

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Запропонован метод диференціальних рівнянь в задачах векторної оптимізації.

Предположен метод дифференциальных уравнений в задачах векторной оптимизации.

Offered method of the differential equations in problem of the vector optimization.

Рассматривается задача векторной оптимизации в следующей постановке

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (1)$$

при условии, что $x \in X$, где

$$X = \{x \in R^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\}. \quad (2)$$

Напомним, что решением задачи (1)-(2) является некоторое множество $X_* \subseteq X$, такое, что любые две точки из этого множества несравнимы между собой по Паретто, т. е. имеет место:

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \leq F_1(y) \\ F_2(x) \leq F_2(y) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} F_1(x) \geq F_1(y) \\ F_2(x) \geq F_2(y) \end{pmatrix},$$

где $x, y \in X_*$, причем среди неравенств имеется одно строгое.

Пусть $x_* \in X_*$, тогда найдется такое $\lambda \geq 0$, что будет иметь место (1):

$$\nabla F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla F_2(x_*) = 0 \quad (3)$$

т. е. данное x_* является некоторой функцией λ . Однако, в большинстве случаев решение уравнения (3) может быть получено только в приближенном случае. В данной работе предлагается метод дифференциальных уравнений для решения уравнения (3). Пусть функции F_1, F_2 дважды непрерывные и дифференцируемые, тогда имеет место дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx_*}{d\lambda} = -(\nabla^2 F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*))^{-1} \cdot \nabla F_2(x_*), \quad (4)$$

где $\nabla^2 F_1(x_*), \nabla^2 F_2(x_*)$ - матрицы, элементы которой частные производные второго порядка:

$$\nabla^2 F_1(x_*) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}};$$

$$\nabla^2 F_2(x_*) = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

относительно уравнения (4) будем предполагать, что матрицы $\nabla^2 F_1(x_*), \nabla^2 F_2(x_*)$ таковы, что при $\lambda \geq 0$ существует обратная матрица $(\nabla^2 F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*))^{-1}$, таким образом, используя уравнение (4) можно построить $x_*(\lambda)$ применяя тот или иной численный метод решения дифференциальных уравнений. Так, например, используя метод Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} x_*(\lambda + \Delta\lambda) &= x_*(\lambda) - \\ &- (\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda)))^{-1} \times \\ &\times \nabla F_2(x_*(\lambda)) \cdot \Delta\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\Gamma = \{x_*(\lambda) : \lambda \geq 0\}$, но может оказаться, что не все точки этого множества принадлежат множеству X , тогда положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap X$, однако может оказаться, что среди множества $\tilde{\Gamma}$ имеются точки, которые сравнимы по Парето. Если введем фильтр Паретто $FP(X)$ (2), который отбирает из множества X точки не сравнимые по Парето, используя этот фильтр, получаем $\Gamma_* = FP(\tilde{\Gamma})$. Относительно множества Γ_* , мы можем сказать, что любые две точки из этого множества несравнимы по Паретто и удовлетворяют условию (3), так как являются решением дифференциального уравнения (4). Для доказательства этого факта вы-

ведем дифференциальное уравнение (4) из уравнения (3).

Пусть $x_*(\lambda)$ является решением уравнения (3), тогда рассмотрим уравнение (3) при $\lambda + \Delta\lambda$ т. е.

$$\nabla F_1(x_*(\lambda) + \Delta x) + (\lambda + \Delta\lambda) \cdot \nabla F_2(x_*(\lambda) + \Delta x) = 0.$$

Разложая в ряд $\nabla F_1, \nabla F_2$ в окрестности $x_*(\lambda)$ и удерживая слагаемые порядка малости $O(\Delta x, \Delta\lambda)$ получим:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))) \cdot \Delta x = \\ = -\nabla F_2(x_*(\lambda)) + O(\Delta x, \Delta\lambda). \end{aligned}$$

Поделив на $\Delta\lambda$ и устремив $\Delta\lambda$ к нулю, приходим к уравнению :

$$(\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla F_2(x_*(\lambda))$$

если матрица

$$\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))$$

имеет определитель отличный от нуля, то получаем уравнение (4).

Изложенные теоретические положения рассматриваем на примере, когда функции F_1 и F_2 имеют вид:

$$F_1 = x_1^2 + 10 \cdot x_2^2; \quad F_2 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2,$$

а множество $X \subset R_2$ представляет собой

$$\begin{aligned} X = \{x \in R_2 : h_1 = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 - 64 \leq 0, \\ h_2 = x_1 + x_2 - 6 \leq 0\}. \end{aligned}$$

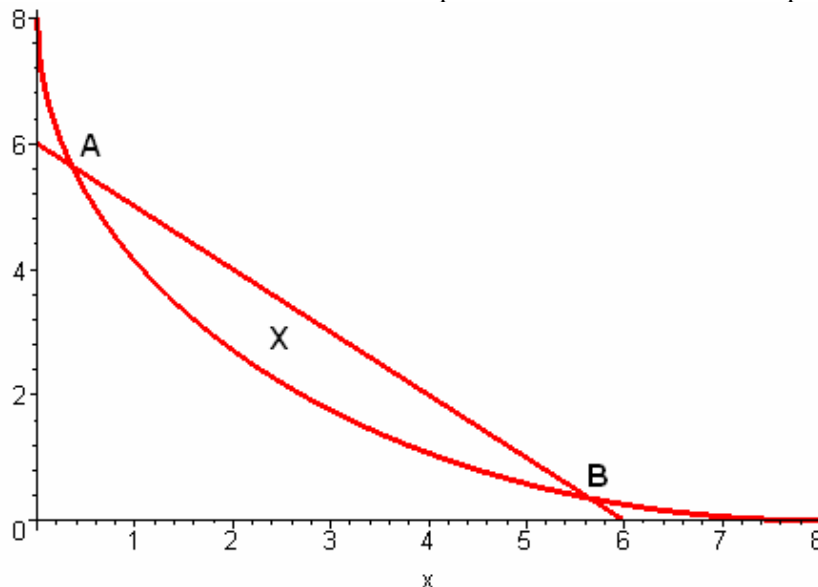


Рис. 1. Геометрическое представление множества X

Данное множество геометрически представлено на рис. 1.

Координаты точек А и В следующие:

$$\begin{cases} x_{1A} = 0.354; & x_{1B} = 5.646; \\ x_{2A} = 5.646; & x_{2B} = 0.364. \end{cases}$$

Представленный пример решим двумя способами:

- используя уравнение (3);
- решая дифференциальное уравнение (4).

Заготовим градиенты функций F_1 и F_2 , составляем систему уравнений, записав уравнение (3) в скалярной форме.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + \lambda \cdot 2 \cdot (x_1 - 3) = 0; \\ 20 \cdot x_2 + \lambda \cdot 2 \cdot (x_2 - 6) = 0, \end{cases}$$

откуда находим $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$, которые будут равны:

$$x_1 = \frac{3 \cdot \lambda}{1 + \lambda}; \quad x_2 = \frac{6 \cdot \lambda}{10 + \lambda}. \quad (6)$$

Параметр λ изменяется от 0 до ∞ .

При $\lambda = 0$ имеем

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0,$$

а при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 6.$$

На рис. 2 представлена кривая Γ рассчитанная с использованием параметрического представления (6). Очевидно, что точки кривой от 0 до С и от D до Е не принадлежат множеству X .

Взяв пересечение Γ с множеством X , получим кривую $\tilde{\Gamma}$, которая представляет собой кривую от точки С до точки D, что и является решением задачи данного примера.

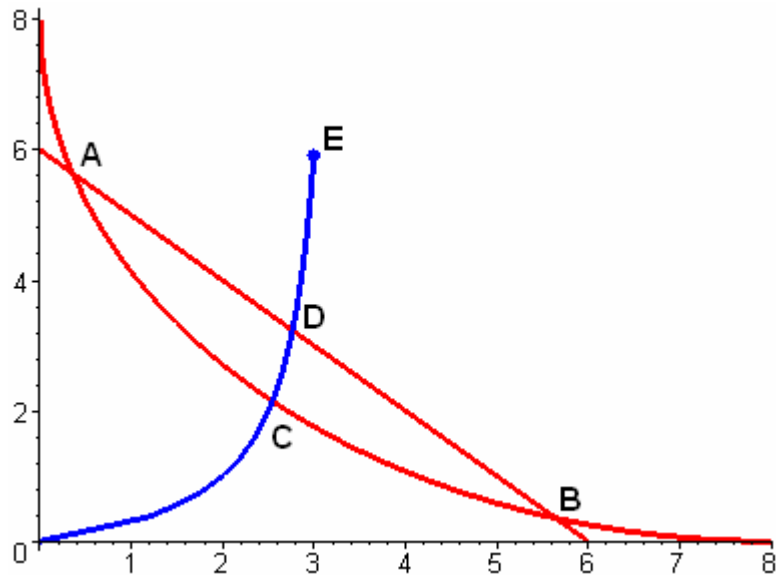


Рис. 2. Кривая $\Gamma = \{x(\lambda), \lambda \geq 0\}$

При построении кривой $\tilde{\Gamma}$ используем функцию

$$H(x) = \max\{h_1(x), h_2(x)\},$$

которая меньше или равна нулю, когда точка $x \in X$.

Применение данной функции заключается в

том, что при построении кривой Γ по формулам (6), каждая точка с помощью H проверяется на принадлежность множеству X (рис. 3).

Таким образом на рис. 3 кривая CD является $\tilde{\Gamma} = \Gamma_*$ и тем самым решением задачи векторной оптимизации для рассмотренного примера.

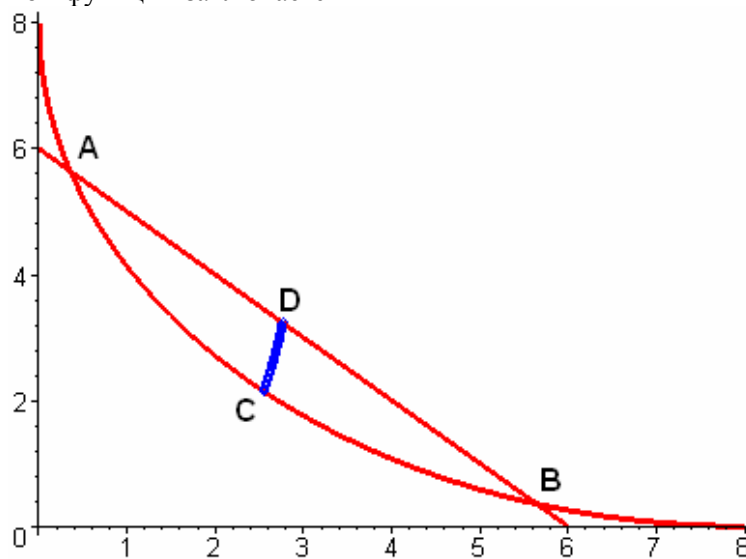


Рис. 3. Геометрическое представление пересечения $\Gamma \cap X$

Теперь рассмотрим решение данного примера с помощью дифференциальных уравнений. В данном примере матрицы из вторых частных производных будут следующими:

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}; \quad \nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2+2 \cdot \lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2 \cdot \lambda} \end{pmatrix},$$

тогда

$$\frac{dx}{d\lambda} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2+2\cdot\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2\cdot\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot(x_1-3) \\ 2\cdot(x_2-6) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = -\frac{2\cdot(x_1-3)}{2+2\cdot\lambda} = -\frac{x_1-3}{1+\lambda}; \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -\frac{2\cdot(x_2-6)}{20+2\cdot\lambda} = -\frac{x_2-6}{10+\lambda}. \end{cases} \quad (7)$$

или в скалярной форме:

Решением системы (7) будем искать, используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Программа реализующая данный подход в среде Maple представляет собой:

```
> eq:={diff(x1(t1),t1)=-(x1(t1)-3)/(1+t1),diff(y1(t1),t1)=-(y1(t1)-6)/(10+t1),x1(0)=0,y1(0)=0};
eq:={d/dt1 x1(t1)=-x1(t1)-3/(1+t1),d/dt1 y1(t1)=-y1(t1)-6/(10+t1),x1(0)=0,y1(0)=0}

> deq:=dsolve(eq,numeric, method=rkf45, output=procedurelist);
> X1:=array(1..1000,[]);Y1:=array(1..1000,[]);
X1:=array(1..1000,[ ])
Y1:=array(1..1000,[ ])

> k:=0:for t1 from 0 by 0.1 to 100 do
x11:=op(2,op(2,deq(t1))):y11:=op(2,op(3,deq(t1))):if
H(x11,y11)<=0 then k:=k+1:X1[k]:=x11:Y1[k]:=y11:end if:end do:
```

В этой программе параметр λ обозначим как t_1 , а решение системы дифференциальных уравнений оформлено в виде процедуры $\text{deq}(t_1)$, которая выдает x_1 и x_2 при конкретном значении t_1 .

На рис. 4 представлено точное решение в виде точек и приближенное в виде сплошной линии. Как следует из этого рисунка с точки зрения точности оба подхода эквивалентны. Естественно возникает вопрос, когда необходимо отдавать предпочтение тому или иному подходу.

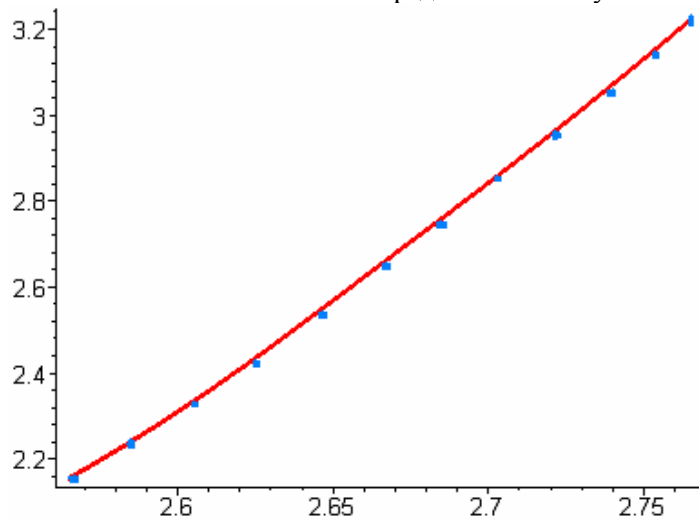


Рис. 4. Точное решение (точки) и приближенное – сплошная линия

Заметим, что при использовании дифференциальных уравнений можно избежать определения обратной матрицы $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$, а пользоваться уравнением

$$(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla^2 F_2,$$

которое в нашем случае принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2+2\cdot\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2\cdot\lambda} \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{d\lambda} = - \begin{pmatrix} 2\cdot(x_1-3) \\ 2\cdot(x_2-6) \end{pmatrix},$$

или в скалярной форме:

$$\begin{cases} (2 + 2 \cdot \lambda) \cdot \frac{dx_1}{d\lambda} = -2 \cdot (x_1 - 3); \\ (20 + 2 \cdot \lambda) \cdot \frac{dx_2}{d\lambda} = -2 \cdot (x_2 - 6). \end{cases}$$

Решением этой системы полностью совпадает с решением системы, когда производные разрешены с помощью обратной матрицы $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$, т. е. с системой (7).

Замечание. Применение метода дифференциальных уравнений представляет собой задачу

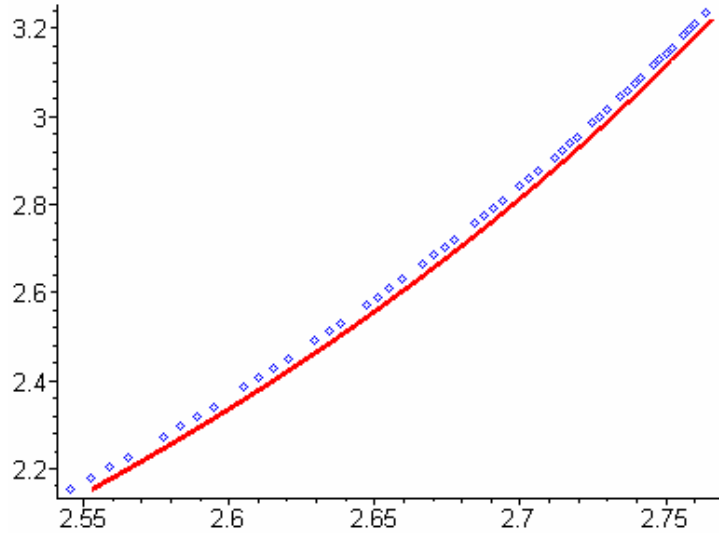


Рис. 5. Сплошная линия точное решение, точки — приближенное решение из-за ошибки в начальных условиях

В общем случае метод дифференциальных уравнений необходимо применять только, когда точное решение уравнения не может быть получено, но весьма осторожным надо быть при получении начальных условий.

Определение начальных условий задачи Каши при определении множества Парето

Задача Каши при определении множества Парето представляет собой:

$$(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla^2 F_2 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$x(\lambda_0) = x_0. \quad (9)$$

Однако, в общем случае решение уравнения (8) при начальных условиях существенно зависит от условий (9), которые как правило неизвестны.

Если кривая X_* является множеством Парето, то взяв любую точку $x_* \in X_*$ имеем

Коши. К этим уравнениям необходимо придать начальные условия, которые можно определить из уравнения $\nabla F_1 = 0$.

В общем случае решение данного уравнения получаем некоторым численным методом, т.е. с определенной погрешностью. Так, например, в нашем примере приближенное решение уравнения $\nabla F_1 = 0$ равно $x_1(0) = 0.05; x_2(0) = 0$.

На рис. 5 представлено отклонение приближенного решения от точного.

$$\frac{|\nabla F_1(x_*)|}{|\nabla F_2(x_*)|} = \lambda_* \quad (10)$$

а скалярное произведение $\langle \nabla F_1(x_*), \nabla F_2(x_*) \rangle \leq 0$. Причем $\cos \varphi_* = -1$, где φ_* угол между векторами $\nabla F_1(x_*)$ и $\nabla F_2(x_*)$.

В общем случае для произвольной точки x имеем

$$\cos \varphi = \frac{\langle \nabla F_1(x_*), \nabla F_2(x_*) \rangle}{|\nabla F_1(x_*)| \cdot |\nabla F_2(x_*)|} \quad (11)$$

и если $\cos \varphi_* \neq -1$, то данная точка не принадлежит X_* .

Введем вектор $U(x, \alpha) = -(\alpha \cdot \frac{\nabla F_1(x_*)}{|\nabla F_1(x_*)|} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\nabla F_2(x_*)}{|\nabla F_2(x_*)|})$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Новое значение x_H будем вычислять по формуле

$$x_H = x + t \cdot U(x, \alpha),$$

где t некоторый шаг.

Подставим в (11) x_H получим

$$\cos \varphi_H = \left\langle \frac{\nabla F_1(x + t \cdot U(x, \lambda))}{|\nabla F_1(x)|}, \frac{\nabla F_2(x + t \cdot U(x, \alpha))}{|\nabla F_2(x)|} \right\rangle$$

и определим α_* и t_* так, чтобы $\cos \varphi_H$ был бы минимальным.

```
> b0:=0:for t from 0.01 by 0.01 to 0.1 do x1:=1;x2:=10; b:=0:for
a from 0 by 0.001 to 1 do
c:=evalf(u12):z1:=evalf(u[1],5):z2:=evalf(u[2],5):x1:=x1-
t*z1:x2:=x1-t*z2:if (c<b and H(x1,x2)<=0) then
b:=c:x11:=x1:x22:=x2:a0:=a:end if:end do:if b<b0 then
b0:=b:x11:=x11:x22:=x22:a0:=a:end if:end
do:print(`alfa`,`a0`):print(`cos`,`b0`):print(`x1`,`x11`,`x2`,`x22`):
2): Поиск начальных условий задачи Коши.
```

Так, например, если $x_1 = 1, x_2 = 10$, то при $\lambda = 1$, $\cos \varphi_H = -0,9999999990$ в качестве начальных значений необходимо взять $x_1 = 2,69497840$; $x_2 = 2,77917940$.

Если $\min_{\lambda, t} \cos \varphi_H = -1$, то $x_H \in X_*$, а ему соответствующее λ_0 определенное по соотношению (10).

Очевидно, если пересечение конуса с вершиной в точке x и образующими параллельно антиградиентам с множеством X_* не пусто, то всегда найдутся такие α_* и t_* , что $\cos \varphi_* = -1$.

Реализация данной задачи в среде Maple представляет собой:

Этому начальному условию соответствует $\lambda = 8,630650947$ и выполнив решение дифференциального уравнения получим часть множества X_* , когда λ изменяется до 100.

Данное решение представлено на рис. 6.

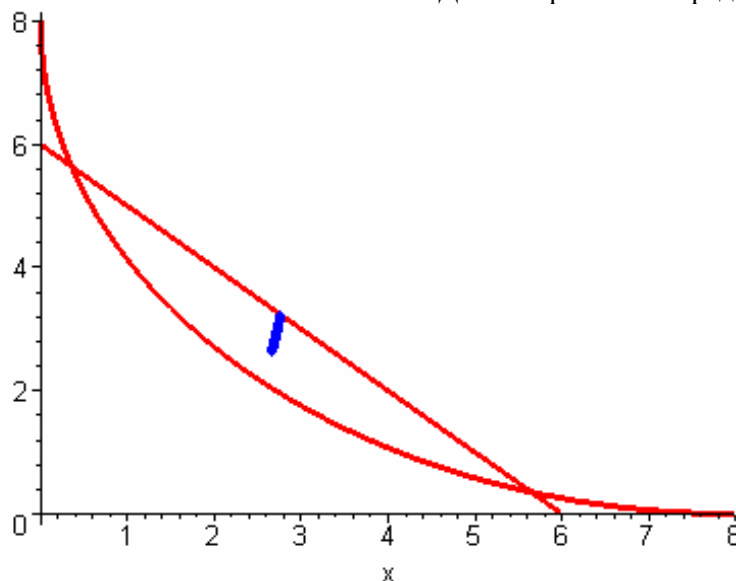


Рис. 6. Решение дифференциального уравнения (4) при полученных начальных условиях

Остальные значения множества X_* получаются, когда будем рассматривать $\lambda < 8,630650947$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босов. А. А. Функции множества и их применения. – Днепропетровск: Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.
2. Mattson C., Messac A. Pareto Frontier Based Concept Selection Under Uncertainty, with Visualization. Optimization and Engineering. Vol.6 № 1, March 2005, pp. 85-115.

Поступила в редакцию 27.07.2007.