

УДК 533.6.013.42

## ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Д.т.н., доцент В. Е. Волкова*

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного  
транспорта имени академика В. Лазаряна*

### **Введение**

Развитие науки и техники вызывает необходимость создания и исследования всё более сложных технических объектов и систем. Вследствие этого, создаются и всё более сложные математические модели процессов проектирования, создания и эксплуатации таких объектов. В настоящее время, для построения математических моделей динамических систем применяется ряд методов: метод выбора, феноменологический подход и метод идентификации.

При построении математических моделей реальных динамических систем существенное влияние оказывает субъективный фактор. Это отражается в выборе степени идеализации исходного динамического процесса, выборе структуры модели и выборе типа нелинейности.

### **1. Современное состояние методов идентификации механических систем**

Исследование моделей сложных систем в большинстве случаев сопряжено со значительными трудностями, которые носят как математический, так и эксплуатационный характер, так как часто связаны с нетривиальными затратами машинного времени. Таким образом, разработка методов редукции моделей сложных механических систем, т.е. приведение таких моделей к более простому виду становится весьма актуальной.

В настоящее время, существует две основные группы методов редукции математических моделей механических систем. Первую группу составляют методы сравнения, при которых исследуемая сложная модель процесса проектирования механической системы заменяется более простой моделью первого приближения. Предполагается, что для модели первого приближения известны основные свойства её решений, такие как, устойчивость, асимптотическая устойчивость, ограниченность решений и т.д. При определённых свойствах моделей первого приближения и реальной системой часто удаётся сделать заключение о качественном поведении решений исходной модели и количественных соотношениях между некоторыми характеристиками обеих моделей. Вторую группу образуют методы редукции, основанные на сопоставлении исходной модели начальной модели и модели более простого вида, полученной из исходной с помощью некоторого преобразования.

Несомненным преимуществом идентификации, является то, что выбор модели основан на объективной информации, получаемой

экспериментальным путем [2,3,7,8]. Результаты, получаемые с использованием таких моделей, как правило, являются удовлетворительным приближением, даже при значительной погрешности применяемых моделей. В виду этого динамическое поведение одного и того же объекта может описываться несколькими математическими моделями отличающимися друг от друга не только значением, отдельных параметров, но и структурой.

Одним из новых активно развивающихся направлений идентификации моделей механических систем является синтез внешнего возмущения в условиях, когда структура упругих и диссипативных известны [6.]

## 2. Постановка задачи

Для широкого ряда механических динамических систем внешнее возмущение отлично от моногармонического. Оно может содержать несколько гармоник, имеющих различные амплитуды. Исследуем вынужденные колебания нелинейной динамической системы вида [3]

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + R(y) = P(t), \quad (1)$$

где  $y$  - обобщенная координата;  $\varepsilon$  - коэффициент демпфирования;  $R(y)$  - нелинейная упругая характеристика;  $P(t)$  - характеристика внешнего возмущения.

Предположим, что нелинейная упругая характеристика описывается симметричной функцией вида

$$R(y) = \alpha y + \beta y^3. \quad (2)$$

Отметим, что стационарные колебания в системе (1) возможны только при периодическом внешнем возмущении  $P(t)$ . Пусть характеристика внешнего возмущения изменяется по закону

$$P(t) = F_1 \cos(\omega_1 t) + Q_1 \sin(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t) + Q_2 \sin(\omega_2 t). \quad (3)$$

Функция  $P(t)$  является периодической в случае кратности частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т.е.

$$\omega_2 = \mu \omega_1, \text{ где } \mu = 0, 1, 2, 3 \dots N. \quad (4)$$

При значениях  $\mu = 0$  и  $\mu = 1$  внешнее возмущение является моногармоническим.

Влияние полигармонического внешнего возмущения приводит к эмергентности – появлению новых свойств системы. Так, линейная механическая система может иметь бесконечное число резонансных диапазонов частот, соответствующих гармоникам внешнего возмущения.

Явление динамического сглаживания также является проявлением полигармонического характера внешнего возмущения. Оно заключается в снижении влияния сил позиционного трения на графиках переходных процессов механических систем. Возникновение эффекта динамического сглаживания возможно только при равенстве амплитуд гармоник внешнего возмущения и кратности частот внешнего возмущения  $\mu = 10 \dots 20$

В статье представлены исследования колебаний механической нелинейной системы при внешнем полигармоническом возмущении.

## **2. Применение фазовых диаграмм к исследованию колебательных процессов**

Исключительная роль в развитии качественных методов исследования динамических систем принадлежит А.А. Андронову [1], Е.А. Леонтовичу, И.И. Гордону, А.М. Ляпунову. Основной задачей классической теории качественного исследования является определение динамических свойств систем без получения замкнутого аналитического решения. С этой целью широко использовались фазовые траектории на плоскости  $(y, \dot{y})$ .

Наибольший интерес представляет фазовая траектория на плоскости  $(y, \ddot{y})$ . Это связано с тем, что энергетические критерии на ней интерпретируются наиболее наглядно [4, 5]. Кроме того, зависимость  $\ddot{y}(y)$  обратно симметрична относительно оси  $y$  графику изменения упругих свойств.

Основная трудность построения фазовых траекторий  $\ddot{y}(y)$  и  $\ddot{y}(\dot{y})$  состоит в необходимости исключить параметр времени  $t$  из соответствующих зависимостей. Аналитически выполнить эту операцию не всегда возможно. Большинство измерительных устройств регистрируют изменения виброперемещений, виброскоростей и виброускорений точек исследуемых систем во времени. Санитарные и технологические нормы вносят ограничения на значения именно этих параметров. Принимая последовательно соответствующие пары значений параметров  $y(t)$  и  $\dot{y}(t)$  или  $y(t)$  и  $\ddot{y}(t)$ , можно получить данные фазовые характеристики.

## **3. Гибридное моделирование динамического поведения механических систем**

Целью гибридного эксперимента являлось исследование стационарных и переходных процессов и их фазовых траекторий (рис. 7), изучение влияния начальных условий на установившиеся режимы колебаний, построение амплитудно-частотных характеристик.

Гибридные вычислительные комплексы (ГВК) представляют собой синтез аналоговых вычислительных комплекса АСС-31 и персонального компьютера. Исследование систем вынужденных колебаний было выполнено на ГВК, созданном на основе персонального компьютера и аналогового

вычислительного комплекса. Для генерирования внешнего возмущения был использован генератор сигналов специальной формы Гб-26, максимальный выходной сигнал которого 10 В, динамический диапазон 0.001-10 В, диапазон частот 0.001-10 кГц. Для визуального наблюдения вычислительного процесса (электрических сигналов с выходов решающих усилителей) использовался двухлучевой осциллограф С1-99. Результаты интегрирования нелинейного дифференциального уравнения передавались посредством интерфейсных устройств в персональный компьютер. Выходные сигналы подавались с соответствующих выходов электронных схем на вход масштабирующего усилителя.

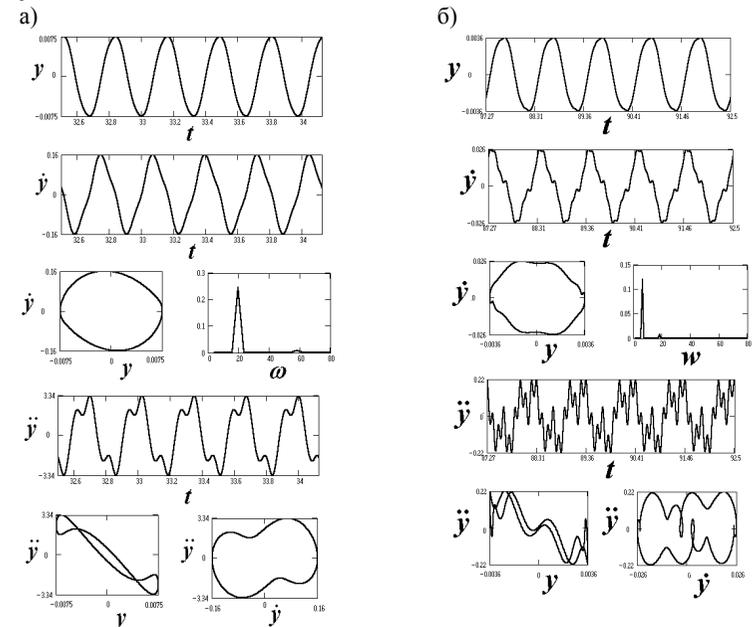


Рис. 1. Временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории симметричной системы с двумя потенциальными ямами: а – моногармоническое возмущение; б – бигармоническое возмущение

Анализ полученных результатов (рис1.) позволяет утверждать, что системы с нелинейными упругими характеристиками весьма чувствительны к закону изменения внешнего возмущения. Влияние внешнего возмущения приводит к появлению расщеплению фазовых траекторий, при этом число дополнительных участков равно числу кратных гармоник внешнего возмущения. Таким образом, широко применяемые при исследовании реальных механических систем допущения о моногармоническом законе изменения внешнего возмущения не всегда являются корректными. Так, сравнительно небольшие отклонения формы внешнего возмущения от

моногармонического не оказывают значительного влияния в широких диапазонах частот (резонансы на частотах  $\omega$  и  $\omega/3$ ), но могут привести к качественным изменениям в прочих диапазонах.

#### 4. Основные выводы

Влияние отклонений внешнего возмущения от моногармонической формы незначительно в широких диапазонах частот, но может привести к качественным изменениям в других диапазонах. Влияние полигармонического возмущения приводит к изменению спектрального состава колебаний и расширению областей существования субгармонических режимов колебаний. Наличие нескольких гармонических составляющих внешнего возмущения приводит к расщеплению фазовых траекторий резонансных колебаний на плоскости  $(y, \dot{y})$ .

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Качественная теория динамических систем второго порядка -М.: Главное издательство. Государственное издательство физико-математической литературы, 1966.- 568с.
2. Гроп. Идентификация механических систем. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
3. Волкова В.Е. Анализ методов параметрической идентификации динамических систем//Сб. «Строительство, материаловедение, машиностроение» - вып.56, - Днепропетровск ПГАСиА. – 2010. – с. 104-109
4. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Днепропетровск: Наука и образование, 2002. – 94 с.
5. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Динамика систем с двумя потенциальными ямами. – Днепропетровск: Арт-Пресс, 2000. – 160 с.
6. Меньшиков Ю.Л. Поляков Н.В. Идентификация моделей внешних воздействий.- Днепропетровск: Наука и образование, 2009.- 188с.
7. Плахтиенко Н.П. Методы идентификации механических колебательных систем// Прикладная механика. - 2000. - 36, № 12- С. 38 - 68.
8. Kerschen G., Worden K., Vakakis A.F., Golinval J.-C., Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics// Mechanical Systems. Signal Process.-vol. 20 (3)-2006.-p 505–592.

УДК 11.22.33.44

**ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ/ Волкова В.Е. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.- С.5 табл.-.- рис.1. - Библиогр.: (8 назв.)**

Статья посвящена разработке методов структурно-параметрической идентификации динамических моделей с использованием фазовых траекторий на плоскости «ускорение – перемещение». В статье представлены исследования колебаний механической нелинейной системы при внешнем полигармоническом возмущении. Автором показана эффективность применения фазовых траекторий для выявления типа динамической модели по данным физического эксперимента.

УДК 11.22.33.44

**ФАЗОВІ ТРАЄКТОРІЇ В ЗАДАЧАХ РОЗПІЗНАВАННЯ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ/ Волкова В.Е. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.- С.5 табл.-.- рис.1. - Библиогр.:(8 назв.)**

Стаття присвячена розробці методів структурно-параметричної ідентифікації динамічних моделей з використанням фазових траєкторій на площині «прискорення – переміщення». У статті представлені дослідження коливань механічної нелінійної системи при зовнішньому полігармонічному збуренні. Автором показана ефективність застосування фазових траєкторій для виявлення типу динамічної моделі за даними фізичного експерименту.

UDC 11.22.33.44

**PHASE TRAJECTORIES ARE IN PROBLEM OF RECOGNITION OF DYNAMIC SYSTEMS OUTER EXCITEMENT/ Волкова В.Е. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.- С.5 табл.-.- рис.1. - Библиогр.:(8 назв.)**

The paper is devoted to development of methods of structural -nonparametric identification of dynamic models with the use of phase trajectories on a plane “acceleration is displacement”. The investigations of mechanical system oscillations under poliharmonic excitement are given in the paper. An author shows efficiency of application of phase trajectories for the definition of dynamic model type from data of physical experiment.