .

Якщо знайти величини Δ_{BA} , φ_A та φ_B , то цього буде достатньо для визначення внутрішніх сил в будь-якому перерізі стрижня. Ці переміщення і треба прийняти за невідомі при розрахунках статично невизначуваних систем методом переміщень.

Тобто, за **невідомі при розрахунках статично невизначуваних систем методом переміщень** приймають кути повороту вузлів та їх лінійні переміщення.

1.1. Визначення кількості невідомих. Основна та еквівалентна системи методу переміщень

Загальна кількість невідомих n дорівнює сумі кількості невідомих кутів повороту вузлів n_θ та кількості невідомих незалежних лінійних переміщень вузлів n_Δ тобто:

$$n = n_\theta + n_\Delta.$$

Кількість невідомих кутових переміщень n_θ (кутів повороту вузлів) дорівнює кількості жорстких вузлів рами. Жорстким вважається такий вузол, в якому кінці хоча б двох стрижнів, жорстко пов'язані між собою.

Для визначення кількості невідомих лінійних переміщень слід прийняти до уваги, що не усі лінійні переміщення вузлових точок є незалежними, так як в методі переміщень, як і в методі сил не враховуються повздовжні деформації стрижнів (відстань між двома вузловими точками до деформації та після прикладеного навантаження не змінюється). Тому для визначення n_Δ достатньо визначити число незалежних лінійних переміщень вузлових точок. Для визначення кількості незалежних лінійних переміщень потрібно замінити вихідну статично невизначувану систему шарнірною схемою шляхом введення повних шарнірів у всі вузли та опорні жорсткі защемлення. Таким чином кількість незалежних лінійних переміщень вузлових точок n_Δ дорівнює ступені геометричної змінності шарнірної системи та дорівнює кількості стрижнів, які необхідно ввести в шарнірну схему, щоб перетворити її в геометрично незмінну.

Кількість незалежних лінійних переміщень вузлових точок буде дорівнювати ступені геометричної змінності шарнірної системи, яку можна визначити за формулою:

$$n_\Delta = 3 \cdot D - 2 \cdot III_o - C_o,$$

де D - кількість стрижнів в системі, III_o - кількість простих шарнірів у вузлах, C_o - кількість опорних стрижнів.

Простим називається шарнір, який з'єднує у вузлі два стрижня. На практиці зустрічаються ще так звані кратні шарніри, які з'єднують не два, а де-

кілька стрижнів. Якщо у вузлі збігається n стрижнів, то кількість простих шарнірів у цьому вузлі буде дорівнювати $(n-1)$.

Конструкції опор дуже різноманітні. При розрахунках плоских систем їх схематизують у вигляді трьох основних типів:

- *шарнірно-рухома опора* (рис. 1.2, а, б), в якій має місце тільки одна реакція R_1 ;
- *шарнірно-нерухома опора* (рис. 1.2, в, г), в якій реакцію можна представити у вигляді двох складових – вертикальної R_1 та горизонтальної R_2 ;
- *жорстке затиснення (жорстке заземлення)*, в якому мають місце дві складових опорної реакції – вертикальна R_1 і горизонтальна R_2 та реактивний момент R_3 (рис. 1.2, д).

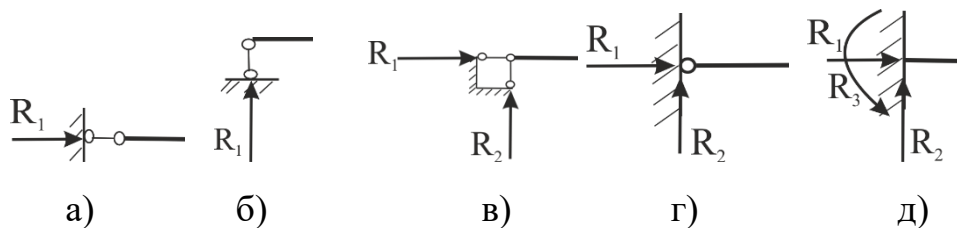


Рис. 1.2 Види опор та їх реакцій

Приклад 1. Визначимо кількість невідомих методу переміщень для рами, яка наведена на рис. 1.3а.

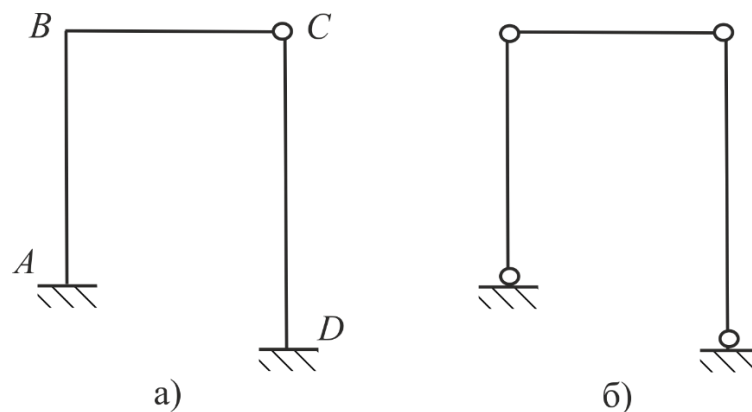


Рис. 1.3 Приклад кінематично-невизначеної рами ($n=2$)

Загальну кількість невідомих n визначимо за формулою: $n = n_g + n_l$. В нашому випадку тільки один вузол B жорсткий, тому кількість кутових переміщень $n_g = 1$.

Для визначення кількості лінійних переміщень n_l створюємо шарнірну схему (рис. 1.3,б), шляхом введення головних шарнірів у всі жорсткі вузли

(вузол B) та жорсткі защемлення (точки A, D) (Примітка. Жорстке защемлення з введенням шарніром перетворюється у шарнірно-нерухому опору).

Для визначення кількості лінійних переміщень застосовуємо формулу $n_{\text{л}} = 3 \cdot D - 2 \cdot III_o - C_o$, де D - це кількість дисків у шарнірній схемі, III_o - кількість простих шарнірів, C_o - кількість опорних стрижнів.

Для схеми, яка зображена на рис. 1.3,б, кількість дисків у шарнірній схемі $D=3$, кількість простих шарнірів у вузлах $III_o=2$, кількість опорних стрижнів $C_o=4$.

$$n_{\text{л}} = 3 \cdot D - 2 \cdot III_o - C_o = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

Загальна кількість невідомих $n = n_{\text{г}} + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2$.

Приклад 2. Визначимо кількість невідомих переміщень для рами, яка наведена на рис. 1.4, а.

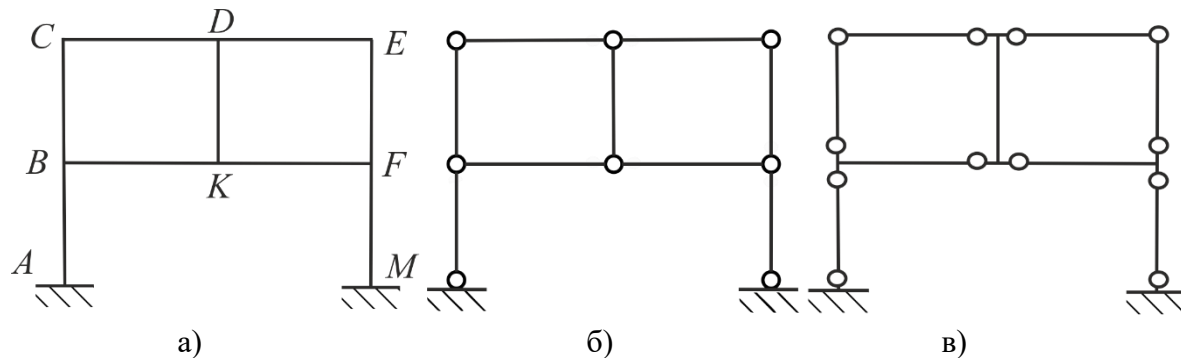


Рис. 1.4 Приклад кінематично невизначеної рами ($n=9$)

Загальна кількість невідомих $n = n_{\text{г}} + n_{\text{л}}$.

Кількість кутових переміщень дорівнює кількості жорстких вузлів (вузли B, C, D, K, E, F) $n_{\text{г}}=6$.

Шарнірна схема вихідної рами зображена на рис. 1.4, б). На схемі, яка наведена на рис. 1.4, в) складні шарніри замінено простими. Кількість дисків $D=9$, кількість простих шарнірів у вузлах $III_o=10$, кількість опорних стрижнів $C_o=4$.

Отже $n_{\text{л}} = 3 \cdot D - 2 \cdot III_o - C_o = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 10 - 4 = 3$.

Загальна кількість невідомих $n = n_{\text{г}} + n_{\text{л}} = 6 + 3 = 9$.

Основна система методу переміщень.

При розрахунках методом переміщень система розбивається на декілька однопрогонових статично невизначуваних балок. Це досягається введенням в систему додаткових в'язів. В якості додаткових в'язів можуть бути:

1. «Плаваюче» защемлення (далі - защемлення). Ці в'язі відрізняються від звичайного абсолютно жорсткого защемлення тим, що перешкоджають лише повороту вузла і не позбавляють його лінійної рухливості. Реакціями у таких в'язях є моменти;

2. Опорні стрижні, які перешкоджають лінійним зміщенням вузлів.

Одержана в результаті цього кінематично-визначена система називається основною системою метода переміщень.

Кількість додаткових защемлень в основній системі метода переміщень дорівнює кількості невідомих кутових переміщень n_y , які вводяться у всі жорсткі вузли.

Кількість додаткових опорних стрижнів дорівнює кількості невідомих лінійних переміщень вузлів n_l . Додаткові стрижні вводяться у напрямку лінійних зміщень, які треба заборонити.

Таким чином, для отримання **основної системи метода переміщень**, по-перше, в усі «жорсткі» вузли вихідної системи треба ввести защемлення, їх кількість дорівнює кількості кутових переміщень n_y які перешкоджають повороту вузла, та, по-друге, ввести у вихідну систему стрижні, які перешкоджають лінійним зміщенням вузлів, кількість яких дорівнює кількості лінійних переміщень n_l .

Наприклад, оберемо основну систему для рам, які наведені на рис. 1.3, а та 1.4, а.

Приклад 1. Оберемо основну систему для рами, яка наведена на рис. 1.3, а.

Як вже було визначено раніше, загальна кількість невідомих для наведеної рами $n = n_y + n_l = 1 + 1 = 2$, тому для отримання основної системи методу переміщень введемо дві в'язі.

Оскільки $n_y = 1$, то введемо одне защемлення у жорсткий вузол B .

Оскільки $n_l = 1$, то введемо один опорний стрижень, який перешкоджає лінійному горизонтальному переміщенню вузлів B та C .

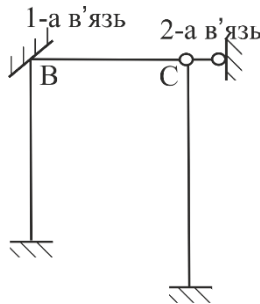


Рис. 1.5 Основна система

Приклад 2. Обрати основну систему для рами, яка наведена на рис. 1.4, а.

Як вже було визначено раніше, загальна кількість невідомих для наведеної рами $n = n_y + n_l = 6 + 3 = 9$, тому для отримання основної системи методу переміщень введемо дев'ять в'язів (рис. 1.6).

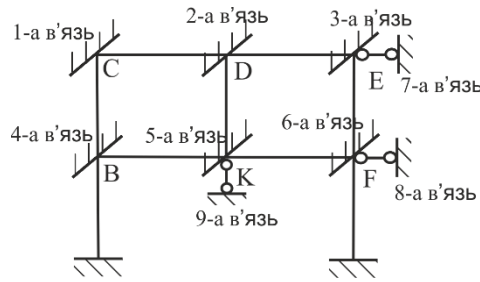


Рис. 1.6 Основна система методу переміщень

Оскільки $n_g = 6$, то введемо дев'ять защемлень у жорсткі вузли C, B, D, K, E, F (1 - 6 в'язі).

Якщо $n_d = 3$, то введемо три опорні стрижня. Перший опорний стрижень (7-а в'язь) перешкоджає лінійним горизонтальним переміщенням вузлів C, D, E ; другий - (8-а в'язь) перешкоджає лінійним горизонтальним переміщенням вузлів B, K, F ; третій - (9-а в'язь) перешкоджає вертикальному переміщенню вузлів D, K .

Для отримання еквівалентної системи треба до основної системи додати задане навантаження та додатні невідомі кутові та лінійні переміщення.

Введемо правило знаків для невідомих переміщень:

кутове переміщення вважається додатним, якщо поворот відбувається за годинниковою стрілкою;

горизонтальне лінійне переміщення вважається додатним при зміщенні вузла праворуч. Вертикальне лінійне переміщення вважається додатним при зміщенні вузла донизу.

Наприклад, для рами наведеної на рис. 1.7, а, основна система зображена на рис. 1.7, б, а еквівалентна система – на рис. 1.7, в.

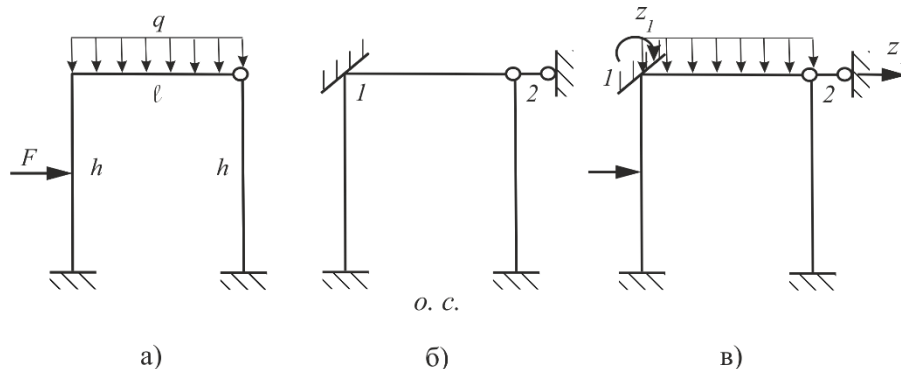


Рис. 1.7 а – розрахункова схема рами, б – основна система, в – еквівалентна система

1.2. Канонічні рівняння методу переміщень.

Еквівалентна система методу переміщень відрізняється від заданої системи наявністю додаткових в'язів, що перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів. Реактивні моменти і сили у введених вузлах будуть дорівнювати нулю, якщо повернути защемлення на кути, які дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їх лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, які виникають у вихідній системі. Після цього деформації еквівалентної системи та зусилля в ній будуть дорівнювати деформаціям і зусиллям у вихідній системі.

Рівність нулю реактивних зусиль за напрямками невідомих переміщень лежить у основі рівнянь методу переміщень, тобто :

$$R_1 = 0, R_2 = 0, R_3 = 0 \dots$$

Тут $R_1, R_2, R_3, \dots$ - реактивні моменти у введених защемленнях і реактивні сили у доданих стрижнях. Кількість рівнянь дорівнює кількості введених защемлень та стрижнів, тобто кількості невідомих переміщень.

Наприклад, для рами, яка наведена на рис. 1.7а, кількість рівнянь дорівнює кількості введених защемлень та опорних стрижнів, тобто кількості невідомих переміщень $n = 2$.

Система рівнянь методу переміщень для означеної рами мають вигляд:
 $R_1 = 0, R_2 = 0$.

Представимо перше рівняння методу переміщень у розгорнутій формі:

$$R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1F}.$$

Перший індекс означає номер в'язі, де виникає реакція, другий - вказує на те, що є причиною появи реакції. Тому R_{11} - реактивний момент у введеному защемленні від повороту цього защемлення на кут Z_1 , R_{12} - реактивний момент у введеному защемленні від лінійного зміщення вузлів на величину Z_2 , R_{1F} - реактивний момент у введеному защемленні від заданого навантаження.

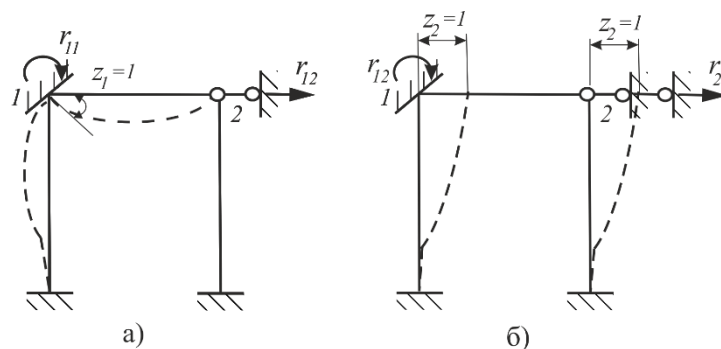


Рис. 1.8

Реактивні моменти R_{11} та R_{12} від Z_1 і Z_2 можна замінити виразами:

$$R_{11} = r_{11}Z_1 \text{ та } R_{12} = r_{12}Z_2.$$

Тут r_{11} - реактивний момент у защемленні від повороту цього защемлення на кут Z_1 , який дорівнює одиниці; r_{12} - реактивний момент у защемленні від зміщення по горизонталі на величину $Z_2 = 1$ (див. рис. 1.8а). Після означеної заміни перше рівняння отримаємо у вигляді:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0.$$

Якщо виконати аналогічні перетворення другого рівняння ($R_2 = 0$), отримаємо:

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

В цьому рівнянні r_{21} - реактивне зусилля у додатковому стрижні від повороту защемлення на кут $Z_1 = 1$; r_{22} - реактивне зусилля у додатковому стрижні від лінійного зміщення вузлів на величину $Z_2 = 1$ (див. рис. 1.8б).

Сенс першого рівняння полягає в запереченні моменту у введеному защемленні, а другого - у запереченні реактивного зусилля у введеному стрижні. Обидва рівняння разом утворюють систему канонічних рівнянь методу переміщень для випадку двох невідомих. Аналогічно складається система канонічних рівнянь для іншої кількості невідомих.

У загальному випадку (n невідомих переміщень) канонічні рівняння методу переміщень мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1j}Z_j + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2i}Z_i + \dots + r_{2j}Z_j + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} = 0 \\ \dots \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{ij}Z_j + \dots + r_{in}Z_n + R_{iF} = 0 \\ \dots \\ r_{j1}Z_1 + r_{j2}Z_2 + \dots + r_{ji}Z_i + \dots + r_{jj}Z_j + \dots + r_{jn}Z_n + R_{jF} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nj}Z_j + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nF} = 0 \end{array} \right. ,$$

де r_{ij} це реакція у i -ій в'язі від одиничного переміщення $Z_j = 1$.

Коефіцієнти $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{ii}$, які розташовані на головній діагоналі, називаються головними. Вони завжди додатні. Коефіцієнти, які розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють одне одному $r_{ij} = r_{ji}$.

1.3. Матрична форма методу переміщень

Канонічні рівняння методу переміщень

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} &= 0 \\ \vdots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nF} &= 0 \end{aligned}$$

в матричній формі мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \vdots \\ R_{nF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

або

$$r \cdot Z + R_F = 0,$$

де

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} - \text{матриця, яка містить величини реакцій у введених}$$

в'язях від їх одиничних переміщень (матриця жорсткості конструкції),

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} - \text{вектор шуканих переміщень},$$

$$R_F = \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \vdots \\ R_{nF} \end{bmatrix} - \text{вектор, який містить величини реакцій у введених в'язях}$$

від зовнішнього навантаження

Елементи матриць r та R_F знаходяться шляхом перемноження матриць:

$$\begin{aligned} r &= \bar{L}^T \cdot G \cdot \bar{L} \\ R_F &= -\bar{L}^T \times G \times M_F^c, \end{aligned}$$

де $\bar{L}$ – матриця ординат одиничних епюр згинальних моментів. Матриця $\bar{L}$ має розмірність $m \times n$, де m – кількість характерних точок на рамі, n – число невідомих методу переміщень;

M_F^c – матриця ординат згинальних моментів в будь-якій основній системі методу сил від зовнішнього навантаження. Матриця M_F^c має розмірність $m \times 1$;

G – матриця податливості, яка формується з матриць податливості окремих ділянок G_i . Розмірність матриці G – $m \times m$.

Вигляд матриць G_i залежить від типу зовнішнього навантаження на i -тій ділянці.

Для ненавантажених ділянок матриці G_i мають вигляд:

$$G_i = \frac{l_i}{6E_i I_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

де l_i – довжина i -тої ділянки, $E_i I_i$ – жорсткість i -тої ділянки.

Для ділянок навантажених рівномірно розподіленим навантаженням

$$G_i = \frac{l_i}{6E_i I_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Після визначення чисельних значень компонентів матриць r та R знаходимо складові вектору шуканих переміщень вузлових точок Z_i :

$$Z = -r^{-1} \cdot R.$$

Ординати остаточної епюри згинальних моментів отримаємо з використанням співвідношення:

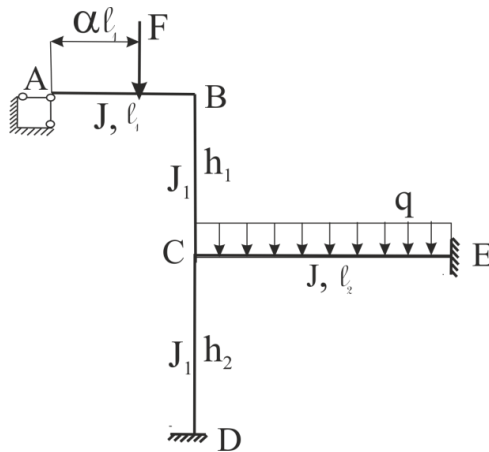
$$M = L \cdot Z + M_F,$$

де M_F – матриця ординат епюри згинальних моментів, побудованої в основній системі методу переміщень від зовнішнього навантаження (рис. 2.42).

2. РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ НА НЕРУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

2.1. Приклад 1

Для рами, яка наведена на рис. 2.1, побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q та поздовжніх сил N :



$$\ell_1 = 4\text{ м}, \ell_2 = 7,2\text{ м},$$

$$h_1 = 5\text{ м}, h_2 = 5,4\text{ м},$$

$$\frac{J}{J_1} = 0,25; J = J_1 \cdot 0,25,$$

$$\alpha = 0,75, F = 30\text{ кН}, q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Рис. 2.1 Розрахункова схема рами та вихідні дані

Для вирішування задачі необхідно:

- Визначити кількість невідомих;
- Створити основну та еквівалентну системи методу переміщень;
- Скласти систему канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень;
- Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого вантаження;
- Визначити коефіцієнти при невідомих та вільні члени системи канонічних рівнянь статичним способом. Виконати перевірку знайдених величин;
- Розв'язати систему канонічних рівнянь;
- Побудувати остаточну епюру згинальних моментів;
- Виконати статичну перевірку остаточної епюри згинальних моментів;
- Побудувати епюри поперечних та поздовжніх сил;
- Визначити опорні реакції й виконати загальну перевірку умов рівноваги заданої рами.

2.1.1. Визначення кількості невідомих

Як вже було викладено вище, загальну кількість невідомих n визначимо за формулою: $n = n_e + n_l$. Кількість невідомих кутових переміщень n_e (кутів повороту вузлів) дорівнює кількості жорстких вузлів.

В нашому випадку, в наведеній рамі два жорстких вузла :вузол B та вузол C (див. рис. 2.1), тому $n_e = 2$

Для визначення кількості лінійних переміщень будемо шарнірну схему (рис. 2.2), шляхом введення шарнірів у всі жорсткі вузли (вузол B , вузол C) та жорсткі защемлення (точки D , E).

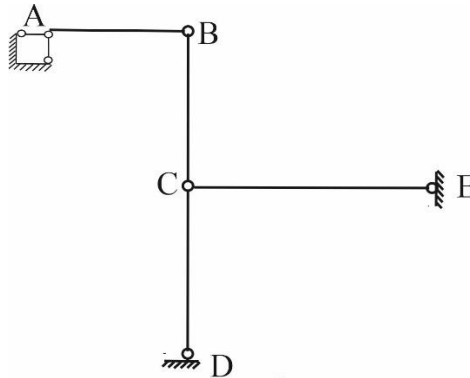


Рис. 2.2 Шарнірна схема рами для визначення кількості лінійних переміщень

Примітка: Жорстке защемлення з введеним шарніром перетворюється у шарнірно-нерухому опору з двома опорними реакціями.

Для визначення кількості лінійних переміщень застосовуємо формулу $n_l = 3 \cdot D - 2 \cdot III - C_0$, де D - це кількість дисків у шарнірній схемі, III - кількість простих шарнірів у вузлах, C_0 - кількість опорних реакцій .

Для схеми, яка зображена на рис. 2.2, $D = 4$, кількість простих шарнірів у вузлах $III = 3$ (один простий шарнір у вузлі B та два простих шарніра у вузлі C), кількість опорних реакцій $C_0 = 6$.

$$n_l = 3 \cdot D - 2 \cdot III - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

$$\text{Загальна кількість невідомих } n = n_e + n_l = 2 + 0 = 2.$$

2.1.2. Побудова основної та еквівалентної систем методу переміщень

Для отримання основної системи методу переміщень введемо дві в'язі (рис. 2.3). Оскільки $n_e = 2$, то введемо два «плаваючих» защемлення у жорсткі вузли B та C .

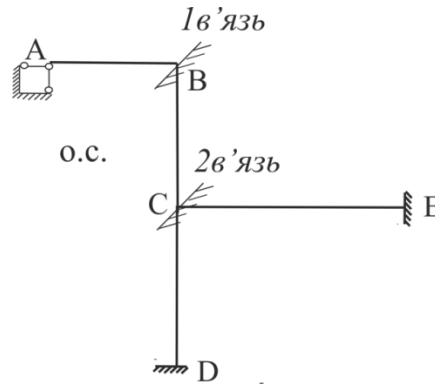


Рис. 2.3 Основна система методу переміщень

Таким чином, **основна система методу переміщень** (рис. 2.3) – це набір однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами, які не дають можливості кінцям балок мати кутові та лінійні переміщення.

Для отримання **еквівалентної системи** треба до основної системи додати задане навантаження та невідомі кутові переміщення (рис. 2.4).

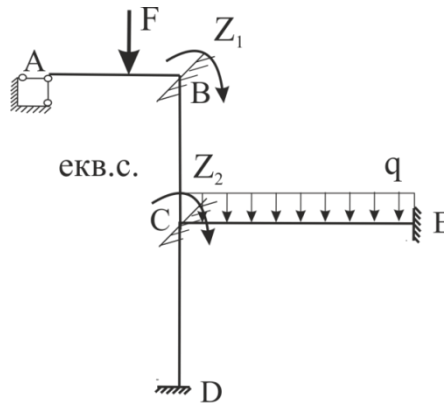


Рис. 2.4 Еквівалентна система методу переміщень

2.1.3. Складання системи канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень

У основі рівнянь методу переміщень лежить те, що реактивні зусилля за напрямками невідомих переміщень повинні дорівнюватися нулю, тобто :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0 \end{cases}$$

Тут r_{11} та r_{21} реактивні моменти (див. рис. 13,а) відповідно у першій та другій в'язях від повороту першої в'язі на кут $Z_1 = 1$; r_{12} та r_{22} – реактивні моменти відповідно у першій та другій в'язях від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$ (див. рис. 2.5,б). Вільні члени канонічних рівнянь (R_{1F} , R_{2F}) являють собою реакції в додаткових в'язях основної системи від дії зовнішнього навантаження.

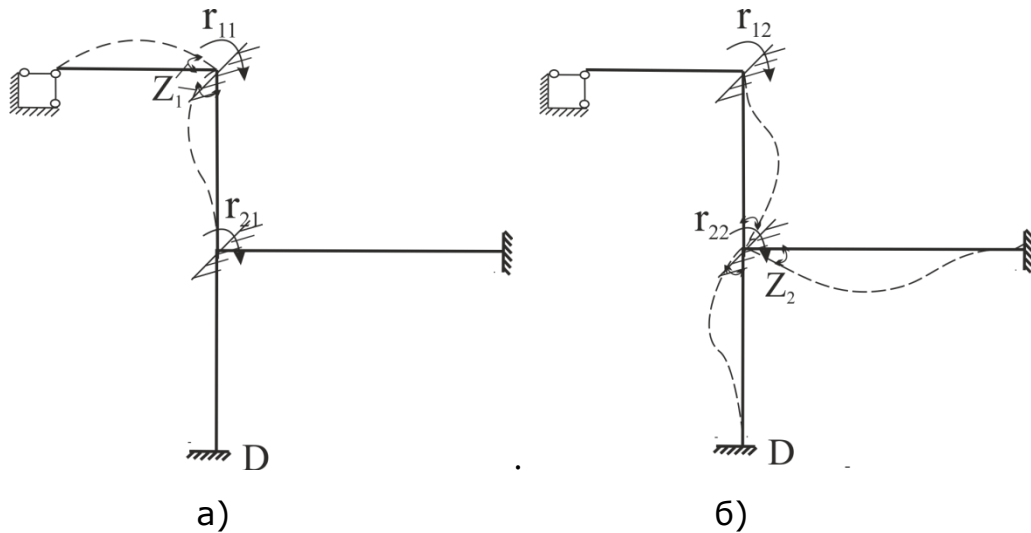


Рис. 2.5 Деформований стан рами та реакції у введених вузлах від кутових переміщень Z_1 та Z_2

2.1.4. Епюри згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого навантаження.

Для визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членах канонічних рівнянь необхідно побудувати епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень від одиничних переміщень та заданого навантаження.

Епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень від будь-якого навантаження являють собою сукупність епор згинальних моментів окремих балок, що складають цю систему, від переміщень їх опор та від дії зовнішнього навантаження.

Побудуємо **одиничну епюру згинальних моментів** $\overline{M}_1$ (рис. 2.6) від кута повороту $Z_1 = 1$ (див. рис. 2.4) на стрижнях, що збігаються у вузлі В та зазнають згин. Епюри згинальних моментів будуть розташовані тільки на означених стрижнях на розтягнутих волокнах. На рис. 2.6 пунктирними лініями показано зігнуті осі стрижнів. У таблиці 1 (див. додаток 1) відшукуємо розрахункові схеми відповідних балок й за відповідними формулами визначаємо ординати епор згинальних моментів. Наприклад, на стрижні АВ (див. рис. 2.4) побудуємо епюру згинальних моментів як для балки з шарнірною опорою на одному кінці та з защемленням на другому - за даними схеми 6 з таблиці 1, а для стрижня ВС – як для балки з двома защемленими кінцями – за даними схеми 7 тієї ж таблиці.

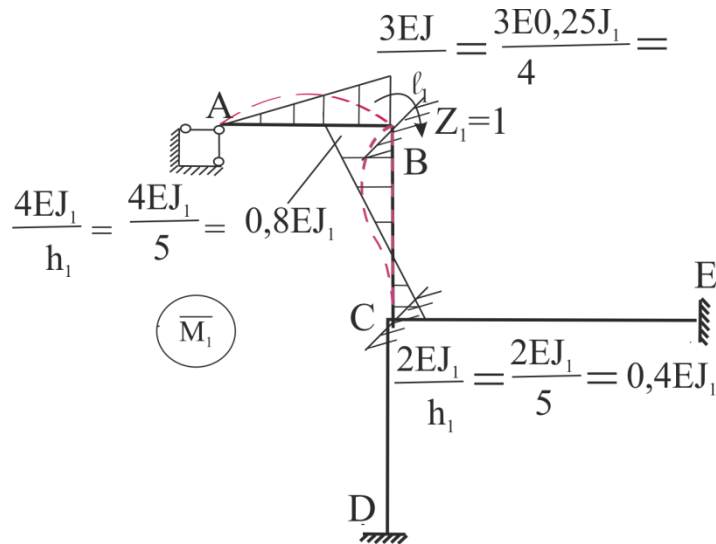


Рис. 2.6 Епюра згинальних моментів, побудована в основній системі методу переміщень від $Z_1=1$

Побудуємо **одиничну епюру згинальних моментів** $\overline{M}_2$ (рис. 2.7) від кута повороту $Z_2=1$ другої в'язі (див. рис. 2.4) на стрижнях, що збігаються у вузлі С та зазнають згин. Згинальні моменти будуть розташовані тільки на означених стрижнях. Епюри будемо будувати на розтягнутих волокнах. На рис. 2.7 пунктирними лініями показано зігнуті осі стрижнів. У таблиці 1 (див. додаток 1) відшукуємо розрахункові схеми відповідних балок й визначасмо ординати епюр згинальних моментів.

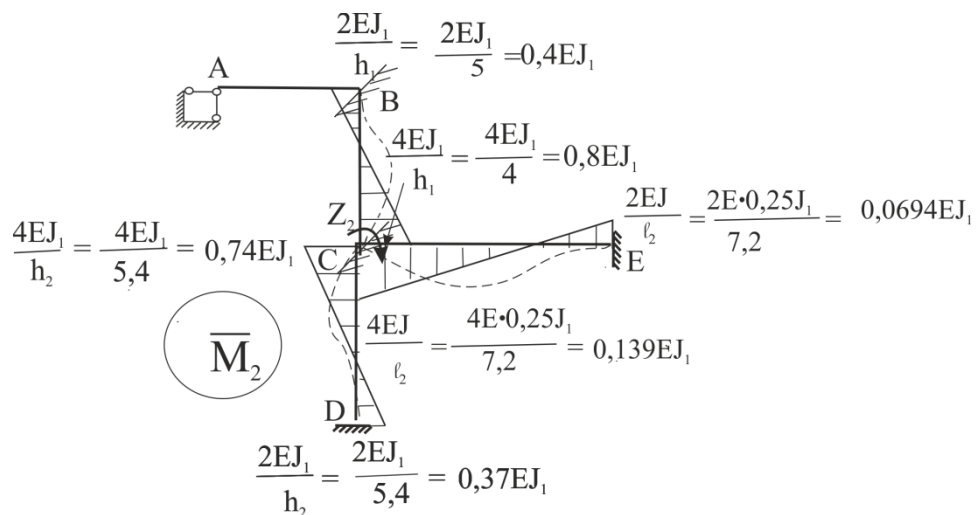


Рис. 2.7 Епюра згинальних моментів, побудована в основній системі методу переміщень від $Z_2=1$

Будуємо **епюру згинальних моментів** M_F (рис. 2.8) від заданого навантаження на тих стрижнях, які зазнають поперечне згинання. За допомогою таблиці 1 (див. додаток 1) визначаємо ординати епюр згинальних моментів

від зовнішнього навантаження (F та q) і будуємо епюру згинальних моментів на стрижні АВ і СЕ. Для визначення ординат згинаючих моментів від зосередженої сили F визначаємо параметри v та u : $v = \alpha = 0,75$, $u = 1 - \alpha = 0,25$.

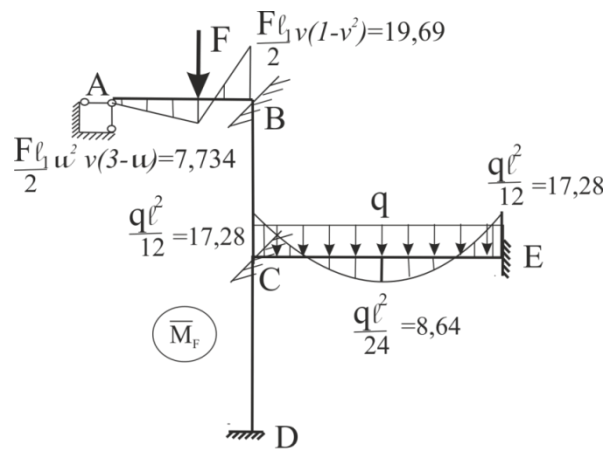


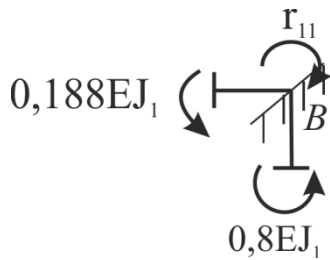
Рис. 2.8 Епюра згинальних моментів, побудована в основній системі методу переміщень від зовнішнього навантаження

2.1.5. Визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь статичним способом.

Для визначення реактивних моментів у «плаваючих» затисненнях по черзі на епюрах згинальних моментів відповідних одиничних або вантажного станів відокремлюємо вузли в які введені в'язі. До відокремленого вузла прикладаємо невідомий реактивний момент, напрямок якого співпадає з напрямком додатного кутового переміщення, а також згинальні моменти, які діють в перерізах стрижнів. Складаємо рівняння рівноваги відокремленого вузла $\sum M = 0$ і визначаємо потрібний коефіцієнт.

Коефіцієнти при невідомих та вільний член з першого рівняння системи канонічних рівнянь обчислюємо як реактивні моменти у першій в'язі від одиничних кутових переміщень Z_1, Z_2 і зовнішнього навантаження (F та q).

Коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент у першій в'язі від повороту цієї в'язі на кут $Z_1 = 1$. Відокремлюємо вузол B (рис. 2.9) з епюри $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.6) і складаємо рівняння його рівноваги з урахуванням згинальних моментів, у перерізах стрижнів які мають місце в даному вузлі:

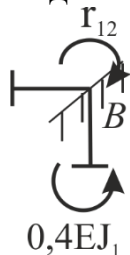


$$\sum M_B = 0: r_{11} - 0,8EJ_1 - 0,188EJ_1 = 0$$

$$r_{11} = 0,8EJ_1 + 0,188EJ_1 = 0,988EJ_1$$

Рис. 2.9 Визначення реакції r_{11}

Коефіцієнт r_{12} – це реактивний момент у першій в'язі від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$. Виокремлюємо вузол B (рис. 2.10) з епюри $\overline{M}_2$ (див. рис. 2.7) і складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum M_B = 0: r_{12} - 0,4EJ_1 = 0$$

$$r_{12} = 0,4EJ_1$$

Рис. 2.10 Визначення реакції r_{12}

Вільний член R_{1F} – це реактивний момент у першій в'язі від зовнішнього навантаження.

Відокремлюємо вузол B (рис. 2.11) на епюрі зовнішнього навантаження M_F (див. рис. 2.8) і складаємо рівняння рівноваги:



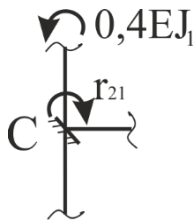
$$\sum M = 0: R_{1F} - 19,69 = 0$$

$$R_{1F} = 19,69$$

Рис. 2.11 Визначення реакції R_{1F}

Коефіцієнти при невідомих та вільний член другого рівняння системи канонічних рівнянь обчислюємо як реактивні моменти у другій в'язі від одиничних кутових переміщень Z_1, Z_2 і зовнішнього навантаження (F та q).

Коефіцієнт r_{21} – це реактивний момент у другій в'язі від повороту першої в'язі на кут $Z_1 = 1$. Відокремлюємо вузол C (рис. 2.12) з епюри $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.6) і складаємо рівняння його рівноваги:

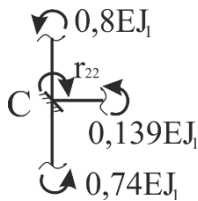


$$\sum M = 0: r_{21} - 0,4EJ_1 = 0$$

$$r_{21} = 0,4EJ_1$$

Рис. 2.12 Визначення реакції r_{21}

Коефіцієнт r_{22} – це реактивний момент у другій в'язі від повороту цієї в'язі на кут $Z_2 = 1$. Відокремлюємо вузол C (рис. 2.13) з епюри $\overline{M}_2$ (див. рис. 2.7) і складаємо рівняння його рівноваги:



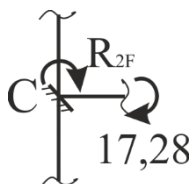
$$\sum M = 0: r_{22} - 0,8EJ_1 - 0,74EJ_1 - 0,139EJ_1 = 0$$

$$r_{22} = 0,8EJ_1 + 0,74EJ_1 + 0,139EJ_1 = 1,679EJ_1$$

Рис. 2.13 Визначення реакції r_{22}

Вільний член R_{2F} – це реактивний момент у другій в'язі від зовнішнього навантаження (рис. 2.14).

Відокремлюємо вузол C з вантажної епюри M_F (див. рис. 2.8), прикладаємо моменти (див. рис. 2.14), які діють у перерізі і складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum M = 0: R_{2F} + 17,28 = 0$$

$$R_{2F} = -17,28$$

Рис. 2.14 Визначення реакції R_{2F}

2.1.6. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів при невідомих переміщеннях і вільних членів канонічних рівнянь.

Для перевірки правильності обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь будуємо сумарну одиничну епюру згинальних моментів $\overline{M}_S$ від одночасної дії всіх невідомих переміщень. Епюру $\overline{M}_S$ (рис. 2.15) будуємо, як алгебраїчну суму ординат одиничних епюр згинальних моментів $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$.

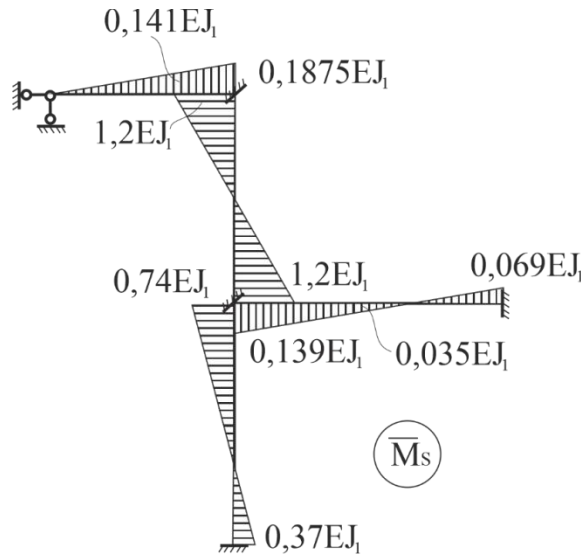


Рис. 2.15 Сумарна одинична епюра згинальних моментів $\overline{M}_s$

Універсальна перевірка одиничних коефіцієнтів системи канонічних рівнянь при невідомих переміщеннях полягає в тому, що сума всіх одиничних коефіцієнтів дорівнює результату перемноження r_{ss} сумарної одиничної епюри на ту ж сумарну одиничну епюру:

$$r_{ss} = \sum_{\ell} \int \frac{\overline{M}_s \times \overline{M}_s}{EJ} dx = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}.$$

За правилом Верещагіна перемножуємо епюри згинальних моментів, використовуючи правило трапеції (див. додаток 2) на стержні АВ:

$$\frac{1}{E \cdot 0,25J_1} \left(\frac{1}{2} 4 \cdot 0,1875EJ_1 \cdot \frac{2}{3} 0,1875EJ_1 \right) = 0,1875EJ_1$$

на стержні ВС:

$$\frac{5}{6EJ_1} (2 \cdot 1,2EJ_1 \cdot 1,2EJ_1 + 2 \cdot 1,2EJ_1 \cdot 1,2EJ_1 - 1,2EJ_1 \cdot 1,2EJ_1 - 1,2EJ_1 \cdot 1,2EJ_1) = 2,4EJ_1$$

на стержні CD:

$$\frac{5,4}{6EJ_1} (2 \cdot 0,74EJ_1 \cdot 0,74EJ_1 + 2 \cdot 0,37EJ_1 \cdot 0,37EJ_1 - 0,74EJ_1 \cdot 0,37EJ_1 - 0,74EJ_1 \cdot 0,37EJ_1) = 0,739EJ_1$$

на стержні CE:

$$\frac{7,2}{6E \cdot 0,25J_1} (2 \cdot 0,139EJ_1 \cdot 0,139EJ_1 + 2 \cdot 0,069EJ_1 \cdot 0,069EJ_1 - 0,139EJ_1 \cdot 0,069EJ_1 - 0,139EJ_1 \cdot 0,069EJ_1) = 0,142EJ_1$$

$$r_{ss} = 0,1875EJ_1 + 2,4EJ_1 + 0,142EJ_1 + 0,739EJ_1 = 3,47EJ_1$$

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = (0,9875 + 0,4 + 0,4 + 1,679)EJ_1 = 3,47EJ_1$$

Перевірка вільних членів (R_{1F}, R_{2F}) канонічних рівнянь полягає в тому, що сума вільних членів дорівнює значенню, але з протилежним знаком результату Δ_{SF} перемноження сумарної одиничної епюри $\overline{M}_S$ (див. рис. 2.15) на вантажну епюру, яка побудована в основній системі методу сил M_F^c . Тобто:

$$\Delta_{SF} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_S \times M_F^c}{EJ} dx = -(R_{1F} + R_{2F}).$$

Основна система методу сил - це статично визначувана рама, яку отримують із заданої рами шляхом відкидання зайвих в'язей або введенням додаткових шарнірів. Для заданої рами основну систему методу сил краще отримати шляхом введення додаткових простих шарнірів. Їх кількість буде дорівнювати ступені статичної невизначеності вихідної рами. Ступень статичної невизначеності за формулою: $n = c_0 - m - 3$, де c_0 - кількість опорних реакцій у в'язях вихідної рами (див. рис. 1.2), m - кількість простих шарнірів у вихідній рамі.

Для заданої рами $c_0 = 8$, $m = 0$, тоді $n = c_0 - m - 3 = 8 - 0 - 3 = 5$.

Додаткові прості шарніри введемо спочатку у жорсткі вузли (В та С), а потім останню кількість - у жорсткі защемлення (D та С).

Основна система методу сил, яка отримана таким чином наведена на рис. 2.16, а.

До основної системи методу сил прикладаємо задане навантаження, визначаємо опорні реакції та будуємо епюру згинальних моментів.

Визначення опорних реакцій:

$$\begin{aligned} \sum M_B^{\text{ліворуч}} &= Y_A \cdot 4 - F \cdot 1 = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{F \cdot 1}{4} = \frac{30 \cdot 1}{4} = 7,5 \text{ кН} \\ \sum M_C^{\text{праворуч}} &= Y_E \cdot 7,2 - q \cdot 7,2 \cdot \frac{7,2}{2} = 0 \Rightarrow Y_D = \frac{q \cdot 7,2 \cdot 3,6}{7,2} = \frac{4 \cdot 7,2 \cdot 3,6}{7,2} = 14,4 \text{ кН} \\ \sum M_C^{\text{знизу}} &= X_C \cdot 5,4 = 0 \Rightarrow X_C = 0 \\ \sum M_C^{\text{зверху}} &= X_A \cdot 5 + Y_A \cdot 4 - F \cdot 1 = 0 \Rightarrow X_A = \frac{F \cdot 1 - Y_A \cdot 4}{5} = \frac{30 \cdot 1 - 7,5 \cdot 4}{5} = 0 \\ \sum F_X &= X_A + X_D + X_E = 0 \Rightarrow X_E = -(X_A + X_D) = 0 \\ \sum F_Y &= -Y_A + F - Y_E + q \cdot 7,2 - Y_D = 0 \Rightarrow Y_D = -Y_A + F - Y_E + 4 \cdot 7,2 = \\ &= -7,5 + 30 - 14,4 + 28,8 = 36,9 \text{ кН} \end{aligned}$$

Значення згинальних моментів під прикладеною силою F та посередині стрижня з розподіленням навантаження визначено за формулами, які наведені

на рис. 2.16, б. Епюра згинальних моментів від заданого навантаження, яка побудована в основній системі методу сил, наведена на рис. 2.16, б.

При перемноженні епюр згинальних моментів $\overline{M}_S$ (див. рис. 2.15) на M_F^c (див. рис. 2.16, б), які розташовані на стрижні АВ, їх слід розбити на дві ділянки: одна довжиною 3 метра, друга – 1 метр.

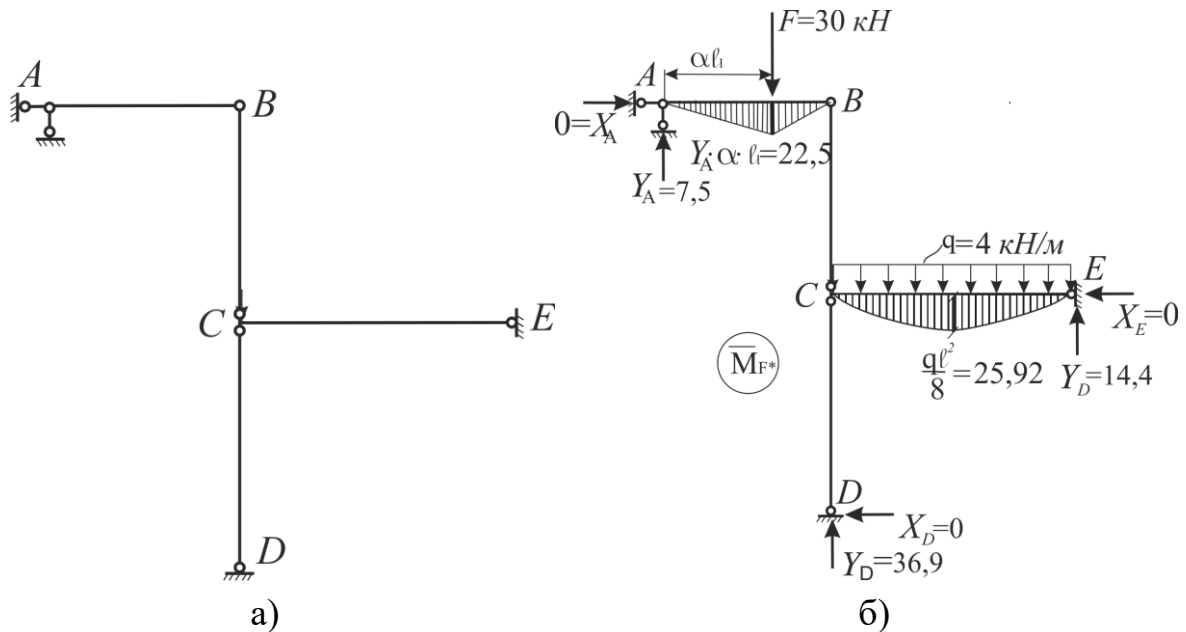


Рис. 2.16 Основна система методу сил та епюра згинальних моментів від зовнішнього навантаження

Перемножуємо епюри згинальних моментів:

на стрижні АВ:

1 ділянка довжиною 3 метри:

$$-\frac{3}{E \cdot 0,25EJ_1} \left(\frac{1}{2} 3 \cdot 0,141EJ_1 \cdot \frac{2}{3} 22,5 \right) = -12,69$$

2 ділянка довжиною 1 метр:

$$-\frac{1}{6E \cdot 0,25J_1} (2 \cdot 0,141EJ_1 \cdot 22,5 + 2 \cdot 0,188EJ_1 \cdot 0 + 0,188EJ_1 \cdot 22,5 + 0) = -7,05$$

на стрижні СЕ:

$$\frac{1}{E \cdot 0,25J_1} \left(\frac{2}{3} 7,2 \cdot 25,92 \cdot \frac{1}{2} (0,139EJ_1 - 0,0694EJ_1) \right) = 17,3$$

$$\Delta_{SF} = -12,69 - 7,05 + 17,3 = -2,44$$

$$R_{SF} = R_{1F} + R_{2F} = 19,69 - 17,28 = 2,41$$

Похибка складає 1,2%.

Перевірку коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень можна також виконати матричним способом, який буде розглянуто нижче.

2.1.7. Розв'язання системи канонічних рівнянь

$$\begin{cases} 0,988EJ_1 \cdot Z_1 + 0,4EJ_1 \cdot Z_2 + 19,69 = 0 \\ 0,4EJ_1 \cdot Z_1 + 1,679EJ_1 \cdot Z_2 - 17,28 = 0 \end{cases}$$

Наведену систему рівнянь можна вирішити аналітично або за допомогою обчислювальних систем Mathcad чи Matlab. Якщо наведену систему канонічних рівнянь вирішують аналітично, то знайдені величини невідомих треба перевірити шляхом підстановки їх значень у вихідну систему рівнянь.

В нашому випадку невідомі знайдені за допомогою системи комп'ютерної алгебри Mathcad, яка належить до класу систем автоматизованого проектування:

$$Z_1 = -\frac{26,683}{EJ_1}; \quad Z_2 = \frac{16,648}{EJ_1}$$

Таким чином, розкрита кінематична невизначеність рами.

Від'ємне значення переміщення Z , означає, що кут повороту у вузлі B направлений у протилежному напрямку (проти годинникової стрілки).

2.1.8. Побудова остаточної епюри згинальних моментів

Отримавши реальні значення й реальний напрямок невідомих переміщень $Z_1 = -\frac{26,683}{EJ_1}; \quad Z_2 = \frac{16,648}{EJ_1}$, будемо **остаточну епюру згинальних моментів** з використанням методу суперпозиції, тобто як суму ординат згинальних моментів в характерних точках, які наведені на рис. 2.17, в основній системі методу переміщень від дії кожного із визначених переміщень окремо (рис.2.18 та 2.19) та епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження в основній системі методу переміщень (див. рис.2.8):

$$M_k = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + M_F$$

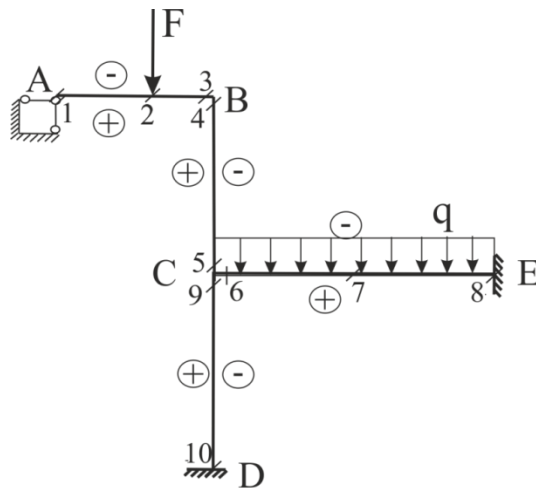


Рис. 2.17 Схема розташування характерних точок на рамі

В якості характерних точок обираємо перерізи на початку та на кінці кожного стрижня (точки: 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10) та дві додаткові точки: переріз, де прикладена зосереджена сила F (точка 2) та посередині стрижня, на який діє розподілене навантаження інтенсивністю q (точка 7) (див. рис.2.17). На рис.2.17 також наведено правило знаків для ординат згинальних моментів.

Епюри згинальних моментів, які наведені на рис.2.18 та рис.2.19 отримані шляхом множення відповідних ординат епюр $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.6) та $\overline{M}_2$ (див. рис. 2.7) на значення отриманих переміщень, Z_1 та Z_2 . При чому, якщо значення переміщення від'ємне, то вихідну епюру одиничних згинальних моментів спочатку слід «перевернути» відносно осей стрижнів, а потім вже збільшити значення ординат згинальних моментів (див. рис. 2.18).

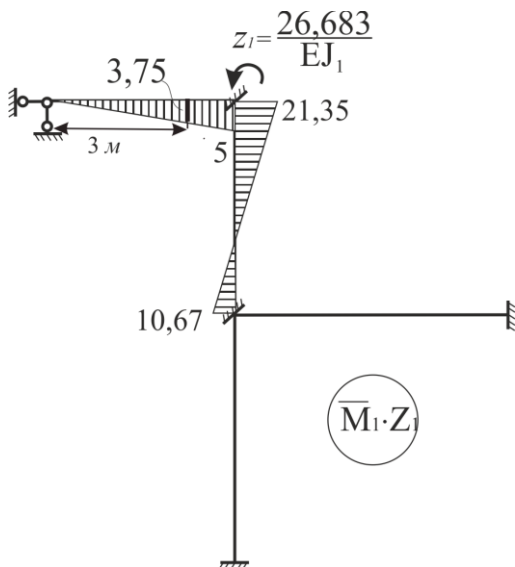


Рис. 2.18 Епюра згинальних моментів від реального значення Z_1

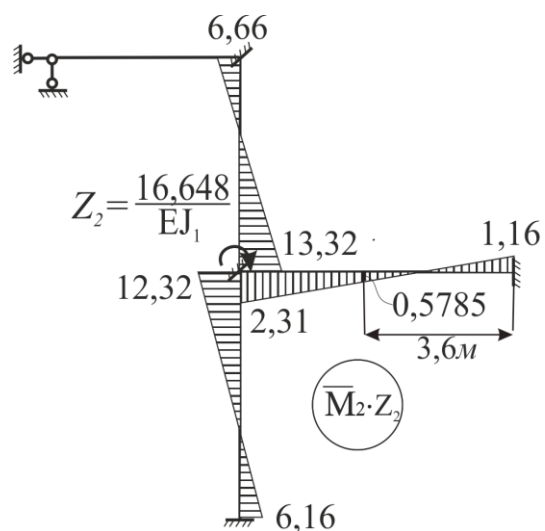


Рис. 2.19 Епюра згинальних моментів від реального значення Z_2

Нижче за наведеною методикою обчислюємо ординати згинальних моментів в характерних точках.

$$M^{(1)} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M^{(2)} = 3,75 + 0 + 7,73 = 11,49 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(3)} = 5,003 + 0 - 19,69 = -14,69 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(4)} = -21,35 + 6,66 + 0 = -14,69 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(5)} = 10,67 - 13,32 + 0 = -2,65 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(6)} = 0 + 2,31 - 17,28 = -14,97 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(7)} = 0 + 0,579 + 8,64 = 9,22 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(8)} = 0 - 1,16 - 17,28 = -18,44$$

$$M^{(9)} = 0 + 12,32 + 0 = +12,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(10)} = 0 - 6,16 + 0 = -6,16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

За отриманими ординатами з урахуванням знаків, які наведені на рис. 2.17, будуємо остаточну епюру згинальних моментів, яка зображена на рис. 2.20.

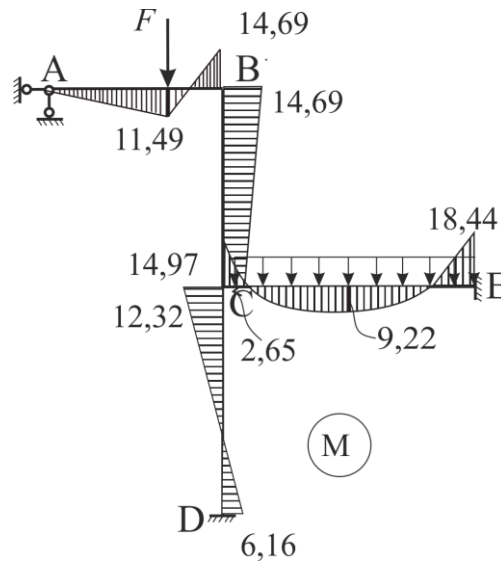


Рис. 2.20 Остаточна епюра згинальних моментів

2.1.9. Статична перевірка рівноваги вузлів рами

Для виконання статичної перевірки епюри M розглядаємо умову рівноваги вузлів B та C (див. рис.. 2.21,. 2.22)

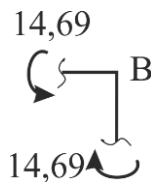


Рис. 2.21

$$\sum M_B = 0: 14,69 - 14,69 = 0$$

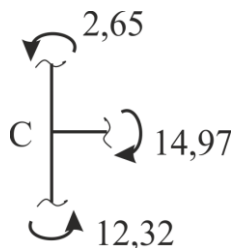


Рис. 2.22

$$\sum M_C = 0: 2,65 - 14,97 + 12,32 = 0$$

2.1.10. Кінематична (деформаційна) перевірка остаточної епюри згинальних моментів

Суть цієї перевірки полягає в тому, що переміщення за напрямком відкинутої в'язі (при побудові основної системи методу сил) повинно дорівнювати нулю.

Наприклад, для визначення кута повороту в точці Д треба до основної системи методу сил, яку отримали вище (див. рис. 2.16, а), у вузлі Д прикласти одиничний момент. Знаходимо опорні реакції від одиничного навантаження та будуємо одиничну епюру згинальних моментів (див. рис. 2.23).

Знайдемо взаємне переміщення у вузлі Д шляхом перемноження епюри $\overline{M}_1^*$ та на остаточної епюрі згинальних моментів M :

$$\Delta_1 = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_1^* \times M}{EJ} dx$$

$$\sum M_C = 0: X_1 - X_D \cdot 5,4 = 0 \Rightarrow X_D = \frac{X_1}{5,4} = \frac{1}{5,4} = 0,185$$

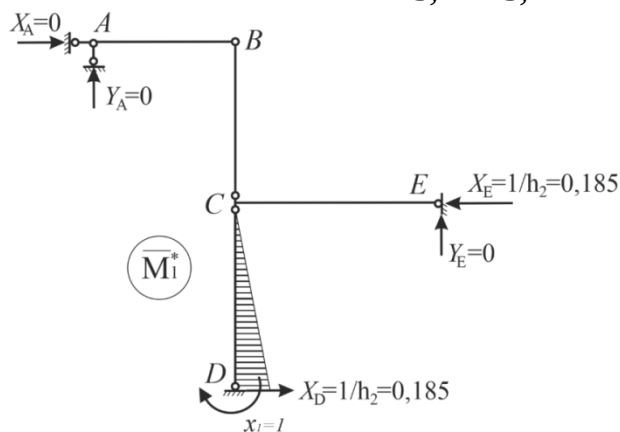


Рис. 2.23 Епюра згинальних моментів в основній системі методу сил від $X_1=1$

Епюри на ділянці CD перемножимо за формулою трапеції:

$$\frac{5,4}{6EJ_1} (2 \cdot 6,16 \cdot 1 - 12,32 \cdot 1) = 0$$

2.1.11. Побудова епюри поперечних зусиль

Застосовуючи диференціальну залежність між поперечною силою та згинальним моментом (теорема Шведлера-Жураввського) $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$ визначаємо значення поперечних сил на кожній ділянці рами.

Розіб'ємо раму на ділянки (рис. 2.24) та розглянемо остаточну епюру згинальних моментів (див. рис. 2.20).

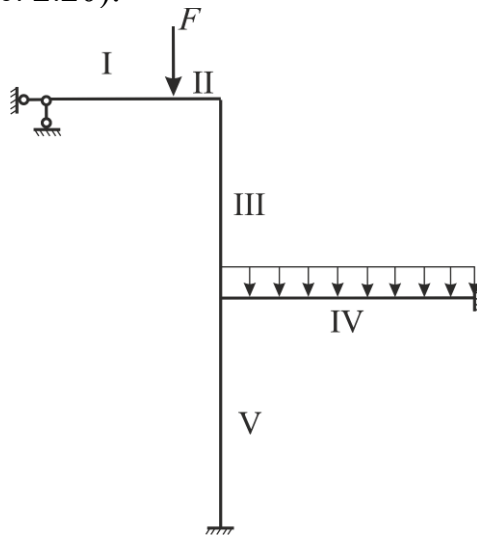


Рис. 2.24

Правило знаків для поперечних сил. Поперечна сила на ділянці вважається додатна, якщо для збігання осі стрижня з дотичною до епюри згинальних моментів треба цю вісь повертати за годинниковою стрілкою. Поворот осі треба виконувати таким чином, щоб кут повороту був меншим за 90° . Чисельне значення поперечної сили на тих ділянках, де епюра згинальних моментів є лінійною функцією (на епюрі пряма), дорівнює тангенсу кута нахилу цієї прямої до вісі балки.

$$Q_I = + \frac{11,49}{3} = 3,83 \text{ кН}$$

$$Q_{II} = - \frac{11,49 + 14,69}{1} = -26,18 \text{ кН}$$

$$Q_{III} = \frac{14,69 - 2,65}{5} = 2,4 \text{ кН}$$

$$Q_V = - \frac{12,32 + 6,16}{5,4} = -3,42 \text{ кН}$$

На ділянці IV епюра згинальних моментів має вигляд параболи, кут нахилу дотичної до якої змінюється вздовж осі. Тому для визначення значень поперечних сил треба відокремити IV ділянку від рами, покласти її на дві шарнірні опори, завантажити її заданим розподіленням навантаженням та опорними моментами, значення яких беремо з остаточної епюри згинальних моментів M , враховуючи їх напрямки.

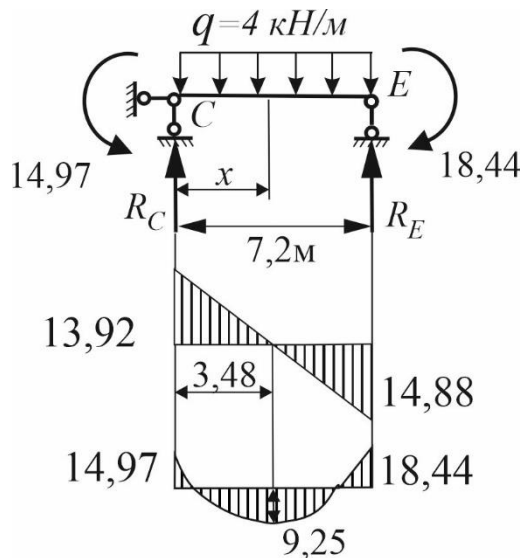


Рис. 2.25

Для наведеної балки (рис. 2.25) визначимо опорні реакції та побудуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів.

$$\sum M_C = 0: 14,97 - q \cdot 7,2 \cdot \frac{7,2}{2} + R_E \cdot 7,2 - 18,44 = 0$$

$$R_E = \frac{q \cdot 7,2 \cdot 3,6 - 14,97 + 18,44}{7,2} = 14,88 \text{ кН}$$

$$\sum M_E = 0: 14,97 + q \cdot 7,2 \cdot \frac{7,2}{2} - R_C \cdot 7,2 - 18,44 = 0$$

$$R_C = \frac{q \cdot 7,2 \cdot 3,6 + 14,97 - 18,44}{7,2} = 13,92 \text{ кН}$$

Складемо аналітичні вирази для визначення поперечної сили та згинального моменту в довільному перерізі балки та обчислимо їх значення на кінці інтервалу:

$$0 \leq x \leq 7,2$$

$$Q(x) = R_C - q \cdot x$$

$$Q(0) = R_C = 13,92 \text{ кН}$$

$$Q(7,2) = R_C - q \cdot 7,2 = 13,92 - 4 \cdot 7,2 = -14,88 \text{ кН}$$

$$M(x) = -14,97 + R_C \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M(0) = -14,97 \text{ кНм}$$

$$M(7,2) = -14,97 + R_C \cdot 7,2 - q \cdot 7,2 \cdot \frac{7,2}{2} = -14,97 + 13,92 \cdot 7,2 - 4 \cdot 7,2 \cdot \frac{7,2}{2} = -18,44$$

На наведеній епюрі $Q(x)$ (рис. 2.62) поперечна сила змінює знак, тому треба визначити екстремальне значення згинального моменту:

$$Q(x) = R_C - qx = 0$$

$$x = \frac{R_C}{q} = \frac{13,92}{4} = 3,48 \text{ м}$$

$$M(3,48) = -14,97 + R_C \cdot 3,48 - q \cdot 3,48 \cdot \frac{3,48}{2} =$$

$$= -14,97 + 13,92 \cdot 3,48 - 4 \cdot 3,48 \cdot \frac{3,48}{2} = 9,25 \text{ кНм}$$

Отримана епюра поперечних сил зображена на рис. 2.26.

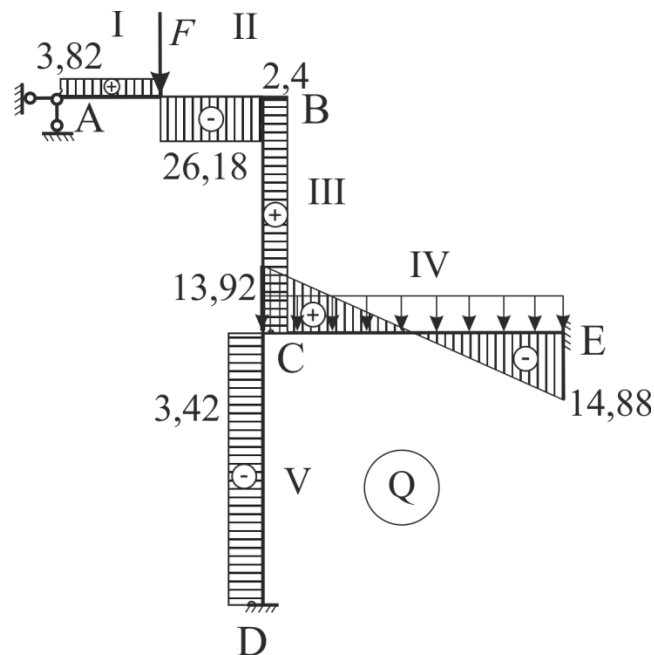
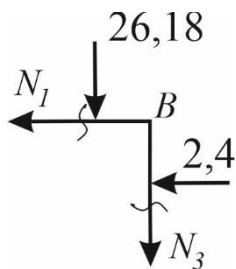


Рис. 2.26 Епюра поперечних сил, кН

2.1.12. Побудова епюри поздовжніх зусиль

За допомогою епюри поперечних сил Q визначаємо поздовжні сили в стрижнях із умов рівноваги вузлів рами, які послідовно (починаючи з вузла В) відокремлюємо з епюри поперечних сил Q . Кожний вузол розглядається в рівновазі при дії на вузол (рис. 2.27, 2.28) внутрішніх зусиль (поздовжніх N та поперечних сил Q). Для визначення напрямку поперечної сили в перерізі необхідно скористатися наступним правилом: якщо поперечна сила додатна, то вона повинна повертати відокремлений вузол за годинниковою стрілкою.

Приймаючи до уваги додатний напрямок невідомої поздовжньої сили в стрижні, яка спрямована від перерізу, із умови рівноваги вузла визначаємо значення поздовжньої сили в стрижні.



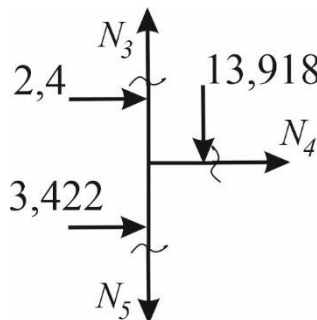
$$\sum F_x = 0: -2,4 - N_1 = 0$$

$$N_1 = -2,4 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: N_2 + 26,18 = 0$$

$$N_2 = -26,18 \text{ кН}$$

Рис. 2.27 Схеми дії внутрішніх зусиль Q та N у вузлі В, кН



$$\sum F_y = 0: N_4 + 13,92 - N_2 = 0$$

$$N_4 = N_2 - 13,92 = -26,18 - 13,92 = -40,1 \text{ кН}$$

$$\sum F_x = 0: N_3 + 2,4 + 3,42 = 0$$

$$N_3 = -(2,4 + 3,42) = -5,82 \text{ кН}$$

Рис. 2.28 Схеми дії внутрішніх зусиль Q та N у вузлі С, кН

Епюра поздовжніх сил N наведена на рис. 2.29.

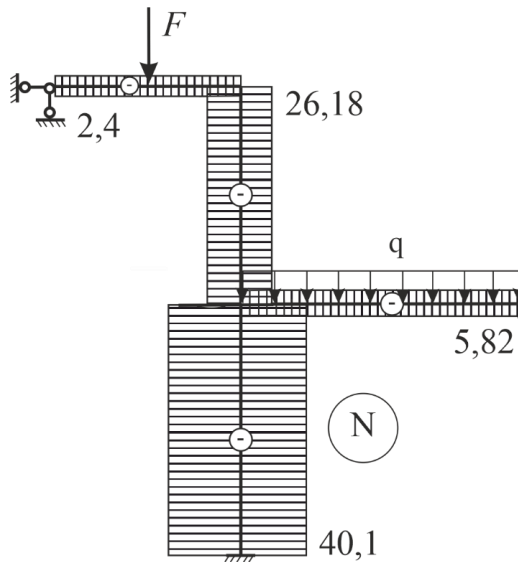
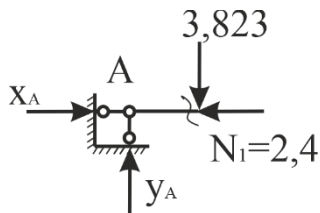


Рис. 2.29 Епюра поздовжніх сил

2.1.13. Визначення опорних реакцій. Перевірка умов рівноваги заданої рами

Визначаємо опорні реакції з умови рівноваги опорних вузлів рами через зусилля в перерізах, що одержані з епюр M , Q , N (рис. 2.20, 2.26, 2.29) з урахуванням їх знаків. При цьому напрямки опорних реакцій будуть спрямовані у протилежний бік.



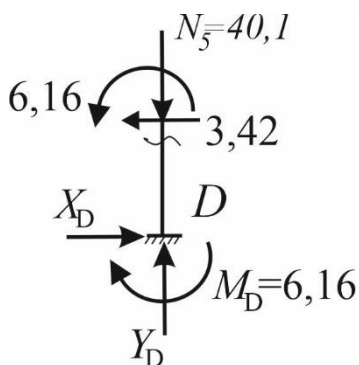
$$\sum F_y = 0: Y_A - 3,82 = 0$$

$$Y_A = 3,82 \text{ кН}$$

$$\sum F_x = 0: X_A - N_1 = 0$$

$$X_A = N_1 = 2,4 \text{ кН}$$

Рис. 2.30 Опорні реакції та внутрішні зусилля в районі опори А



$$\sum M_D = 0: 6,16 - M_D = 0$$

$$M_D = 6,16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum F_x = 0: X_D - 3,42 = 0$$

$$X_D = 3,42 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: Y_D - N_5 = 0$$

$$Y_D = N_5 = 40,1 \text{ кН}$$

Рис. 2.31 Опорні реакції та внутрішні зусилля в районі опори D

$$\sum M_E = 0: 18,44 - M_E = 0$$

$$M_E = 18,44$$

$$\sum F_x = 0: -X_E - N_3 = 0$$

$$X_E = -N_3 = 5,82 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: Y_E - 14,88 = 0$$

$$Y_E = 14,88 \text{ кН}$$

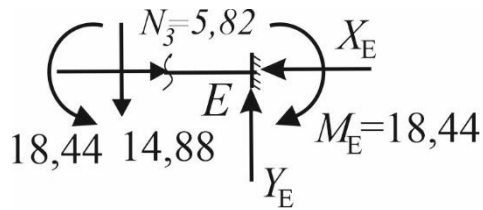


Рис. 2.32 Опорні реакції та внутрішні зусилля в районі опори E

Для виконання перевірки рівноваги всієї рами прикладаємо до рами зовнішнє навантаження та визначені опорні реакції (рис. 2.33).

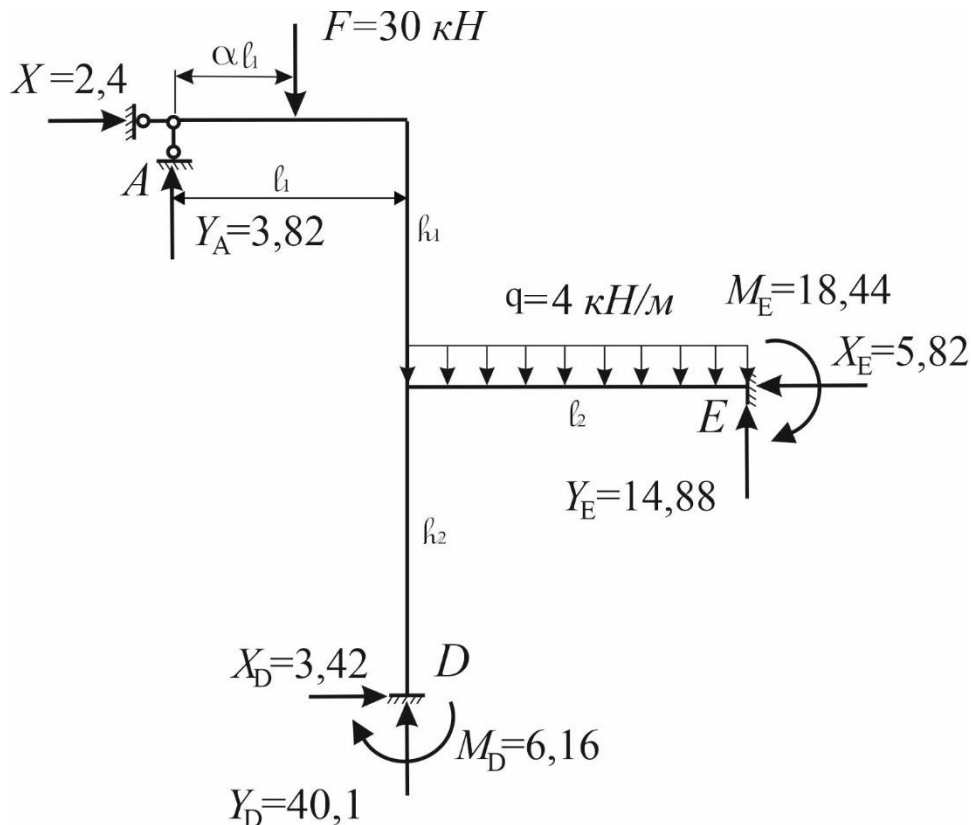


Рис. 2.33

Перевіряємо, чи задовольняються умови рівноваги:

$$\sum F_x = 0: X_A + X_D - X_E = 2,4 + 3,42 - 5,82 = 0$$

$$\sum F_y = 0: q \cdot \ell_2 + F - Y_A - Y_D - Y_E = 4 \cdot 7,2 + 30 - 3,82 - 40,1 - 14,88 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & F \cdot \alpha \cdot \ell_1 + M_D + M_E + X_E \cdot h_1 + q \cdot \ell_2 \cdot \left(\ell_1 + \frac{\ell_2}{2} \right) - \\ & - X_D \cdot (h_1 + h_2) - Y_D \cdot \ell_1 - Y_E \cdot (\ell_1 + \ell_2) = \\ = & 30 \cdot 3 + 6,16 + 18,44 + 5,85 \cdot 5 + 4 \cdot 7,2 \cdot \left(4 + \frac{7,2}{2} \right) - 3,42 \cdot (5 + 5,4) - 40,1 \cdot 4 - \\ & - 14,88 \cdot (4 + 7,2) = 362,58 - 362,62 = -0,04 \end{aligned}$$

Похибка складає : $\frac{0,04}{362,58} \cdot 100\% = 0,01\%$

2.2. Приклад 2.

Для рами, яка наведена на рис. 2.34, побудувати епюри M, Q, N:

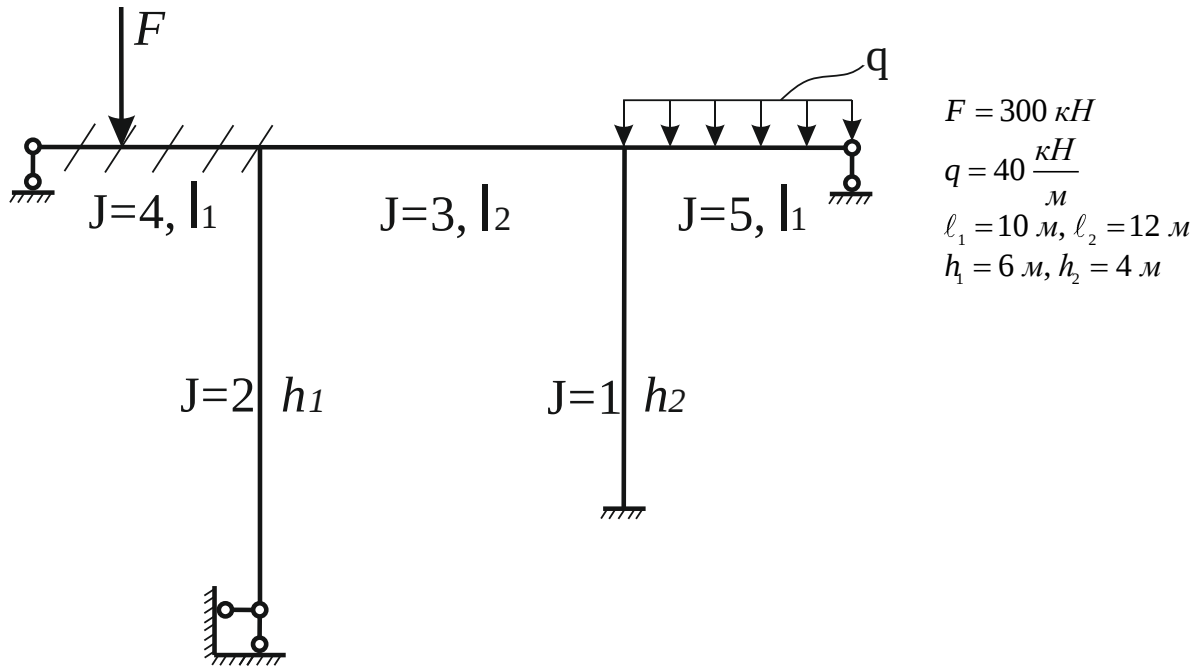


Рис. 2.34

Для вирішення задачі необхідно:

- Визначити кількість невідомих;
- Створити основну та еквівалентну системи методу переміщень;
- Скласти систему канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень;
- Побудувати в основній системі епюри згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого вантаження;
- Визначити коефіцієнти при невідомих та вільні члени системи канонічних рівнянь статичним способом. Виконати перевірку знайдених величин;
- Розв'язати систему канонічних рівнянь;
- Побудувати остаточну епюру згинальних моментів;
- Виконати статичну та кінематичну перевірку остаточної епюри згинальних моментів;
- Побудувати епюри поперечних та поздовжніх сил;

- Визначити опорні реакції й виконати загальну перевірку умов рівноваги заданої рами.

2.2.1. Визначення кількості невідомих.

Як вже було викладено вище, загальну кількість невідомих n визначимо за формулою: $n = n_{\theta} + n_{\lambda}$.

Кількість невідомих кутових переміщень n_{θ} (кутів повороту вузлів) дорівнює кількості жорстких вузлів. В нашому випадку, в наведеній рамі два жорстких вузла (вузол B та вузол C), тому $n_{\theta} = 2$.

Для визначення кількості незалежних лінійних переміщень створюємо шарнірну схему (рис. 2.35), шляхом введення шарнірів у всі жорсткі вузли (вузол B , вузол C) та жорсткі защемлення (точка F).

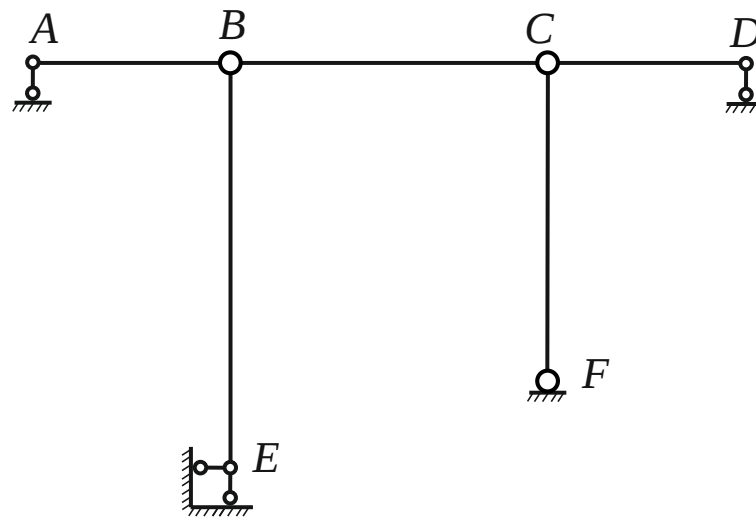


Рис. 2.35 Шарнірна схема рами

Примітка. Жорстке защемлення з введеним шарніром перетворюється у шарнірно-нерухому опору з двома опорними реакціями.

Для визначення кількості лінійних переміщень застосовуємо формулу $n_{\lambda} = 3 \cdot D - 2 \cdot III_0 - C_0$, де D - це кількість дисків (стрижнів) у шарнірній схемі, III_0 - кількість простих шарнірів, C_0 - кількість опорних реакцій.

Примітка. Якщо у вузлі збігається n стрижнів, то кількість простих шарнірів у цьому вузлі буде дорівнювати $(n - 1)$. Прості шарніри можна зображати на будь-яких стрижнях, які з'єднуються у вузлі.

Для схеми, яка зображена на рис. 2.35, $D = 5$, кількість простих шарнірів у вузлах $III = 4$, кількість опорних реакцій $C_0 = 6$.

$$n_{\lambda} = 3 \cdot D - 2 \cdot III_0 - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 6 = 1.$$

$$\text{Загальна кількість невідомих } n = n_{\theta} + n_{\lambda} = 2 + 1 = 3.$$

2.2.2. Побудова основної та еквівалентної системи методу переміщень.

Для отримання основної системи методу переміщень введемо додаткові в'язі, кількість яких дорівнює кількості невідомих переміщень ($n = 3$). Кількість додаткових «плаваючих» защемлень дорівнює кількості жорстких вузлів. Оскільки $n_g = 2$, то введемо два «плаваючих» защемлення у жорсткі вузли В (перша в'язь) та С (друга в'язь).

Кількість додаткових опорних стрижнів дорівнює кількості незалежних лінійних переміщень. Якщо $n_d = 1$, то введемо один опорний стрижень в перерізі D (третя в'язь), який перешкоджає лінійному горизонтальному переміщенню вузлів В та С.

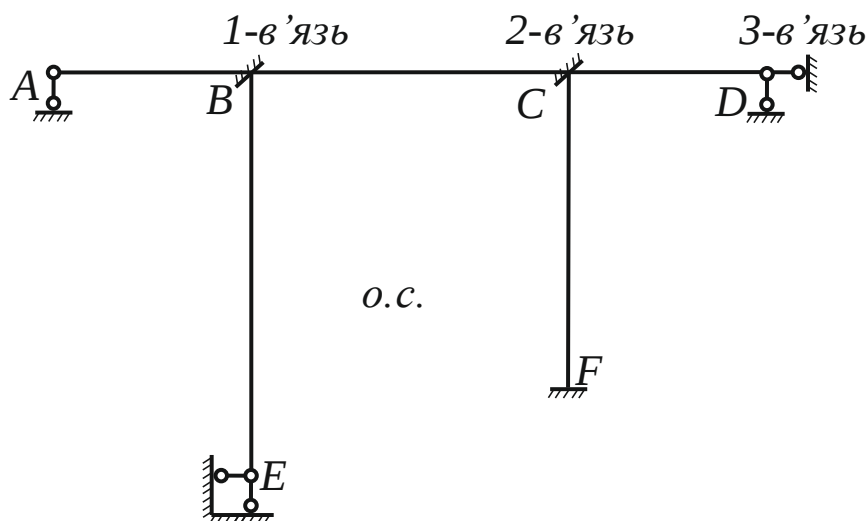


Рис. 2.36 Основна система методу переміщень

Таким чином, отримаємо **основну систему методу переміщень** (рис. 2.36) яка представляє собою набір однопрогонових статично невизначених балок постійної жорсткості з нерухожими опорами.

Для отримання **еквівалентної системи** треба до основної системи додати задане навантаження та невідомі кутові та лінійні переміщення.

Еквівалентна система для вихідної рами наведена на рис. 2.37.

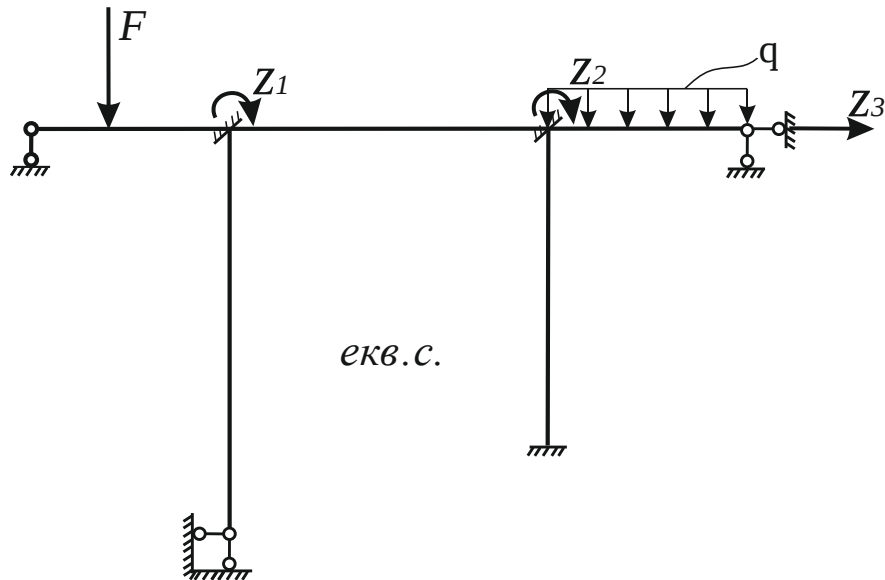


Рис. 2.37 Еквівалентна система

2.2.3. Складання системи канонічних рівнянь для визначення невідомих переміщень

Канонічні рівняння методу переміщень для заданої рами мають вигляд:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0 \end{cases}$$

Тут r_{11}, r_{21} – реактивні моменти відповідно у першій та другій в'язях та r_{31} реактивне зусилля у додатковому опорному стрижні від повороту першої в'язі на кут $Z_1 = 1$ (див. рис. 2.38, а); r_{12}, r_{22} – реактивні моменти відповідно у першій та другій в'язях та r_{32} – реактивне зусилля у додатковому опорному стрижні від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$ (див. рис. 2.38, б); r_{13}, r_{23} – реактивні моменти відповідно у першій та другій в'язях та r_{33} – реактивне зусилля у додатковому опорному стрижні від зміщення по горизонталі стрижня AD на величину $Z_3 = 1$ (див. рис. 2.38, в). Вільні члени канонічних рівнянь – R_{1F}, R_{2F} – являють собою реактивні моменти відповідно у першій та другій в'язях та R_{3F} – реактивне зусилля у додатковому опорному стрижні від дії зовнішнього навантаження.

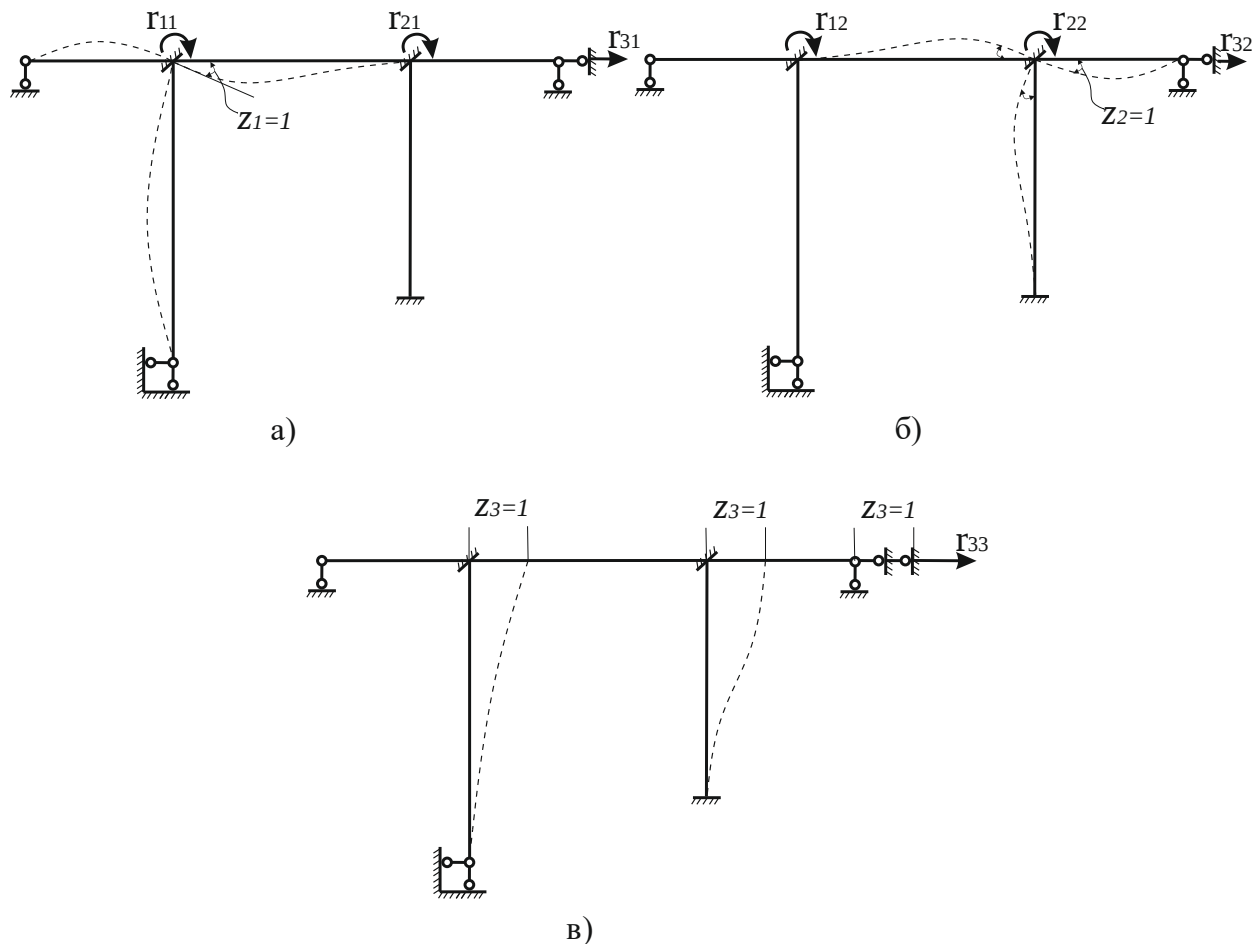


Рис. 2.38 Реакції у введених вузлах від $Z_1=1$, $Z_2=1$, $Z_3=1$

Сенс першого рівняння полягає в запереченні реактивного моменту у першому введеному «плаваючому» защемленні (перша в'язь), другого – в запереченні реактивного моменту у другому введеному «плаваючому» защемленні (друга в'язь), третього - у запереченні реактивного зусилля у введеному опорному стержні (третя в'язь), так як у вихідній рамі означені в'язі відсутні.

2.2.4. Побудова епюр згинальних моментів від одиничних переміщень і заданого навантаження.

Для визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членах канонічних рівнянь необхідно побудувати епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень від одиничних переміщень та заданого навантаження.

Епюри згинальних моментів від будь-якого навантаження основної системи методу переміщень являють собою сукупність епюр згинальних моментів окремих балок, що складають цю систему, від переміщень введених опор та від дії зовнішнього навантаження.

Побудуємо **одиничну епюру згинальних моментів** $\overline{M}_1$ (рис. 2.39) від кута повороту $Z_1 = 1$ першої в'язі (див. рис. 2.36) на стрижнях, що збігаються у вузлі В (див. рис. 2.34) та зазнають згин. Епюри згинальних моментів будуть розташовані тільки на означених стрижнях. Епюри будемо будувати на розтягнутих волокнах. На рис. 2.39 пунктирними лініями показано зігнуті осі стрижнів. У таблиці 1 (див. додаток 1) відшукуємо розрахункові схеми відповідних балок й за відповідними формулами визначаємо ординати епюр згинальних моментів. Наприклад, на стрижнях АВ та ВЕ (див. рис. 2.34) побудуємо епюру згинальних моментів як для балок з шарнірною опорою на одному кінці та з защемленням на другому – за даними схеми 5 з таблиці 1, а для стрижня ВС – як для балки з двома защемленими кінцями – за даними схеми 7 тієї ж таблиці.

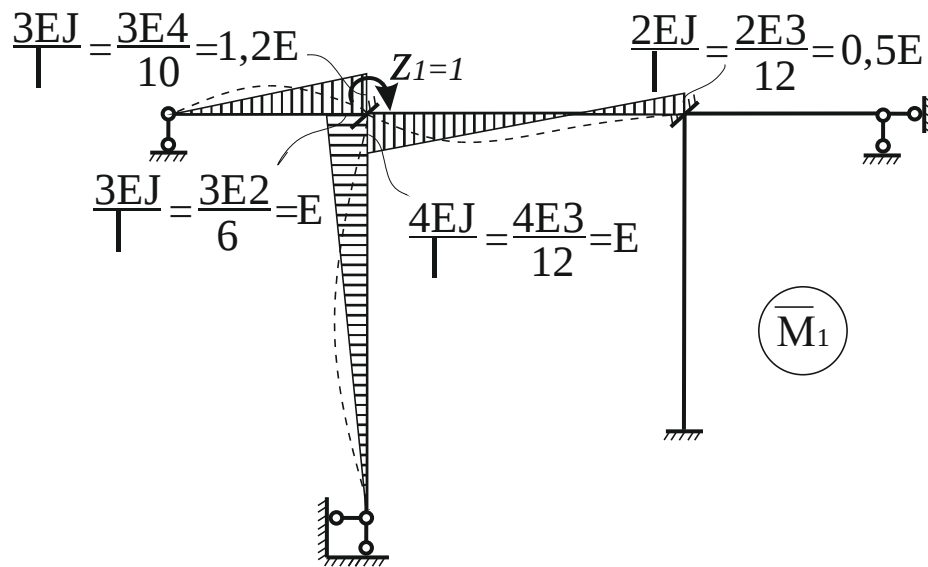


Рис. 2.39 Епюра згинальних моментів від $Z_1 = 1$

Побудуємо **одиничну епюру згинальних моментів** $\overline{M}_2$ (рис. 2.40) від кута повороту $Z_2 = 1$ другої в'язі (див. рис. 2.28) на стрижнях, що збігаються у вузлі С (див. рис. 2.34) та зазнають згин. Епюри згинальних моментів будуть розташовані тільки на означених стрижнях та будуються на розтягнутих волокнах. На рис. 2.40 пунктирними лініями показано зігнуті осі стрижнів. У таблиці 1 (див. додаток 1) відшукуємо розрахункові схеми відповідних балок й визначаємо ординати епюр згинальних моментів.

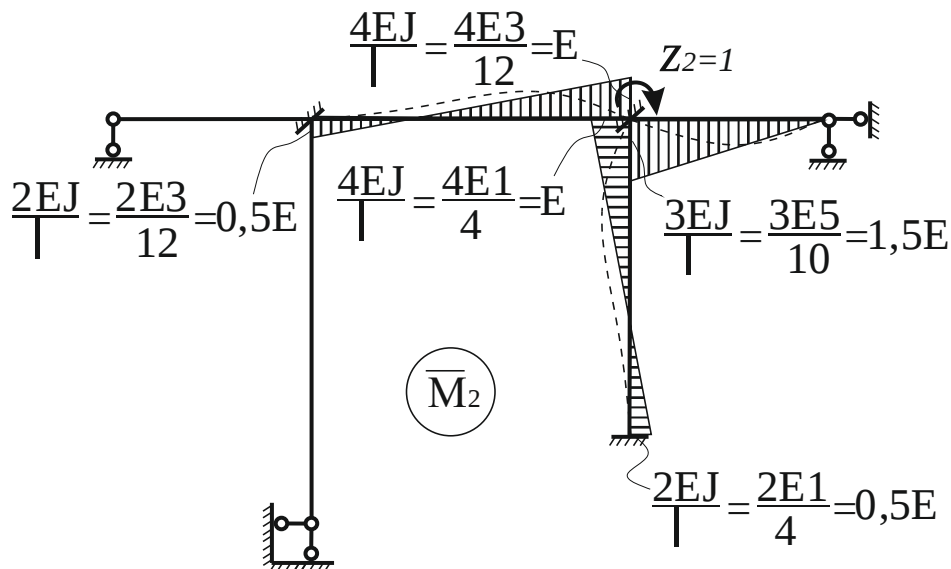


Рис. 2.40 Епюра згинальних моментів від $Z_2=1$

Побудуємо **одиничну епюру згинальних моментів** $\overline{M}_3$ (рис. 2.41) від лінійного переміщення $Z_3 = 1$ в горизонтальному напрямку. Якщо переміщується точка D , то переміщується в горизонтальному напрямі на ту ж величину і вузли A, B та C (див. рис. 2.38, в). При цьому згин будуть зазнавати тільки стрижні BE та CF (див. рис. 2.38, в). Визначаємо за допомогою таблиці 1 ординати епюр згинальних моментів від одиничного лінійного переміщення і будуємо епюри одиничних згинальних моментів на розтягнутих волокнах стрижнів BE (схема 6, табл. 1) та CF (схема 8, табл. 1) (див. рис. 2.38, в).

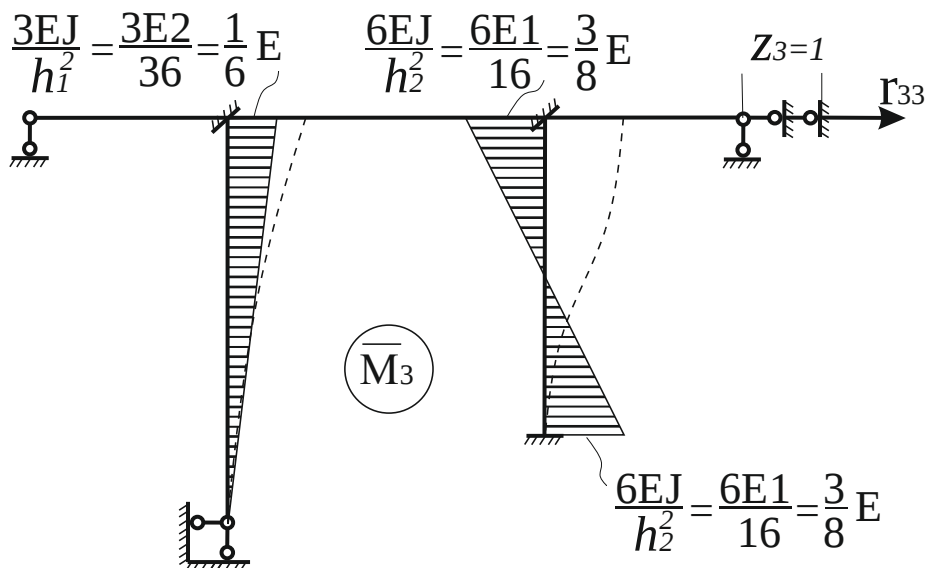


Рис. 2.41 Епюра згинальних моментів від $Z_3=1$

Будуємо **епюру згинальних моментів** M_F (рис. 2.42) від заданого навантаження на стрижнях AB і CD (див. рис. 2.42), які зазнають поперечного зги-

ну. За допомогою таблиці 1 (див. додаток)_визначаємо ординати епюр згинальних моментів від зовнішнього навантаження (F та q) і будуємо епюру згинальних моментів. Для визначення ординат згинаючих моментів від зосередженої сили F на стрижні АВ визначаємо параметри v та u :

$$u = \frac{u\ell}{\ell} = \frac{6}{10} = 0,6, \quad v = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Значення згинального моменту в защемленні від дії сили F визначаємо за формулою:

$$M_B = \frac{F\ell}{2}v(1-v^2) = \frac{300 \cdot 10}{2}0,4(1-0,4^2) = 504 \text{ Кнм}$$

(схема1 – з таблиці 1).

Значення згинального моменту під силою F визначаємо за формулою

$$M_{C1} = \frac{F\ell}{2}u^2v(3-u) = \frac{300 \cdot 10}{2}0,6^2 \cdot 0,4(3-0,6) = 518,4 \text{ Кнм}$$

(схема1 – з таблиці 1).

Значення згинальних моментів від дії розподіленого навантаження визначаємо за даними схеми 3 з таблиці 1.

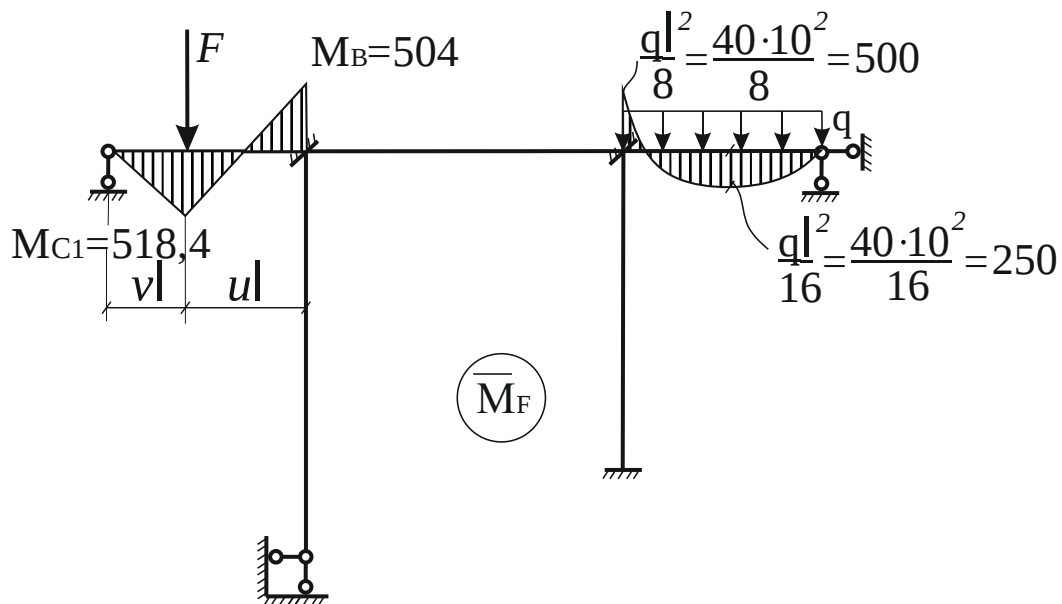


Рис. 2.42 Епюра згинальних моментів від зовнішнього навантаження, кН

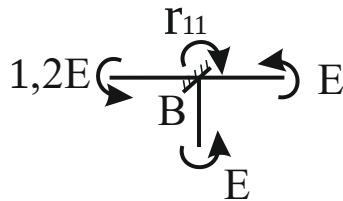
2.2.5. Визначення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь статичним способом.

Для визначення реактивних моментів у «плаваючих» защемлених по черзі відокремлюємо вузли з епюр згинальних моментів відповідних одиничних або вантажного станів. До відокремленого вузла прикладаємо невідомий реактивний момент, напрямок якого співпадає з напрямком додатного кутового переміщення, а також згинальні моменти, які діють в перерізах стриж-

нів. Складаємо рівняння рівноваги відокремленого вузла $\sum M = 0$ і визначаємо потрібний коефіцієнт.

Коефіцієнти при невідомих r_{11}, r_{12}, r_{13} та вільний член R_{1F} з першого рівняння системи канонічних рівнянь обчислюємо як реактивні моменти у першій в'язі від одиничних переміщень Z_1, Z_2, Z_3 і зовнішнього навантаження (F та q).

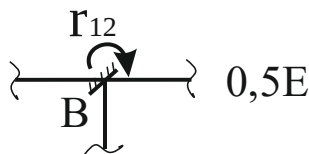
Коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент у першій в'язі від повороту цієї в'язі на кут $Z_1 = 1$. Відокремлюємо вузол B (див. рис. 2.43) з епюри $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.39) і складаємо рівняння його рівноваги:



$$\begin{aligned}\sum M = 0: r_{11} - 1,2E - E - E &= 0 \\ r_{11} &= 1,2E + E + E = 3,2E\end{aligned}$$

Рис. 2.43 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі B від $Z_1 = 1$

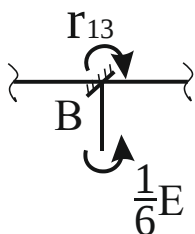
Коефіцієнт r_{12} – це реактивний момент у першій в'язі від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$. Відокремлюємо вузол B (рис. 2.44) з епюри $\overline{M}_2$ (див. рис. 2.40) і складаємо рівняння його рівноваги:



$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: r_{12} - 0,5E &= 0 \\ r_{12} &= 0,5E\end{aligned}$$

Рис. 2.44 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі B від $Z_2 = 1$

Коефіцієнт r_{13} – це реактивний момент у першій в'язі від горизонтального зміщення додаткового опорного стрижня на величину $Z_3 = 1$. Відокремлюємо вузол B (див. рис. 2.45) з епюри $\overline{M}_3$ (див. рис. 2.41) і складаємо рівняння його рівноваги:

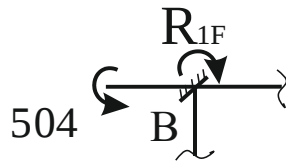


$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: r_{13} - \frac{1}{6}E &= 0 \\ r_{13} &= \frac{1}{6}E\end{aligned}$$

Рис. 2.45 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі B від $Z_3 = 1$

Вільний член R_{1F} – це реактивний момент у першій в'язі від зовнішнього навантаження.

Відокремлюємо вузол B (див. рис. 2.46) з вантажної епюри M_F (див. рис. 2.42) і складаємо рівняння рівноваги:



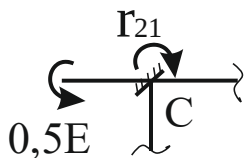
$$\sum M = 0 : R_{1F} - 504 = 0$$

$$R_{1F} = 504$$

Рис. 2.46 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі B від зовнішнього навантаження

Коефіцієнти при невідомих r_{21}, r_{22}, r_{23} та вільний член R_{2F} з другого рівняння системи канонічних рівнянь обчислюємо як реактивні моменти у другій в'язі від одиничних переміщень Z_1, Z_2, Z_3 і зовнішнього навантаження (F та q).

Коефіцієнт r_{21} – це реактивний момент у другій в'язі від повороту першої в'язі на кут $Z_1 = 1$. Відокремлюємо вузол C (див. рис. 2.47) з епюри $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.39) і складаємо рівняння його рівноваги:

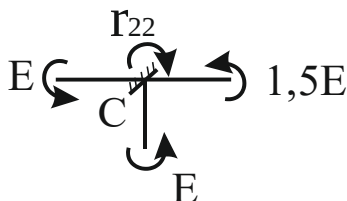


$$\sum M = 0 : r_{21} - 0,5E = 0$$

$$r_{21} = 0,5E$$

Рис. 2.47 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі C від $Z_1 = 1$

Коефіцієнт r_{22} – це реактивний момент у другій в'язі від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$. Відокремлюємо вузол C (див. рис. 1.6) з епюри $\overline{M}_2$ (див. рис. 2.40) і складаємо рівняння його рівноваги з урахуванням діючих згинальних моментів:

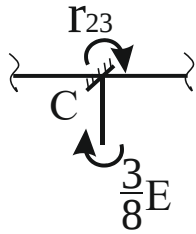


$$\sum M = 0 : r_{22} - 1,5E - E - E = 0$$

$$r_{22} = 1,5E + E + E = 3,5E$$

Рис. 2.48 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі C від $Z_2 = 1$

Коефіцієнт r_{23} – це реактивний момент у другій в'язі від горизонтального зміщення додаткового опорного стрижня на величину $Z_3 = 1$. Відокремлюємо вузол C (див. рис. 2.49) з епюри $\overline{M}_3$ (див. рис. 2.41) і складаємо рівняння його рівноваги з урахуванням згинальних моментів у перерізах стрижнів:



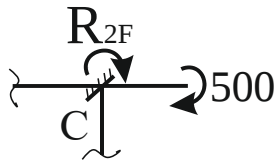
$$\sum M_B = 0: r_{23} + \frac{3}{8}E = 0$$

$$r_{23} = -\frac{3}{8}E$$

Рис. 2.49 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі С від $Z_3=1$

Вільний член R_{2F} – це реактивний момент у другій в'язі від зовнішнього навантаження.

Відокремлюємо вузол С (див. рис. 2.50) з вантажної епюри M_F (див. рис. 2.42) і складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum M = 0: R_{2F} + 500 = 0$$

$$R_{2F} = -500$$

Рис. 2.50 Схема дії внутрішніх зусиль у вузлі С від зовнішнього навантаження

Коефіцієнти при невідомих r_{31}, r_{32}, r_{33} та вільний член R_{3F} з третього рівняння системи канонічних рівнянь являють собою силові реакції в додатковому опорному стрижні, введеному при створенні основної системи методу переміщень, від одиничних переміщень Z_1, Z_2, Z_3 і зовнішнього навантаження (F та q).

Для обчислення цих величини необхідно розглянути умови рівноваги відокремленого перетином фрагмента основної системи.

Перетин повинен відсікати доданий опорний стрижень, в якому обчислюється реакція, та перетинати усі стрижні основної системи, які зазнають згин від примусового поступального переміщення цього доданого стрижня.

До відокремленого фрагмента слід прикласти всі сили, що діють на нього, а саме, зусилля в перерізах стрижнів та реакцію у доданому опорному стрижні. Поперечні сили в перерізах знаходять на підставі теореми Шведлера-

Журавського: $Q = \frac{dM}{dx}$.

Правило знаків для поперечних сил. Поперечна сила на ділянці вважається додатна, якщо для збігання осі стрижня з дотичною до епюри згинальних моментів треба цю вісь повертати за годинниковою стрілкою. Поворот осі треба виконувати таким чином, щоб кут повороту був меншим за 90° . Чисельне значення поперечної сили дорівнює тангенсу цього кута.

Реакцію, що визначається в доданому опорному стрижні спрямовуємо за напрямком додатного лінійного переміщення. Величини реакції визначають-

ся з рівняння рівноваги у вигляді суми проєкцій сил на горизонтальну вісь (рис. 2.51, 2.52).

Коефіцієнт r_{31} – це реакція у доданому опорному стрижні (3-я в'язь) від повороту першої в'язі на кут $Z_1 = 1$. Для його визначення виокремлюємо перетином фрагмент рами з епюри $\overline{M}_1$ (див. рис. 2.39).

До цього фрагмента прикладаємо шукану реакцію доданого опорного стрижня r_{31} у напрямку, що збігається з напрямом невідомого лінійного переміщення Z_3 та поперечні сили в перерізах стрижнях, які зазнають згин (рис. 2.51):

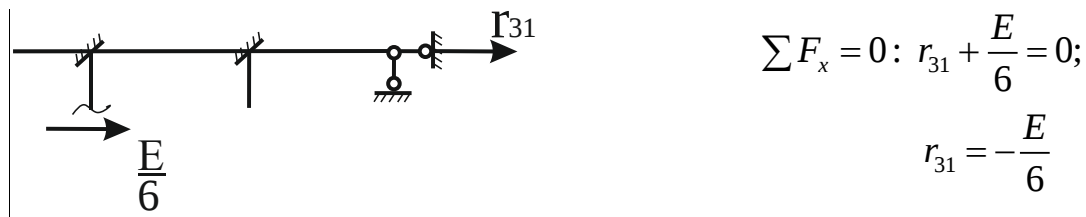


Рис. 2.51 Схема дії внутрішніх зусиль на верхню частину рами при $Z_1 = 1$

Коефіцієнт r_{32} – це реакція у доданому опорному стрижні від повороту другої в'язі на кут $Z_2 = 1$. Для його визначення перетином, виокремлюємо фрагмент рами з епюри $\overline{M}_2$ (рис. 2.40).

До цього фрагмента прикладаємо реакцію в доданому опорному стрижні r_{32} у напрямку, що збігається з напрямом невідомого переміщення Z_3 та поперечні сили в перерізах стрижнях, які зазнають згин (рис. 2.52):

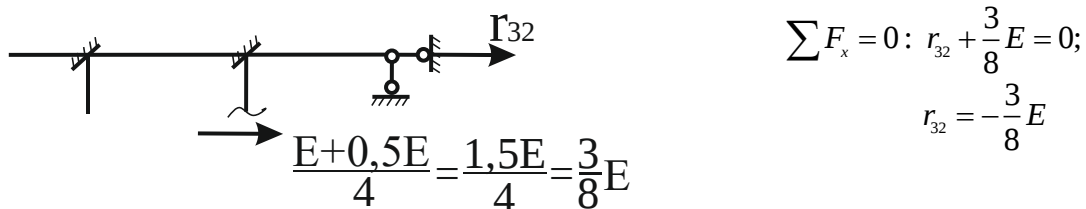
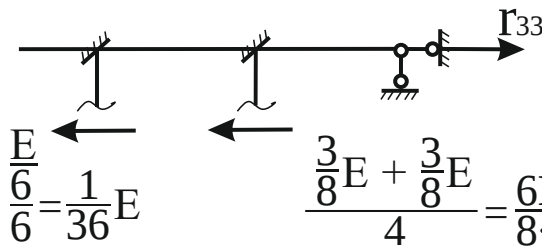


Рис. 2.52 Схема дії внутрішніх зусиль на верхню частину рами при $Z_2 = 1$

Коефіцієнт r_{33} – це реакція у доданому опорному стрижні (3-я в'язь) від лінійного переміщення $Z_3 = 1$. Для його визначення перетином, відокремлюємо фрагмент рами з епюри $\overline{M}_3$ (див. рис. 2.41).

До цього фрагмента прикладаємо реакцію в доданому опорному стрижні r_{33} у напрямку, що збігається з напрямом невідомого переміщення Z_2 та поперечні сили в перерізах стрижнях, які зазнають згин (рис. 2.53):



$$\sum F_x = 0: r_{33} - \frac{E}{36} - \frac{3E}{16} = 0;$$

$$r_{33} = \frac{E}{36} + \frac{3E}{16} = \frac{31E}{144}$$

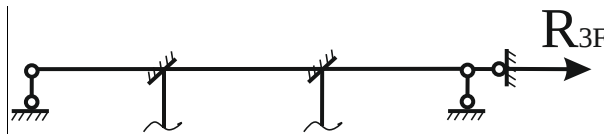
$$\frac{\frac{E}{6}}{6} = \frac{1}{36}E$$

$$\frac{\frac{3}{8}E + \frac{3}{8}E}{4} = \frac{6E}{8 \cdot 4} = \frac{3}{16}E$$

Рис. 2.53 Схема дії внутрішніх зусиль на верхню частину рами при $Z_3=1$

Коефіцієнт R_{3F} – це реакція у доданому опорному стрижні від зовнішнього навантаження. Для його визначення відокремлюємо перетином фрагмент рами з епюри M_F (див. рис. 2.34).

До цього фрагмента прикладаємо реакцію у доданому опорному стрижні R_{3F} у напрямку, що збігається з напрямом переміщення Z_3 та поперечні сили в перерізах стрижнях, які зазнають згин (рис. 2.54):



$$\sum F_x = 0: R_{3F} = 0;$$

Рис. 2.54 Схема дії внутрішніх зусиль на верхню частину рами від дії зовнішнього навантаження

Таким чином, отримаємо систему канонічних рівнянь наступного виду:

$$\begin{cases} 3,2E \cdot Z_1 + 0,5E \cdot Z_2 - \frac{1}{6}E \cdot Z_3 + 504 = 0 \\ 0,5E \cdot Z_1 + 3,5E \cdot Z_2 - \frac{3}{8}E \cdot Z_3 - 500 = 0 \\ -\frac{1}{6}E \cdot Z_1 - \frac{3}{8}E \cdot Z_2 + \frac{31}{144}E \cdot Z_3 + 0 = 0 \end{cases}$$

2.2.6. Перевірка правильності обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь

Для перевірки правильності обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь будемо сумарну одиничну епюру згинальних моментів $\overline{M}_S$ від одночасної дії всіх невідомих переміщень. Епюру $\overline{M}_S$ (рис. 2.55) будемо, як алгебраїчну суму ординат одиничних епюр згинальних моментів $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$.

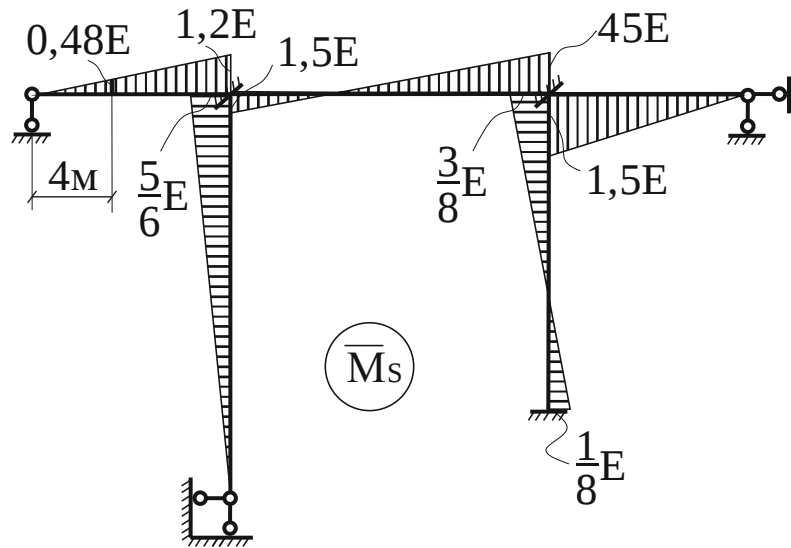


Рис. 2.55 Сумарна одиночна епюра згинальних моментів

Універсальна перевірка одиничних коефіцієнтів системи канонічних рівнянь полягає в тому, що сума всіх одиничних коефіцієнтів r_{ss} дорівнює r_{ss} результату перемноження сумарної одиничної епюри на ту ж сумарну одиничну епюру:

$$r_{ss} = \sum_{\ell} \int \frac{\overline{M}_s \times \overline{M}_s}{EJ} dx = r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{21} + r_{22} + r_{23} + r_{31} + r_{32} + r_{33}.$$

Основні варіанти перемноження епюр наведені у додатку 2.

Перемножуємо епюри згинальних моментів:

на стержні АВ:

$$\frac{1}{E \cdot 4} \left(\frac{1}{2} 10 \cdot 1,2E \cdot \frac{2}{3} 1,2E \right) = 1,2E$$

на стрижні ВС:

$$\frac{12}{6E \cdot 3} (2 \cdot 1,5E \cdot 1,5E + 2 \cdot 1,5E \cdot 1,5E - 1,5E \cdot 1,5E - 1,5E \cdot 1,5E) = 3E$$

на стрижні CD:

$$\frac{1}{E \cdot 5} \left(\frac{1}{2} 10 \cdot 1,5E \cdot \frac{2}{3} 1,5E \right) = 1,5E$$

на стрижні BE:

$$\frac{1}{E \cdot 2} \left(\frac{1}{2} 6 \cdot \frac{5}{6} E \cdot \frac{2}{3} \frac{5}{6} E \right) = \frac{25}{36} E = 0,694E$$

на стрижні CF:

$$\frac{4}{6E \cdot 1} \left(2 \cdot \frac{5}{8} E \cdot \frac{5}{8} E + 2 \cdot \frac{1}{8} E \cdot \frac{1}{8} E - \frac{1}{8} E \cdot \frac{5}{8} E - \frac{5}{8} E \cdot \frac{1}{8} E \right) = \frac{7}{16} E = 0,4375E$$

$$r_{ss} = 1,2E + 3E + 1,5E + 0,694E + 0,4375E = 6,83E$$

$$\begin{aligned} & r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{21} + r_{22} + r_{23} + r_{31} + r_{32} + r_{33} = \\ & = 3,2E + 0,5E - \frac{1}{6}E + 0,5E + 3,5E - \frac{3}{8}E - \frac{1}{6}E - \frac{3}{8}E + \frac{31}{144}E = \\ & = 3,2E + 0,5E - 0,167E + 0,5E + 3,5E - 0,375E - 0,167E - \\ & \quad - 0,375E + 0,215E = 6,83E \end{aligned}$$

Перевірка вільних членів (R_{1F}, R_{2F}, R_{3F}) канонічних рівнянь полягає в тому, що сума вільних членів дорівнює по значенню, але з протилежним знаком результату перемноження Δ_{SF} сумарної одиничної епюри $\overline{M}_S$ (див. рис. 2.55) на епюру від заданого навантаження, яка побудована в основній системі методу сил M_F^c . Тобто:

$$\Delta_{SF} = \sum_0^{\ell} \frac{\overline{M}_S \times M_F^c}{EJ} dx = -(R_{1F} + R_{2F} + R_{3F})$$

Основна система методу сил - це статично визначувана рама, яку отримують із заданої рами шляхом відкиданням зайвих в'язей або введенням додаткових шарнірів. Для заданої рами основну систему методу сил краще отримати шляхом введення додаткових простих шарнірів. Їх кількість буде дорівнювати ступені статичної невизначеності вихідної рами. Ступень статичної невизначеності за формулою: $n = c_0 - m - 3$, де c_0 - кількість опорних реакцій у в'язях (див. рис. 1.2), m - кількість простих шарнірів у вихідній рамі.

Для заданої рами $c_0 = 7$, $m = 0$, тоді $n = c_0 - m - 3 = 7 - 0 - 3 = 4$.

Додаткові прості шарніри введемо спочатку у всі вузли, а потім останню кількість - у жорсткі защемлення. В нашому випадку шарніри введемо тільки у жорсткі вузли.

Основна система методу сил, яка отримана таким чином наведена на рис. 2.56.

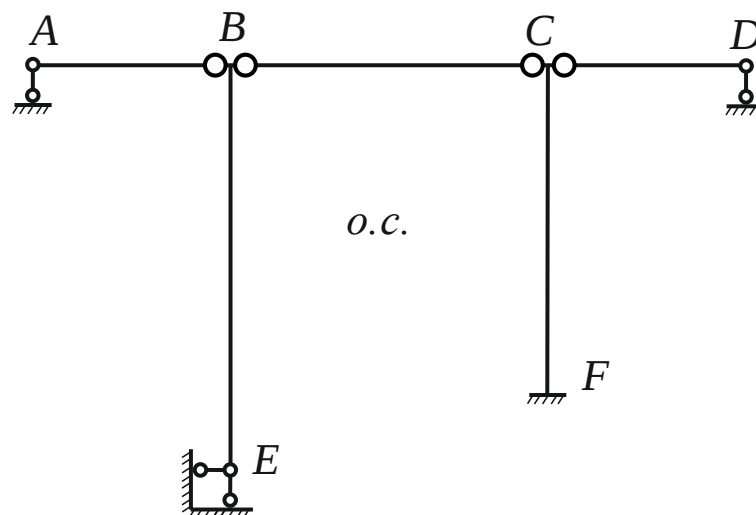


Рис. 2.56 Основна система методу сил

До основної системи методу сил прикладаємо задане навантаження (рис. 2.17), визначаємо опорні реакції та будуємо епюру згинальних моментів.

Визначення опорних реакцій:

$$\sum M_B^{\text{ліворуч}} = Y_A \cdot 10 - F \cdot 6 = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{F \cdot 6}{10} = \frac{300 \cdot 6}{10} = 180 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{\text{праворуч}} = Y_D \cdot 10 - q \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} = 0 \Rightarrow Y_D = \frac{q \cdot 10 \cdot 5}{10} = \frac{40 \cdot 10 \cdot 5}{10} = 200 \text{ кН}$$

$$\sum M_B^{\text{знизу}} = X_E \cdot 6 = 0 \Rightarrow X_E = 0$$

$$\sum F_X = X_E + X_F = 0 \Rightarrow X_F = -X_E = 0$$

$$\sum M_C^{\text{ліворуч}} = X_F \cdot 4 - M_F = 0 \Rightarrow M_F = X_F \cdot 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{ліворуч}} &= Y_A \cdot 22 - F \cdot 18 + Y_E \cdot 12 = 0 \Rightarrow Y_E = \frac{F \cdot 18 - Y_A \cdot 22}{12} = \\ &= \frac{300 \cdot 18 - 180 \cdot 22}{12} = 120 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= -Y_A + F - Y_E - Y_F + q \cdot \ell_1 - Y_D = 0 \Rightarrow Y_F = -Y_A + F - Y_E + q \cdot \ell_1 - Y_D = \\ &= -180 + 300 - 120 + 400 - 200 = 200 \text{ кН} \end{aligned}$$

Значення згинальних моментів під прикладеною силою F та посередині стрижня з розподіленим навантаженням знайдені за формулами, які наведені на рис. 2.57.

При перемноженні епюр згинальних моментів $\overline{M_S}$ (див. рис. 2.55) на M_F^c (див. рис. 2.57), які розташовані на стрижні АВ, її слід розбити на дві ділянки: одна довжиною 4 метра, друга – 6 метрів.

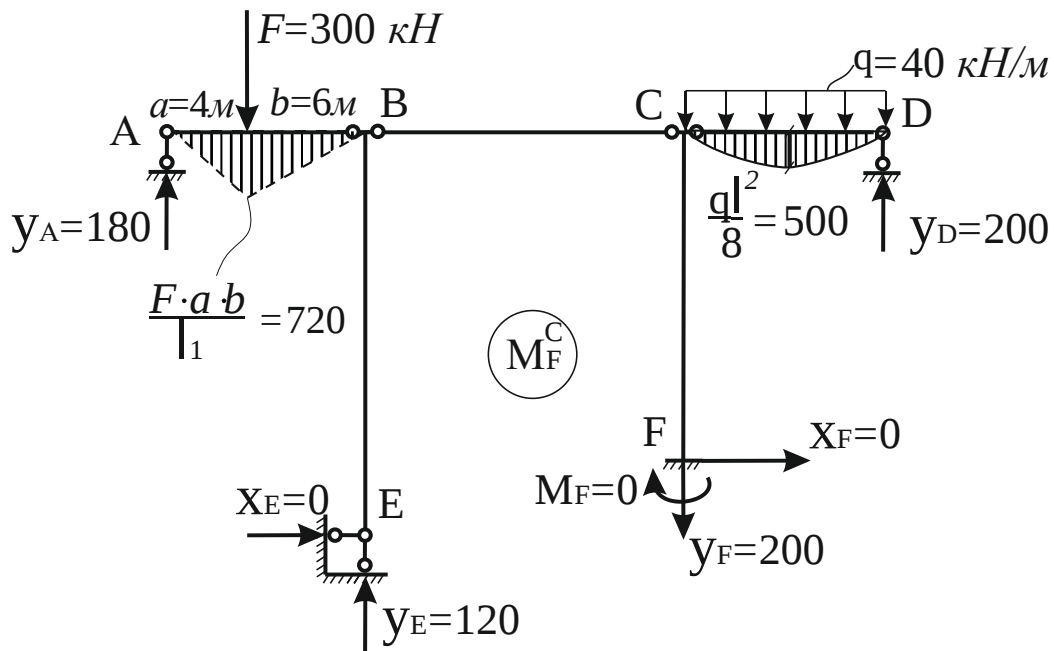


Рис. 2.57 Епюра від зовнішнього навантаження побудована в основній системі методу сил

Перемножуємо епюри згинальних моментів:

на стрижні АВ:

1 ділянка довжиною 4 метри:

$$-\frac{1}{E \cdot 4} \left(\frac{1}{2} 4 \cdot 0,48E \cdot \frac{2}{3} 720 \right) = -115,2$$

2 ділянка довжиною 6 метрів:

$$-\frac{6}{6E \cdot 4} (2 \cdot 0,48E \cdot 720 + 2 \cdot 1,2E \cdot 0 + 1,2E \cdot 720 + 0) = -388,8$$

на стрижні CD:

$$\frac{1}{E \cdot 5} \left(\frac{2}{3} 10 \cdot 500 \cdot \frac{1}{2} 1,5E \right) = 500$$

$$\Delta_{SF} = -388,8 - 115,2 + 500 = -4$$

$$R_{SF} = R_{1F} + R_{2F} + R_{3F} = 504 - 500 + 0 = 4,$$

Перевірку коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень можна також виконати матричним способом, який буде розглянуто нижче.

2.2.7. Розв'язання системи канонічних рівнянь

$$\begin{cases} 3,2E \cdot Z_1 + 0,5E \cdot Z_2 - \frac{1}{6}E \cdot Z_3 + 504 = 0 \\ 0,5E \cdot Z_1 + 3,5E \cdot Z_2 - \frac{3}{8}E \cdot Z_3 - 500 = 0 \\ -\frac{1}{6}E \cdot Z_1 - \frac{3}{8}E \cdot Z_2 + \frac{31}{144}E \cdot Z_3 + 0 = 0 \end{cases}$$

Наведену систему рівнянь можна вирішити аналітично або за допомогою обчислювальних систем Mathcad чи Matlab. Якщо наведену систему канонічних рівнянь вирішують аналітично, то знайдені величини невідомих треба перевірити шляхом підстановки їх значень у вихідну систему рівнянь.

В нашому випадку невідомі знайдені за допомогою системи комп'ютерної алгебри Mathcad, яка належить до класу систем автоматизованого проектування:

$$Z_1 = -\frac{177}{E}; \quad Z_2 = \frac{188,674}{E}; \quad Z_3 = \frac{191,626}{E}$$

Таким чином, розкрита кінематична невизначеність рами.

2.2.8. Побудова остаточної епюру згинальних моментів

Отримавши значення й реальний напрямок невідомих переміщень $Z_1 = -\frac{177}{E}$; $Z_2 = \frac{188,674}{E}$; $Z_3 = \frac{191,626}{E}$, будуємо **остаточну епюру згинальних моментів** з використанням методу суперпозиції, тобто як суму ординат згинальних моментів в характерних точках, які наведені на рис. 2.56, в основній системі методу переміщень від дії кожного із визначених переміщень окремо (рис. 2.58, 2.59, 2.60) та епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження в основній системі методу переміщень (рис.2.42):

$$M_{\kappa} = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \overline{M}_3 \cdot Z_3 + M_F.$$

Епюри згинальних моментів, які наведені на рис. 2.58, 2.59, 2.60 отримані шляхом множення ординат епюр згинальних моментів $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ на значення отриманих переміщень Z_1, Z_2, Z_3 . При чому, якщо значення переміщення від'ємне, то відповідну вихідну епюру одиничних згинальних моментів спочатку слід «перевернути» відносно осей стержнів на яких вони побудовані, а потім вже збільшити значення ординат згинальних моментів (див. рис. 2.58).

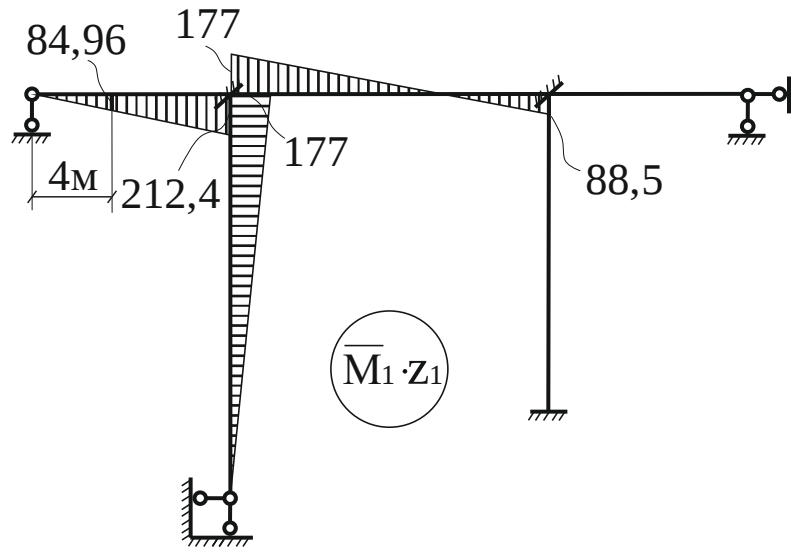


Рис. 2.58 Епюри згинальних моментів дійсного значення від Z_1

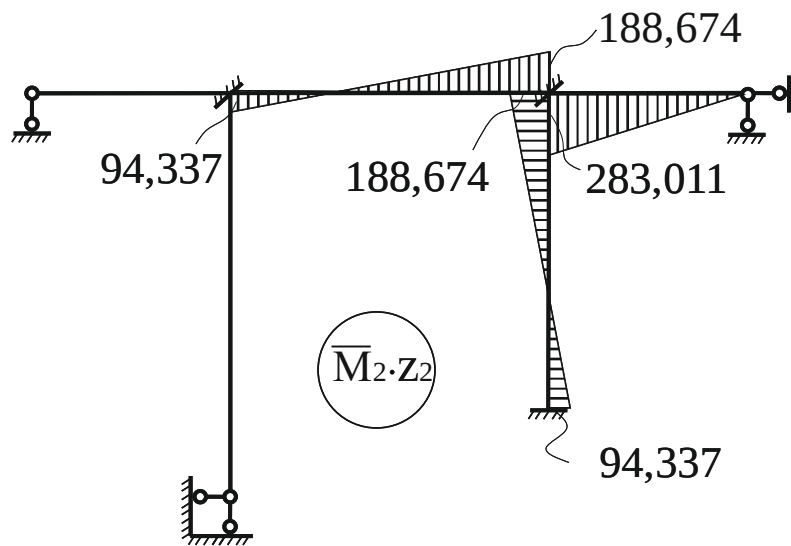


Рис. 2.59 Епюри згинальних моментів дійсного значення від Z_2

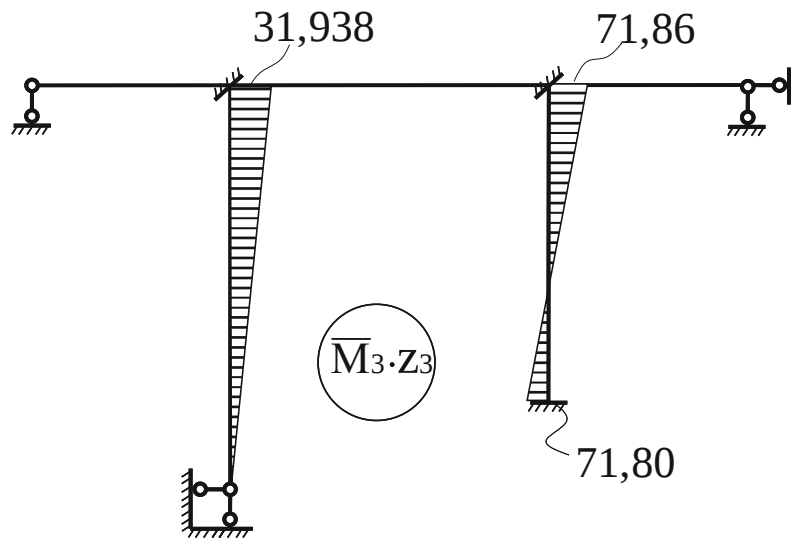


Рис. 2.60 Епюри згинальних моментів дійсного значення від Z_3

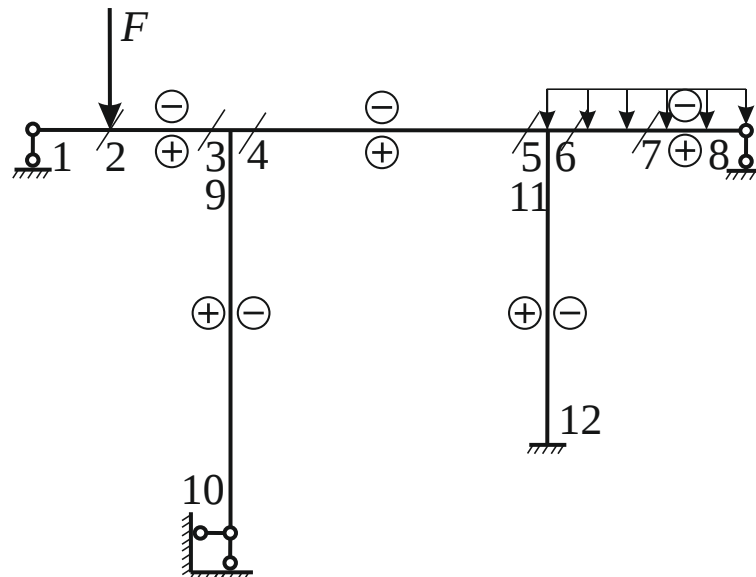


Рис. 2.61 Схема розташування характерних точок

В якості характерних точок обираємо перерізи на початку та на кінці кожного стрижня (точки: 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12) та дві додаткові точки: переріз, де прикладена зосереджена сила F (точка 2) та посередині стрижня, на якому діє розподілене навантаження інтенсивністю q (точка 7) (див. рис. 2.61). На рис. 2.61 також наведено обрані знаки для ординат згинальних моментів. Нижче за наведеною методикою обчислюємо ординати згинальних моментів в характерних точках:

$$M^{(1)} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M^{(2)} = 84,96 + 0 + 0 + 518,4 = 603,36 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(3)} = 212,4 + 0 + 0 - 504 = -291,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(4)} = -177 + 94,337 + 0 + 504 = -82,663 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(5)} = 88,5 - 188,674 + 0 + 0 = -100,174 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(6)} = 0 + 283,011 + 0 - 500 = -216,989 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(7)} = 0 + \frac{1}{2} 283,011 + 0 + 250 = 391,506 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(8)} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M^{(9)} = -177 + 0 - 31,938 + 0 = -208,938 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(10)} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M^{(11)} = 0 + 188,674 - 71,86 + 0 = 116,814 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M^{(12)} = 0 - 94,337 + 71,938 + 0 = -22,474 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

За отриманими ординатами з урахуванням знаків, які наведені на рис. 2.61, будемо остаточну епюру згинальних моментів, яка зображена на рис. 2.62.

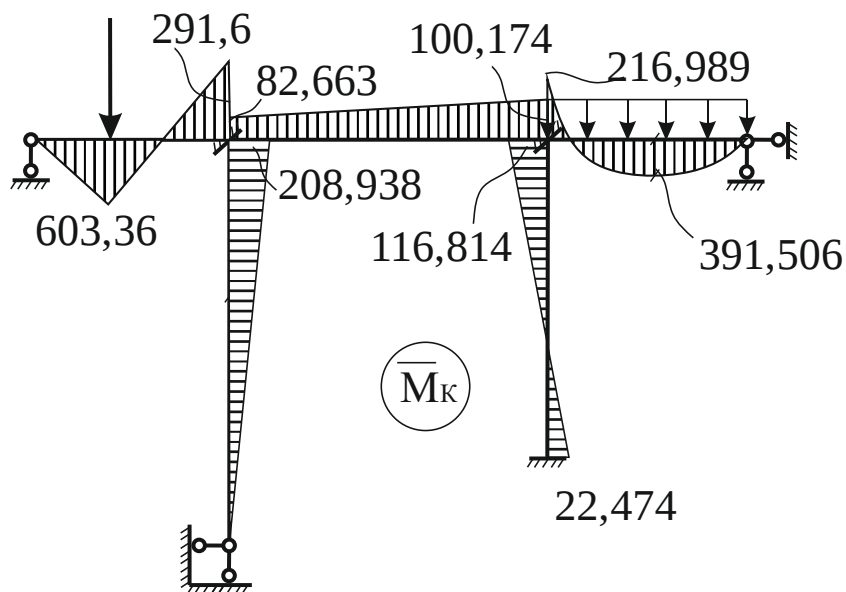


Рис. 2.62 Остаточна епюра згинальних моментів

2.2.9. Статична перевірка рівноваги вузлів рами

Для виконання статичної перевірки епюри M розглядаємо умову рівноваги вузлів B та C (див. рис. 2.63, 2.64)

$$\sum M_B = 0: 82,663 + 208,938 - 291,6 = 0,001$$

Рис. 2.63

$$\sum M_C = 0: 216,986 - 116,814 - 100,174 = -0,002$$

Рис. 2.64

2.2.10. Кінематична (деформаційна) перевірка остаточної епюри згинальних моментів.

Суть цієї перевірки полягає в тому, що взаємний кут повороту стержнів у жорсткому вузлі, повинен дорівнюватися нулю.

Для його визначення треба до основної системи методу сил, яку отримали вище (див. рис. 2.56), прикласти у будь-якому введеному шарнірі (наприклад у вузлі C) два одиничних зосереджених моменти, які спрямовані у різні сторони. Знаходимо опорні реакції від одиничного навантаження та будуємо одиничну епюру згинальних моментів (див. рис. 2.65).

Знаходимо взаємне переміщення у вузлі C шляхом перемноження епюри $\overline{M}_1^*$ та на остаточної епюрі згинальних моментів M :

$$\Delta_1 = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_1^* \times M}{EJ} dx$$

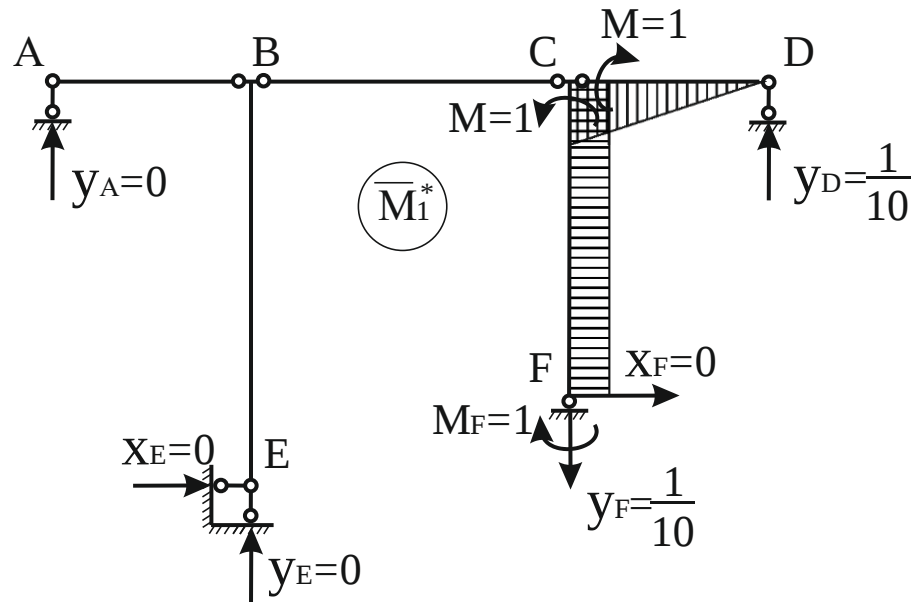


Рис. 2.65 Епюра згинальних моментів в основній системі методу сил від $M=1$ прикладеного у вузлі C

Епюри на ділянці CD перемножимо за формулою Сімпсона (див. додаток 2):

$$\frac{10}{6E \cdot 5} (-216,989 \cdot 1 + 4 \cdot 391,506 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{188,671}{EJ}$$

Епюри на ділянці CF : площу трапеції на остаточній епюрі помножимо на відповідну ординату з епюри $\bar{M}_1^*$

$$-\frac{1}{E \cdot 1} \left(\frac{116,814 - 22,474}{2} \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{-188,68}{EJ}$$

$$\Delta_1 = 188,671 - 188,68 = -0,009 \approx 0.$$

2.2.11. Побудова епюри поперечних зусиль

Використовуючи остаточну епюру згинальних моментів M (див. рис. 2.62) визначаємо **поперечні сили в перерізах стержнів.**

Розіб'ємо раму на ділянки (рис. 2.66).

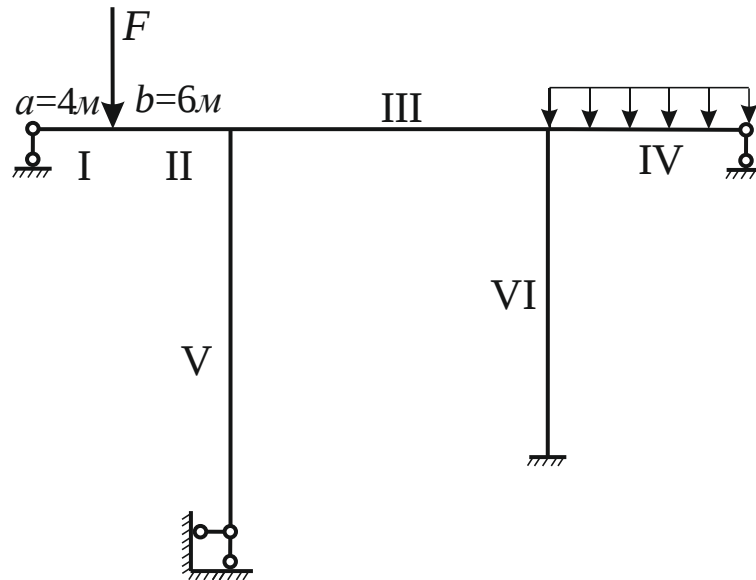


Рис. 2.66 Схема розташування ділянок

Правило знаків для поперечних сил. Поперечна сила на ділянці вважається додатна, якщо для збігання осі стрижня з дотичною до епюри згинальних моментів треба цю вісь повертати за годинниковою стрілкою. Поворот осі треба виконувати таким чином, щоб кут повороту був меншим за 90° . Чисельне значення поперечної сили дорівнює тангенсу цього кута.

$$Q_I = + \frac{603,36}{4} = 150,84 \text{ кН}$$

$$Q_{II} = - \frac{603,36 + 291,630,18}{6} = -149,16 \text{ кН}$$

$$Q_{III} = - \frac{100,174 - 82,633}{12} = -1,459 \text{ кН}$$

$$Q_V = + \frac{208,938}{6} = 34,823 \text{ кН}$$

$$Q_{VI} = - \frac{116,814 + 22,474}{4} = -34,822 \text{ кН}$$

На ділянці IV епюра згинальних моментів має вигляд параболи, кут нахилу дотичної до якої змінюється вздовж осі. Тому для визначення значень поперечних сил треба відокремити IV ділянку від рами, покласти її на дві шарнірні опори, завантажити її заданим розподіленим навантаженням та опорними моментами, значення яких беремо з остаточної епюри згинальних моментів M (див. рис. 2.62), враховуючи їх напрямки.

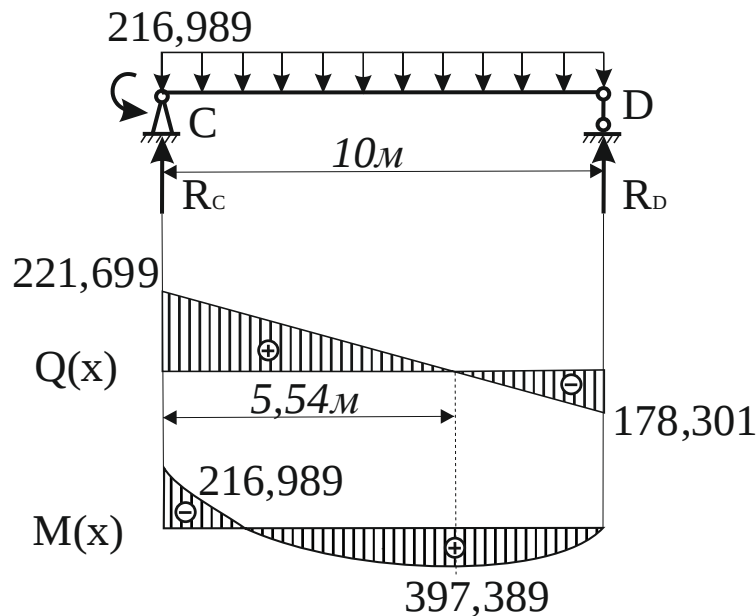


Рис. 2.67 Епюри Q (кН) та M (кНм) на ділянці з розподіленим навантаженням

Для наведеної балки (рис. 2.67) визначимо опорні реакції та побудуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів.

$$\sum M_C = 0: 216,989 - q \cdot 10 \cdot 5 + R_D \cdot 10 = 0$$

$$R_D = \frac{q \cdot 50 - 216,989}{10} = 178,301 \text{ кН}$$

$$\sum M_D = 0: 216,989 + q \cdot 10 \cdot 5 - R_C \cdot 10 = 0$$

$$R_C = \frac{216,989 + q \cdot 50}{10} = 221,699 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: -R_C + q \cdot 10 - R_D = -221,699 + 40 \cdot 10 - 178,301 = 0$$

Складемо аналітичні вирази поперечних сил та згинальних моментів для наведеної балки та обчислимо їх значення:

$$0 \leq x \leq 10$$

$$Q(x) = R_C - q \cdot x$$

$$Q(0) = R_C = 221,699 \text{ кН}$$

$$Q(10) = R_C - q \cdot 10 = 221,699 - 40 \cdot 10 = -178,301 \text{ кН}$$

$$M(x) = -216,989 + R_C \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M(0) = -216,989 \text{ кНм}$$

$$M(10) = -216,989 + R_C \cdot 10 - q \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} = -216,989 + 221,699 \cdot 10 - 40 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} = 0$$

На наведеному графіку $Q(x)$ (див. рис. 2.67) поперечна сила змінює знак, тому треба визначити екстремальне значення згинального моменту:

$$Q(x) = R_C - qx = 0$$

$$x = \frac{R_C}{q} = \frac{221,699}{40} = 5,54 \text{ м}$$

$$M(5,54) = -216,989 + R_C \cdot 5,54 - q \cdot 5,54 \cdot \frac{5,54}{2} =$$

$$= -216,989 + 221,699 \cdot 5,54 - 40 \cdot 5,54 \cdot \frac{5,54}{2} = 397,389 \text{ кНм}$$

Отримана епюра поперечних сил зображена на рис. 2.68.

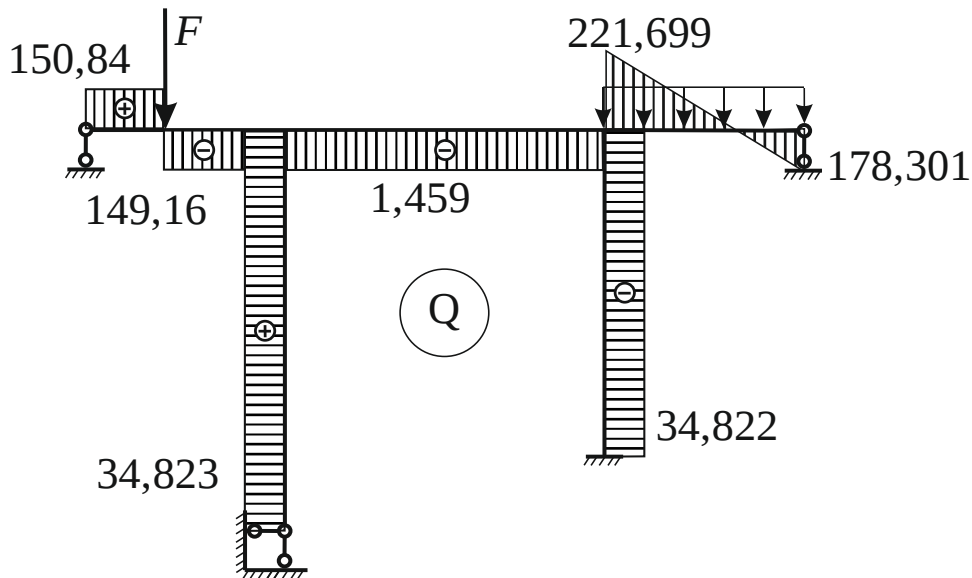
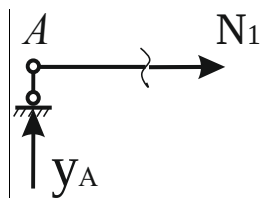


Рис. 2.68 Остаточна епюра поперечних сил, кН

2.2.12. Побудова епюри поздовжніх зусиль

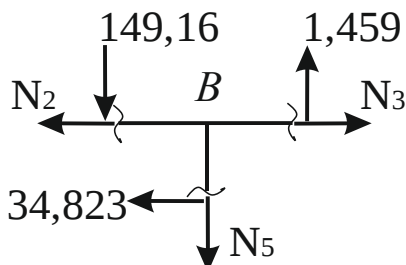
З використанням епюри поперечних сил Q визначаємо поздовжні сили в стрижнях із умов рівноваги вузлів рами, які послідовно (починаючи з вузла А) відокремлюємо з епюри Q . Кожний вузол розглядається в рівновазі при дії на вузол (рис. 2.69, 2.70, 2.71) внутрішніх зусиль. Для визначення напрямку поперечної сили в перерізі необхідно скористатися наступним правилом: якщо поперечна сила додатна, то вона повинна повертати відокремлений вузол за годинниковою стрілкою.

Повздовжню силу в кожному зі стрижнів спрямовуємо від перерізу (на розтяг) невідомої поздовжньої сили в стрижні (спрямована від перерізу) із умови рівноваги вузла визначаємо значення поздовжньої сили в стрижні.



$$\sum F_x = 0: N_1 = 0$$

Рис. 2.69 Схема внутрішніх зусиль та опорних реакцій у вузлі А



$$\sum F_x = 0: N_3 - 34,823 - N_2 = 0$$

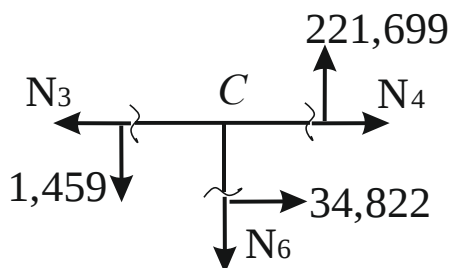
$$N_3 = 34,823 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: N_5 + 149,16 - 1,459 = 0$$

$$N_5 = -149,16 + 1,459 = -147,701 \text{ кН}$$

$N_2 = N_1$ (т.я. при переході від 1-ї до 2-ї ділянки відсутні поздовжні сили)

Рис. 2.70 Схема внутрішніх зусиль у вузлі В



$$\sum F_x = 0: N_4 + 34,822 - N_2 = 0$$

$$N_4 = N_2 - 34,822 = 34,823 - 34,822 \approx 0$$

$$\sum F_y = 0: N_5 + 221,699 + 1,459 = 0$$

$$N_5 = -221,699 - 1,459 = -223,158 \text{ кН}$$

Рис. 2.71 Схема внутрішніх зусиль у вузлі С

Епюра поздовжніх сил N наведена на рис. 2.72.

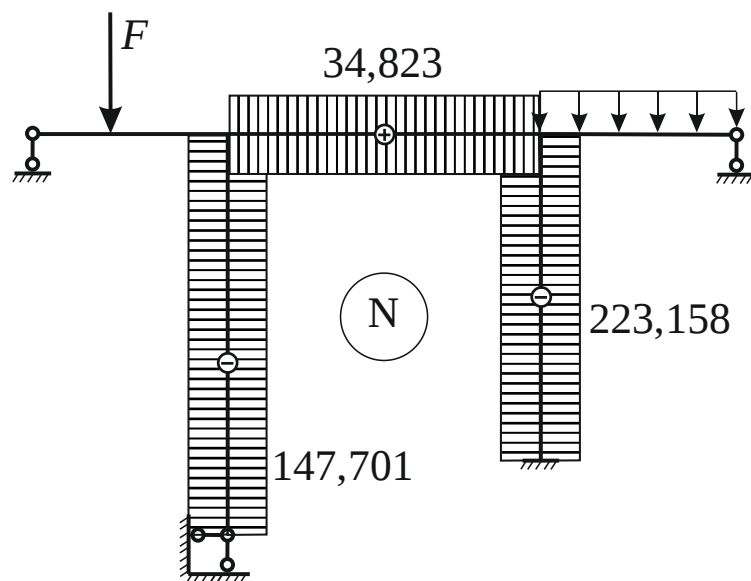


Рис. 2.72 Остаточна епюра поздовжніх сил, кН

2.2.13. Визначення опорних реакцій. Перевірка умов рівноваги заданої рами

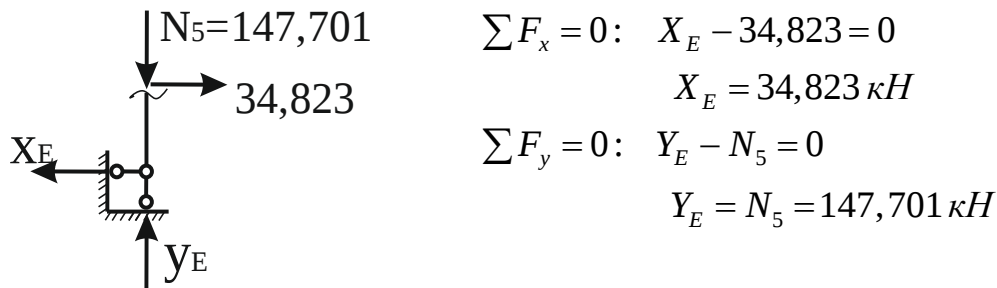
Визначаємо опорні реакції з умови рівноваги опорних вузлів рами через зусилля в перерізах, що одержані з епюр M , Q , N (рис. 2.62, 2.68, 2.72) з урахуванням їх знаків. При цьому напрямки опорних реакцій будуть спрямовані у протилежний бік.



$$\sum F_y = 0: Y_A - 150,84 = 0$$

$$Y_A = 150,84 \text{ кН}$$

Рис. 2.73 Схема внутрішніх зусиль та опорних реакцій в опорі А



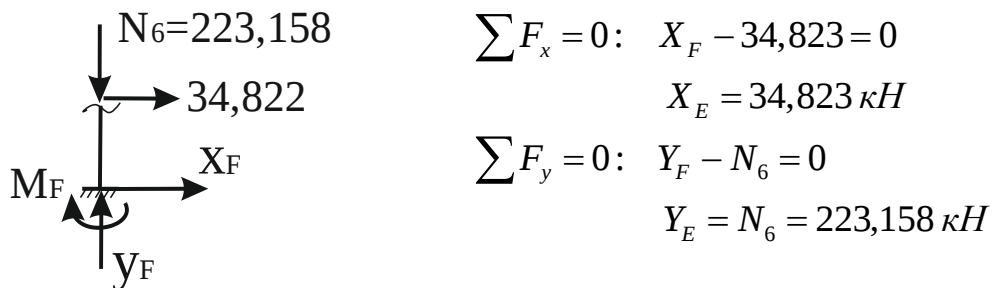
$$\sum F_x = 0: X_E - 34,823 = 0$$

$$X_E = 34,823 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: Y_E - N_5 = 0$$

$$Y_E = N_5 = 147,701 \text{ кН}$$

Рис. 2.74 Схема внутрішніх зусиль та опорних реакцій в опорі Е



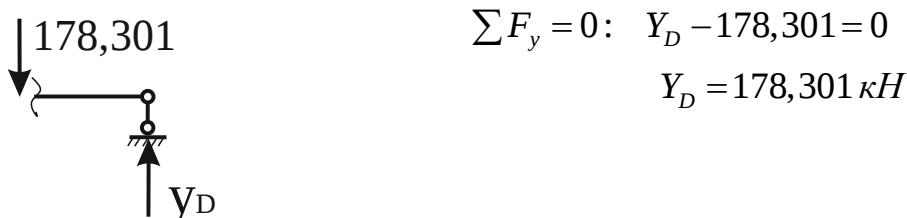
$$\sum F_x = 0: X_F - 34,823 = 0$$

$$X_F = 34,823 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0: Y_F - N_6 = 0$$

$$Y_F = N_6 = 223,158 \text{ кН}$$

Рис. 2.75 Схема внутрішніх зусиль та опорних реакцій в опорі F



$$\sum F_y = 0: Y_D - 178,301 = 0$$

$$Y_D = 178,301 \text{ кН}$$

Рис. 2.76 Схема внутрішніх зусиль та опорних реакцій в опорі D

Для виконання перевірки рівноваги всієї рами прикладаємо до рами зовнішнє навантаження й визначені опорні реакції (рис. 2.77).

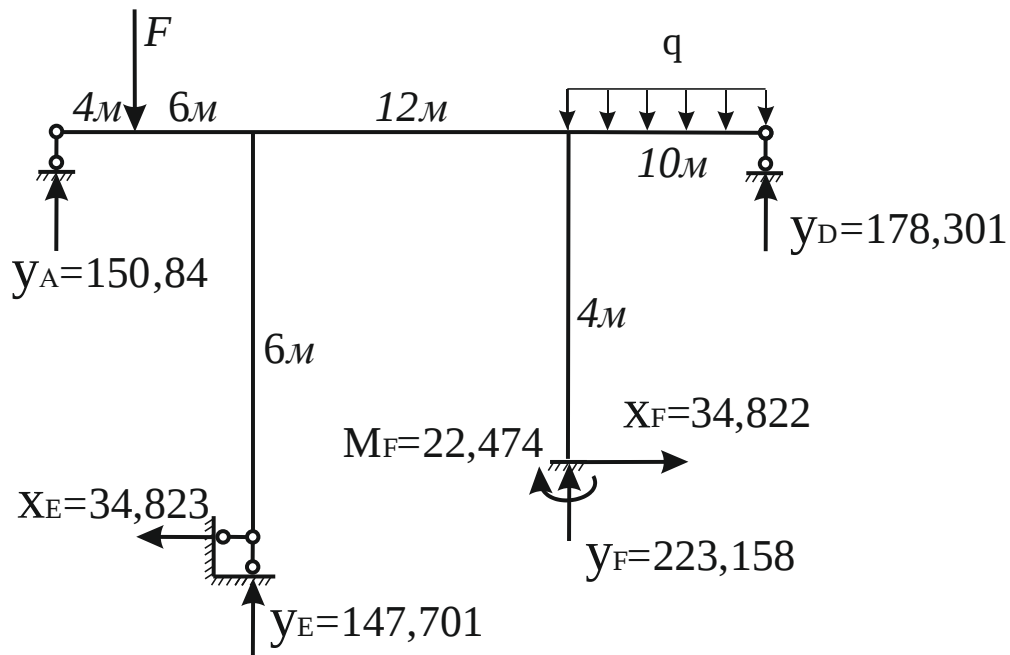


Рис. 2.77 Зовнішнє навантаження та опорні реакції у вихідній рамі

Перевіряємо, чи задовольняються умови рівноваги:

$$\sum F_x = 0: X_F - X_E = 34,822 - 34,823 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: q \cdot \ell_1 + F - Y_A - Y_D - Y_E - Y_F = \\ = 40 \cdot 10 + 300 - 150,84 - 147,701 - 223,158 - 178,301 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_F = 0: Y_A \cdot (10 + 12) - F \cdot (6 + 12) + q \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} + Y_E \cdot 12 + X_E \cdot (6 - 4) + M_F = \\ = 150,84 \cdot 22 - 300 \cdot 18 + 40 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} - 178,301 \cdot 10 + 147,701 \cdot 12 + \\ + 34,823 \cdot 2 + 22,474 = 0,002 \approx 0 \end{aligned}$$

2.3. Приклад розрахунку статично невизначеної рами методом переміщень в матричній формі.

Розглянемо порядок розрахунку рам методом переміщень в матричній формі на прикладі рами, яку наведено на рис. 2.78.

Для складання матриць $\bar{L}, G$ та M_F^c розіб'ємо вихідну раму на окремі ділянки. Номера ділянок рами (римські цифри), номери точок, які є межами ділянок (арабськими цифрами) та правило знаків для ординат згинальних

моментів наведені на рис. 2.78. На ділянці з розподіленим навантаженням (ділянка IV) введено додаткову точку посередині ділянки.

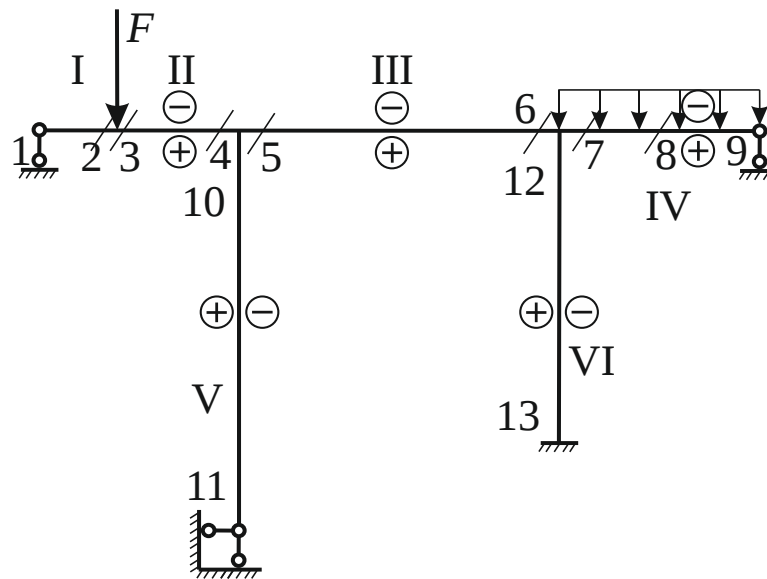


Рис. 2.78 Вихідна рама з наведеними номерами ділянок та точок

Вихідна рама має шість ділянок і 13 точок, в яких ми будемо брати значення ординат. На четвертій ділянці беремо значення в 3-х точках (криволінійна еюра згинальних моментів від розподіленого навантаження), а на інших – в двох, тому що на них еюри згинальних моментів – прямолінійні.

Матриця $\bar{L}$ містить значення ординат одиничних еюр, наведених на рис. 2.39, 2.40, 2.41, матриця M_F^c – значення ординат вантажної еюри побудованої в основній системі методу сил (рис. 2.57). В матриці $\bar{L}$ – 1-й стовпчик – це ординати згинальних моментів у 13 точках з еюри $\bar{M}_1$, 2-й стовпчик – це ординати згинальних моментів з еюри $\bar{M}_2$, 3-й стовпчик – це ординати згинальних моментів з еюри $\bar{M}_3$. Матриці $\bar{L}$ та M_F^c наведені нижче.

$$L = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.167 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.375 \\ 0 & -0.5 & 0.375 \end{bmatrix}; \quad M_F^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 720 \\ 720 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для складання матриці податливості для вихідної рами, спочатку складемо матриці податливості для кожної ділянки:

$$\text{I ділянка: } G_I = \frac{4}{6E4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0,333 & 0,667 \\ 0,667 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$\text{II ділянка: } G_{II} = \frac{6}{6E4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{III ділянка: } G_{III} = \frac{12}{6E3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1,33 & 0,667 \\ 0,667 & 1,33 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV ділянка: } G_{IV} = \frac{10}{6E5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 1,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$\text{V ділянка: } G_V = \frac{6}{6E2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{VI ділянка: } G_{VI} = \frac{4}{6E \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0,333 & 0,667 \\ 0,667 & 0,333 \end{bmatrix}$$

Матриця податливості для всієї рами буде мати вигляд:

$$G = \begin{bmatrix} G_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{III} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{IV} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{IV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{IV} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0,33 & 0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,17 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,33 & 0,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 1,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,33 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 1,33 \end{bmatrix}$$

Розрахунки будемо виконувати в системі MathCad. Нижче, на рис. 2.79, наведено копію екрану після визначення матриці одиничних коефіцієнтів r

ORIGIN := 1

Параметри системи: кількість невідомих - 3, кількість характерних точок на рамі - 13

Вводимо матрицю L - матрицю (13x3) з ординатами епюр, матрицю G - матрицю жорсткості рами (13x13)

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.167 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.375 \\ 0 & -0.5 & 0.375 \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} 0.33333 & 0.16667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16667 & 0.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.33333 & 0.66667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.66667 & 1.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.33333 & 0.66667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.66667 & 1.33333 \end{pmatrix}$$

Визначаємо коефіцієнти при невідомих системи канонічних рівнянь методу переміщень

$$r := L^T \cdot G \cdot L \quad r = \begin{pmatrix} 3.2 & 0.5 & -0.167 \\ 0.5 & 3.5 & -0.375 \\ -0.167 & -0.375 & 0.215 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.79 Визначення коефіцієнтів при невідомих системи канонічних рівнянь методу переміщень

Для визначення вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень побудуємо матрицю:

$$M_F^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 720 \\ 720 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Результати розрахунку вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень в системі MathCad наведені на рис. 2.80:

В характерних точках вводимо ординати епюри від заданого навантаження, побудованої в основній системі методу сил (Mfc) та визначаємо величини вільних членів Rif системи канонічних рівнянь методу переміщень

$$Mfc := \begin{pmatrix} 0 \\ 720 \\ 720 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Rif := -L^T \cdot G \cdot Mfc \quad Rif = \begin{pmatrix} 503.999 \\ -499.999 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.80 Визначення вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень

Отримані результати (матриці коефіцієнтів при невідомих r та вільних членів R системи канонічних рівнянь методу переміщень) можна використовувати для перевірки відповідних коефіцієнтів отриманих статичним способом для рами, що розглядається в попередньому розділі:

$$r_{11} = 3,2E, \quad r_{12} = r_{21} = 0,5E, \quad r_{13} = r_{31} = -\frac{1}{6} = -0,167E, \quad r_{22} = 3,5E, \\ r_{32} = r_{23} = -\frac{3}{8} = -0,375E, \quad r_{33} = \frac{31}{144} = 0,215E; \quad R_{1F} = 504, \quad R_{2F} = -500, \quad R_{3F} = 0$$

Порівняння наведених коефіцієнтів, отриманих статичним способом, з коефіцієнтами, отриманими матричним способом (рис. 2.79) показує їх повну збіжність.

Після визначення чисельних значень компонентів матриць r та R знаходимо складові вектору шуканих переміщень вузлових точок Z_i :

$$Z = -r^{-1} \cdot R.$$

Ординати остаточної епюри згинальних моментів отримаємо з використанням співвідношення:

$$M = L \cdot Z + M_F,$$

де M_F - матриця ординат епюри згинальних моментів, побудованої в основній системі методу переміщень від зовнішнього навантаження (рис. 2.42).

Результати розрахунків по визначенню ординат остаточної епюри згинальних моментів в системі MathCad наведені на рис.2.81, рис. 2.82.

Вирішуємо систему канонічних рівнянь

$$Z := -r^{-1} \cdot R \cdot f \quad Z = \begin{pmatrix} -176.996 \\ 188.625 \\ 191.169 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.81 Визначення невідомих кутових та лінійного переміщень

В характерних точках вводимо ординати епюри від заданого навантаження, побудованої в основній системі методу переміщень (M_f) та визначаємо ординати остаточної епюри згинальних моментів M

$$M_f := \begin{pmatrix} 0 \\ 518.4 \\ 518.4 \\ -504 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M := L \cdot Z + M_f \quad M = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 603.358 \\ \hline 3 & 603.358 \\ \hline 4 & -291.605 \\ \hline 5 & -82.683 \\ \hline 6 & -100.127 \\ \hline 7 & -217.062 \\ \hline 8 & 391.469 \\ \hline 9 & 0 \\ \hline 10 & -208.921 \\ \hline 11 & 0 \\ \hline 12 & 116.937 \\ \hline 13 & -22.624 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2.82 Визначення ординат остаточної епюри згинальних моментів.

Епюру згинальних моментів побудовану з використанням отриманих ординат наведено на рис. 2.83.

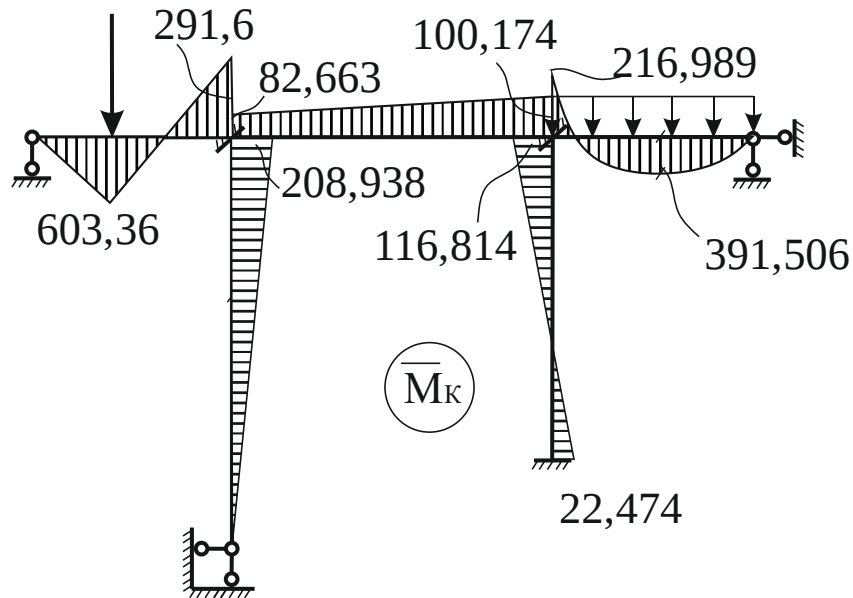


Рис. 2.83 Остаточна епюра згинальних моментів побудована матричним способом

Порівняння даної епюри з епюрою M , наведеною на рис. 2.62, показує їх добру збіжність.

Надалі, після побудови остаточної епюри згинальних моментів, за описаною вище методикою будуються епюри поперечних та повздовжніх сил Q та N , визначаються опорні реакції та проводиться їх статична перевірка.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Побудувати епюри внутрішніх зусиль (згинальних моментів, поперечних та поздовжніх сил) для рам, які наведені на рис. 4.1 – 4.7, застосовуючи метод переміщень.

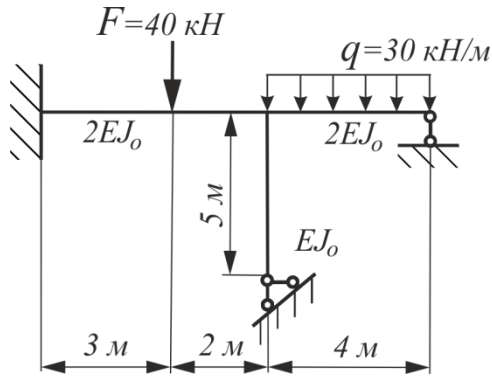


Рис. 3.1

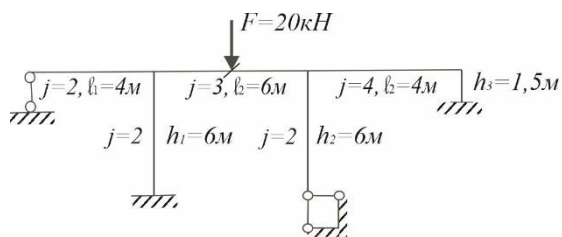


Рис. 3.2

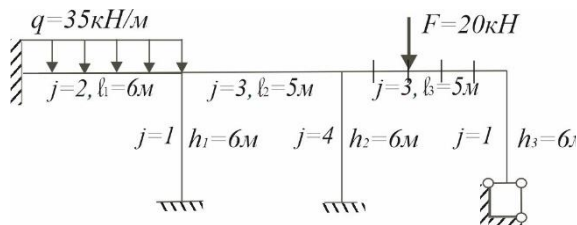


Рис. 3.3

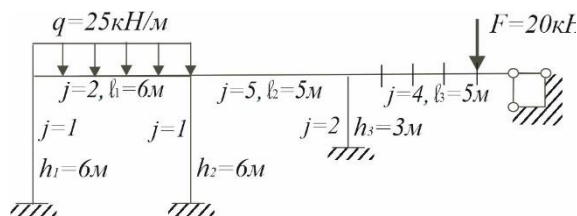


Рис. 3.4

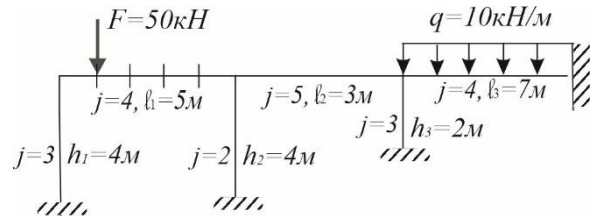


Рис. 3.5

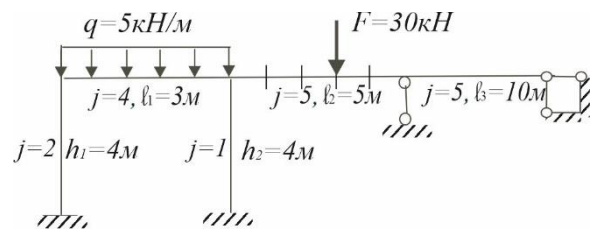


Рис. 3.6

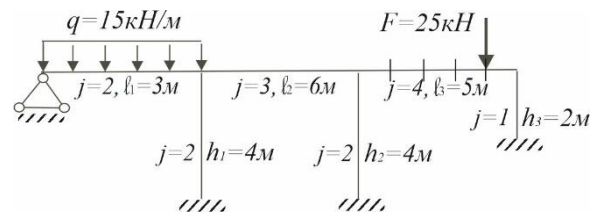


Рис. 3.7

4. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

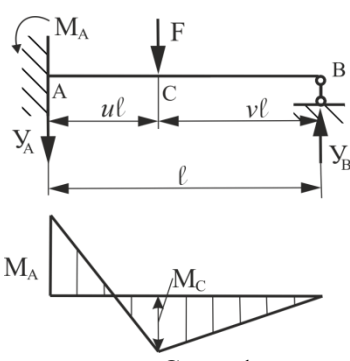
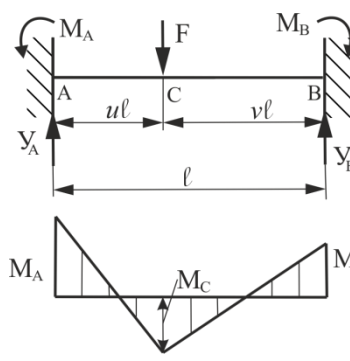
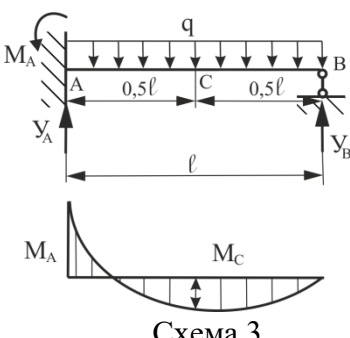
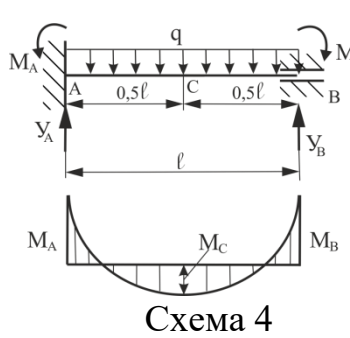
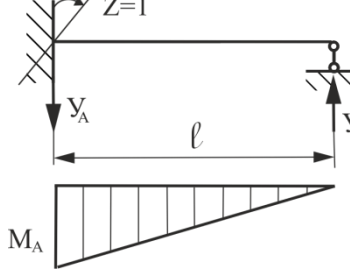
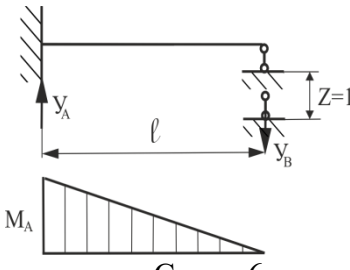
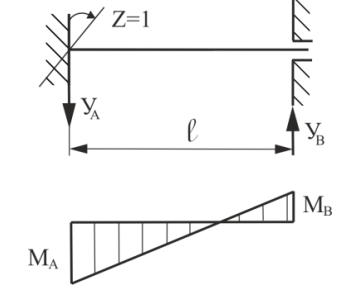
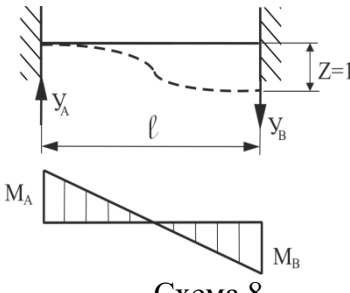
1. Баженов В. А., Іванченко Г. М., Шишов О. В., Пискунов С. О. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : навч. посіб. Київ, 2013. 439 с.
2. Баженов В. А., Шишов О. В. Будівельна механіка. Електронний підручник. 2008. URL: <http://www.knuba.edu.ua/ua/facultes/10/38>, 2008.
3. Астанін В. В. Основи розрахунків на міцність : навч. посіб. Харків : ХФВ «Транспорт України», 2001. 210 с.
4. Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології . Київ : Каравела, 2009. 696 с.
5. Баженов В. А., Іванченко Г. М., Шишов О. В., Пискунов С. О. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : навч. посіб. Київ : Каравела, 2010. 502 с.
6. Чихладзе Е. Д. Будівельна механіка : підручник. Харків : УкрДАЗТ, 2011. 324 с.
7. Яременко В. В., Куценко А. Г., Бондар М. М. Будівельна механіка : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 704 с.
8. Обчислювальний комплекс для аналізу міцності конструкцій методом кінцевих елементів - SKAD. Інструкція користувача, 2003.
9. Дорошук Г. П., Ткач В. М. Будівельна механіка з елементами комп'ютерних технологій : підручник. Рівне НУВГП, 2005. 566 с.

Інформаційні ресурси

1. Дистанційний курс «Будівельна механіка залізничного рухомого складу». ННЦ «Лідер». URL: <https://lider.diit.edu.ua/course/view.php?id=307> (дата звернення: 28.02.2023)
2. Електронна бібліотека. *Наукова бібліотека. Український державний університет науки і технологій*. URL: <https://library.diit.edu.ua/uk/catalog> (дата звернення: 15.02.2023)
3. Репозитарій. *Наукова бібліотека. Український державний університет науки і технологій*. URL: <http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/> (дата звернення: 18.01.2023).

ДОДАТОК 1

Таблица 1.

 Схема 1	$M_A = \frac{F\ell}{2}v(1-v^2)$ $M_C = \frac{F\ell}{2}u^2v(3-u)$ $Y_A = \frac{Fv}{2}(3-v^2)$ $Y_B = \frac{Fu^2}{2}(3-u)$ $u+v=1$	 Схема 2	$M_A = uv^2F\ell$ $M_C = 2u^2v^2F\ell$ $M_B = u^2vF\ell$ $Y_A = v^2(1-2u)F$ $Y_B = u^2(1+2v)F$
 Схема 3	$M_A = \frac{q\ell^2}{8}$ $M_C = \frac{q\ell^2}{16}$ $Y_A = \frac{5}{8}q\ell$ $Y_B = \frac{3}{8}q\ell$	 Схема 4	$M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12}$ $M_C = \frac{q\ell^2}{24}$ $Y_A = Y_B = \frac{q\ell}{2}$
 Схема 5	$M_A = \frac{3EJ}{l}$ $Y_A = Y_B = \frac{3EJ}{l^2}$	 Схема 6	$M_A = \frac{3EJ}{l^2}$ $Y_A = Y_B = \frac{3EJ}{\ell^3}$
 Схема 7	$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$ $Y_A = Y_B = \frac{6EJ}{\ell^2}$	 Схема 8	$Y_A = Y_B = \frac{12EJ}{\ell^3}$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}$

Основні варіанти перемноження епюр

Для реалізації правила Верещагіна потрібно обчислити Ω - площу епюри M_m , помножити її на ординату $\bar{M}_{nc}$ епюри від одиничного навантаження під центром ваги площі Ω і розділити на жорсткість балки.

На рис.Д.2.1 представлені деякі основні варіанти, що виникають в практичних розрахунках

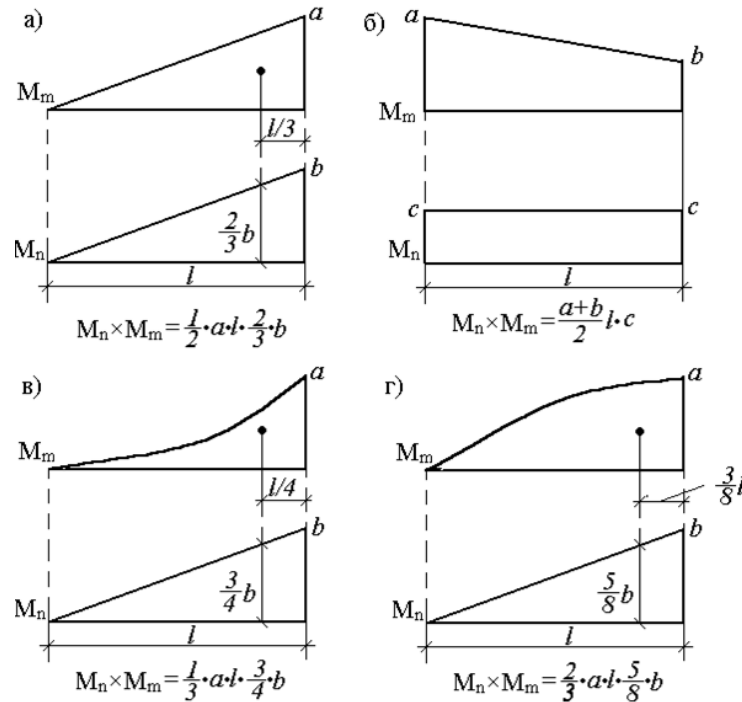


Рис. Д.2.1 Приклади перемноження простих епюр

Для перемноження епюр складної форми їх необхідно розбивати на простіші. Наприклад, для перемноження двох епюр, що мають вид трапеції, потрібно одну з них розбити на трикутник і прямокутник, помножити площу кожного з них на ординату другої епюри, розташовану під відповідним центром ваги, і результати скласти. Аналогічно роблять і для множення криволінійної трапеції на будь-яку лінійну епюру.

Якщо зазначені вище дії проробити в загальному вигляді, то отримаємо для таких складних випадків формули, зручні для використання в практичних розрахунках (рис. 1.2). Так, результат перемноження двох трапецій (рис. 1.2, б):

$$M_n \times M_m = \frac{\ell}{6EJ_z} (2ac + 2bd + ad + cb).$$

За цією ж формулою можна перемножити і епюри, що мають вид "перекручених" трапецій (рис. 1.2, б), але при цьому добуток ординат, розташованих по різні боки від осей епюр, враховується зі знаком мінус.

Якщо одна з епюр, які перемножуються, окреслена по квадратній параболі (що відповідає навантаженню рівномірно розподіленим навантаженням),

то для перемноження з другою (обов'язково лінійною) епюрою її розглядають як суму (рис. 1.2, в) або різницю (рис. 1.2, г) трапецеїдальної і параболічної епюр.

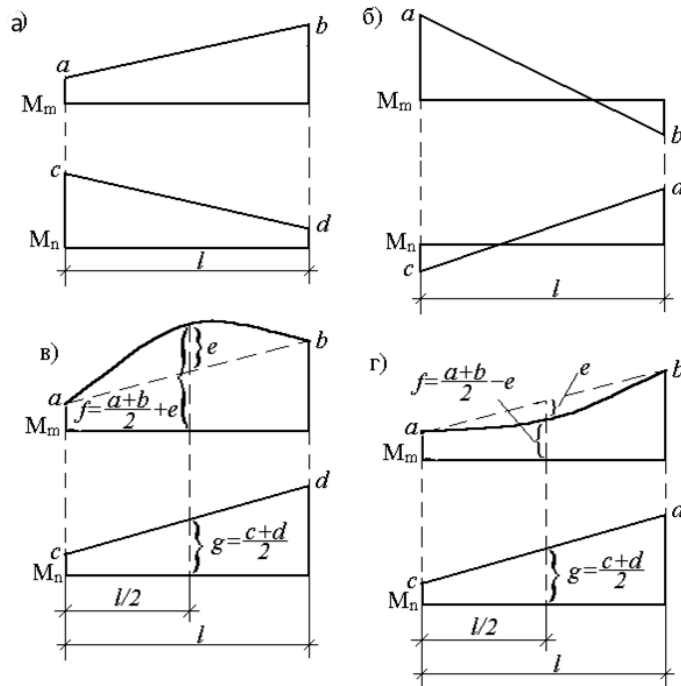


Рис. Д.2.2 Приклади перемноження складних епюр

Результат множення в обох випадках визначається формулою Сімпсона:

$$M_n \times M_m = \frac{\ell}{6EJ_z} (ac + 4fg + bd), \text{ але значення } f \text{ при цьому визначається по-}$$

різному (див. рис. 1.2, в, г), де $e = \frac{q\ell^2}{8}$.

Можливі випадки, коли жодна з епюр, які перемножуються, не є прямолінійною, але хоча б одна з них обмежена ламаними прямими лініями. Для перемноження таких епюр їх попередньо розбивають на ділянки, в межах якої принаймні одна епюра є прямолінійною.

Навчально-методичне видання

Укладачі:

Урсуляк Людмила Вікторівна,
Костриця Сергій Анатолійович,
Федоров Євген Федорович,
Болотов Олексій Олександрович

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи
на тему
«Розрахунок статично невизначуваних рам методом переміщень»

Редактор А. В. Безверхня
Комп'ютерна верстка В. В. Бердо

Формат 60×80 $\frac{1}{6}$ Ум. друк. арк. 4,53 Обл.-вид. арк. 1,76
Зам. №73

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010