МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Фізика та прикладна математика»

В авторській редакції

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧА ПРО НАЙКОРОТШИЙ ШЛЯХ

Навчально-методичні рекомендації до практичних занять
і самостійної роботи

Електронне видання

ДНІПРО
2026

УДК 519.854(076.5)
К63

Упорядники:
Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова, І. В. Нечай

Електронне видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми
"Безпека інформаційних і комунікаційних систем"
Протокол № 1 від 07.10.25

К63 Комп'ютерна дискретна математика. Задача про найкоротший шлях: навчально-методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи / упоряд. Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова, І. В. Нечай ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид.– Дніпро : УДУНТ, 2026. – 36 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами денної та заочної форми навчання спеціальностей F7 «Комп’ютерна інженерія», F5 «Кібербезпека та захист інформації» під час практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика».

Навчально-методичні рекомендації містять основні теоретичні положення для засвоєння матеріалу, варіанти індивідуальних завдань.

Іл. 16. Бібліогр.: 5 назв.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичні рекомендації підготовлено для здобувачів освіти спеціальностей F7 «Комп'ютерна інженерія» та F5 «Кібербезпека та захист інформації», які вивчають дисципліну «Комп'ютерна дискретна математика». Видання призначене для використання під час практичних занять, виконання індивідуальних завдань і самостійної роботи студентів.

Метою видання є методичне забезпечення опрацювання теми пошуку найкоротших шляхів у зважених графах, формування практичних умінь застосовувати алгоритм Дейкстри та алгоритм Форда–Мура–Беллмана, аналізувати результати обчислень і використовувати прикладні програмні засоби для перевірки й візуалізації розв'язків.

Зміст рекомендацій узгоджено з робочою програмою навчальної дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика», відповідно до якої вивчення дисципліни має забезпечити, зокрема, розуміння основних понять теорії графів, способів їх задання, уміння виконувати операції над графами, а також застосовувати алгоритми знаходження найкоротших шляхів у графах.

Опрацювання матеріалів видання сприяє досягненню таких очікуваних результатів навчання: розуміти основні поняття теорії графів, способи їх задання та вміти проводити операції над ними; визначати матриці інциденцій та досяжності в графах; застосовувати алгоритми знаходження найкоротших шляхів у графах; вибирати методи для опрацювання математичних моделей технічних, економічних та інших прикладних задач, аргументувати застосування алгоритмів теорії графів для розв'язання таких задач на практиці.

Досягнення зазначених результатів забезпечується через послідовне ознайомлення з постановкою задачі про найкоротший шлях, вивчення теоретичних основ алгоритму Дейкстри та алгоритму Форда–Мура–Беллмана, розгляд прикладів їх застосування, виконання індивідуальних завдань, а також використання Maple та Wolfram Cloud для комп'ютерної реалізації відповідних алгоритмів.

Для самоконтролю здобувачам освіти пропонується самостійно виконати індивідуальні варіанти завдань, перевірити правильність побудови найкоротших шляхів і порівняти результати ручних обчислень із результатами, отриманими за допомогою прикладних програмних засобів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Приклад типової ситуації застосування, зображено на рисунку 1.

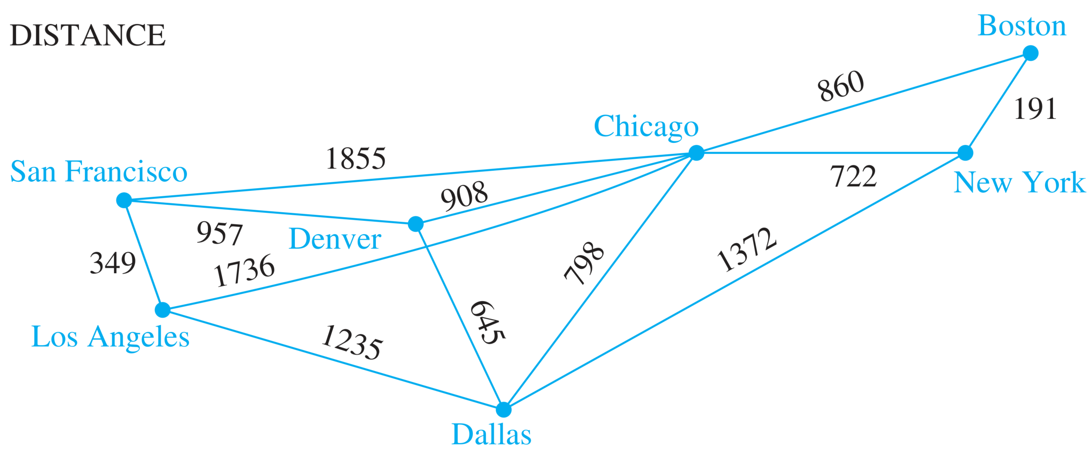

рис. 1

Необхідно знайти найкоротший шлях між Сан-Франциско і Бостоном.

Постановка задачі. Задано зважений граф за допомогою матриці ваг (ваги невід'ємні). Необхідно знайти найкоротший шлях від однієї з двох заданих вершин до іншої.

Загальна характеристика алгоритма. Кожній вершині графа ставиться у віповідність так звана тимчасова помітка, яка є верхньою границею довжини шляху від початкової вершини s до даної вершини. За допомогою певної ітераційної процедури величини поміток поступово зменшуються так, що на кожній ітерації точно одна з тимчасових поміток стає постійною. Це означає, що така помітка дорівнює довжині найкоротшого шляху від вершини s до вершини, якій відповідає ця помітка.

Основні позначення

- $C = [c(x_i, x_j)]$ — матриця ваг,
- $\Gamma(x_i)$ — множина усіх вершин таких, що існує дуга (x_i, x_j),
- $\Gamma^{-1}(x_i)$ — множина усіх вершин таких, що існує дуга (x_j, x_i),
- $l(x_i)$ — помітка вершини x_i,
- s — початкова вершина, t — кінцева вершина.

АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРИ

Крок 1. Покласти

- $l(s) := 0$ і вважати цю помітку постійною,
- $l(x_i) := \infty$ для всіх $x_i \neq s$ і вважати ці помітки тимчасовими,
- $p := s$.

Крок 2. Для всіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma(p)$ і $l(x_i)$ — тимчасова, виконати

$$l(x_i) := \min[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)].$$

Крок 3.

- Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що

$$l(x_i^*) = \min[l(x_i)],$$

- $l(x_i^*)$ вважати постійною,
- $p := x_i^*$.

Крок 4.

- Якщо $p = t$, то $l(p)$ — довжина найкоротшого шляху.
- Якщо $p \neq t$, то перейти на **крок 2**.

Крок 5.

- Серед усіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma^{-1}(p)$ і $l(x_i)$ — постійна, знайти x_i^* (вершина, яка має бути попередньою до вершини p) таку, що

$$l(x_i^*) + c(x_i^*, p) = l(p),$$

- $p := x_i^*$.

Крок 6.

- Якщо $p = s$ — **STOP**.
- Якщо $p \neq s$, то перейти на **крок 5**.

Приклад 1. Дано орієнтований граф:

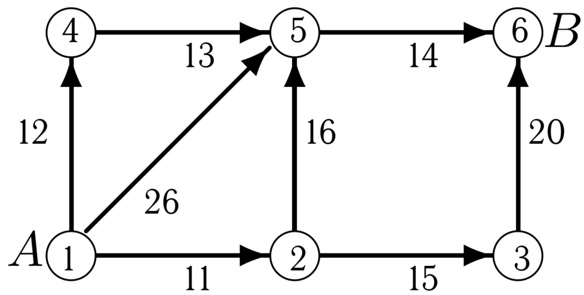

рис. 2

Знайдіть найкоротший шлях від вершини A до вершини B, використовуючи алгоритм Дейкстри.

Матриця ваг даного графа:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 11 & \infty & 12 & 26 & \infty \\
\infty & - & 15 & \infty & 16 & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & \infty & 20 \\
\infty & \infty & \infty & - & 13 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Знаходження довжини найкоротшого шляху

Крок 1:

$l(s) := 0$ і вважати цю помітку постійною,

$l(x_i) := \infty$ для всіх $x_i \neq s$ і вважати ці помітки тимчасовими,

$p := s.$

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞

$l(1) := 0$ - постійна
$l(2) = l(3) = l(4) =$
$= l(5) = l(6) := \infty$
$p := 1.$

Перша ітерація

Крок 2:

Для всіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma(p)$ і $l(x_i)$ - тимчасова, виконати $l(x_i) := \min[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)]$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	11	∞	12	26	∞

$$l(2) := \min\{\infty;\ 0 + 11\} = 11,$$
$$l(4) := \min\{\infty;\ 0 + 12\} = 12,$$
$$l(5) := \min\{\infty;\ 0 + 26\} = 26.$$

Крок 3:

Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$, $l(x_i^*)$ вважати постійною, $p := x_i^*$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞

$l(2) := 11$ - постійна

$p := 2.$

Друга ітерація

Крок 2:

Для всіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma(p)$ і $l(x_i)$ - тимчасова, виконати $l(x_i) := \min[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)]$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	12	26	∞

$$l(3) := \min\{\infty;\ 11 + 15\} = 26,$$
$$l(5) := \min\{26;\ 11 + 16\} = 26.$$

Крок 3:

Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$, $l(x_i^*)$ вважати постійною, $p := x_i^*$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞

$l(4) := 12$ - постійна

$p := 4.$

Третя ітерація

Крок 2:

Для всіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma(p)$ і $l(x_i)$ - тимчасова, виконати $l(x_i) := \min[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)]$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		25	∞

$l(5) := \min\{26;\, 12 + 13\} = 25.$

Крок 3:

Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$, $l(x_i^*)$ вважати постійною, $p := x_i^*$.

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		$\boxed{25}$	∞

$l(5) := 25$ - постійна

$p := 5.$

Четверта ітерація

Крок 2:

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		$\boxed{25}$	∞
		26			39

Для всіх x_i таких, що $x_i \in \Gamma(p)$ і $l(x_i)$ - тимчасова, виконати $l(x_i) := \min[l(x_i),\ l(p) + c(p, x_i)]$.

$$l(6) := \min\{\infty;\ 25 + 14\} = 39.$$

Крок 3:

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		$\boxed{25}$	∞
		$\boxed{26}$			39

Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$, $l(x_i^*)$ вважати постійною, $p := x_i^*$.

$l(3) := 26$ - постійна

$p := 3$.

Крок 3:

Таблиця поміток

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		$\boxed{25}$	∞
		$\boxed{26}$			$\boxed{39}$

Серед усіх x_i таких, що $l(x_i)$ — тимчасова, знайти x_i^* таку, що $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$, $l(x_i^*)$ вважати постійною, $p := x_i^*$.

$l(6) := 39$ - постійна.

Довжина найкоротшого шляху від вершини 1 до вершини 6 дорівнює 39.

Побудова найкоротшого шляху

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 12 & 26 & \infty \\ \infty & - & 15 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 20 \\ \infty & \infty & \infty & - & 13 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞
		26	$\boxed{12}$	26	∞
		26		$\boxed{25}$	∞
		$\boxed{26}$			$\boxed{39}$

Для вершини 6 попередньою може бути або вершина 3, або вершина 5, оскільки тільки з цих вершин виходять дуги, що входять у вершину 6. Перевіримо, кожну з них:

вершина 3 : $l(3) + c(3;\, 6) = \boxed{26} + 20 \neq \boxed{39}$: вершина 3 не є попередньою до вершини 6;

вершина 5 : $l(5) + c(5;\, 6) = \boxed{25} + 14 = \boxed{39}$: вершина 5 **є попередньою** до вершини 6.

Починаємо побудову найкоротшого шляху:

$$6 \longleftarrow 5$$

Шукаємо вершину, попередню до вершини 5 :

вершина 1 : $l(1) + c(1;\, 5) = \boxed{0} + 26 \neq \boxed{25}$: вершина 1 не є попередньою до вершини 5;
вершина 2 : $l(2) + c(2;\, 5) = \boxed{11} + 16 \neq \boxed{25}$: вершина 2 не є попередньою до вершини 5;
вершина 4 : $l(4) + c(4;\, 5) = \boxed{12} + 13 = \boxed{25}$: вершина 4 **є попередньою** до вершини 5.

Продовжуємо побудову найкоротшого шляху:

$$6 \longleftarrow 5 \longleftarrow 4$$

Шукаємо вершину, попередню до вершини 4 :

вершина 1 : $l(1) + c(1;\, 4) = \boxed{0} + 12 = \boxed{12}$: вешина 1 **є попередньою** до вершини 4.

Завершуємо побудову найкоротшого шляху:

$$6 \longleftarrow 5 \longleftarrow 4 \longleftarrow 1$$

Відповідь:
довжина найкоротшого шляху: 39, найкоротший шлях: $1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Орієнтовний граф задано за допомогою матриці ваг.
Виконайте завдання:
1) зобразьте граф;
2) використовуючи алгоритм Дейкстри, знайдіть довжину найкоротшого шляху та сам найкоротший шлях від вершини 1 до вершини 6 або до вершини 7 (з найбільшим номером, в залежності від варіанту);
3) на зображеному графі покажіть знайдений найкоротший шлях.

Варіант 1

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 2

$$\begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 3

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 4

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 5

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 6

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 7

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 8

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 9

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 10

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 11

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 12

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 13

$$\begin{pmatrix} - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 14

$$\begin{pmatrix} - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 15

$$\begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 16

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 17

$$\begin{pmatrix} - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 18

$$\begin{pmatrix} - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 19

$$\begin{pmatrix} - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 20

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 21

$$\begin{pmatrix} - & 4 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 10 \\ \infty & 3 & - & 4 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 22

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 4 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 23

$$\begin{pmatrix} - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 10 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 24

$$\begin{pmatrix} - & 15 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 12 & 18 \\ \infty & 10 & - & 9 & 12 & 19 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 25

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 26

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 8 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 27

$$\begin{pmatrix} - & 4 & 5 & 10 & 11 & \infty \\ \infty & - & 11 & 3 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 28

$$\begin{pmatrix} - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 4 & 6 & - & 5 & 11 \\ \infty & 5 & 5 & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Графи для додаткових завдань

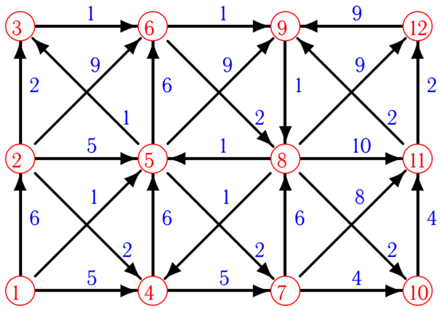

рис. 3

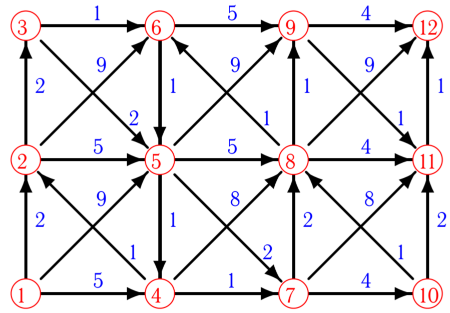

рис. 4

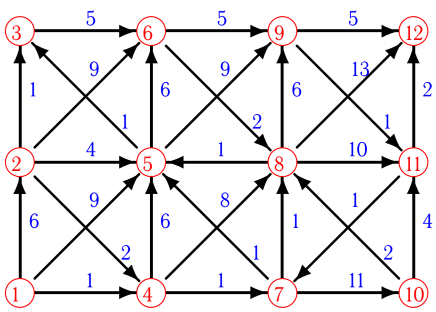

рис. 5

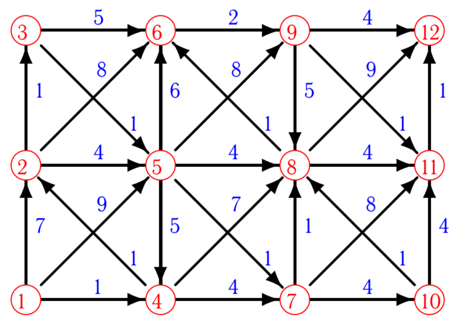

рис. 6

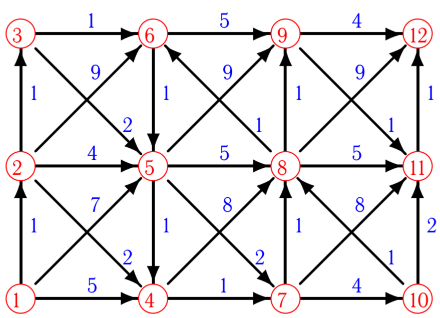

рис. 7

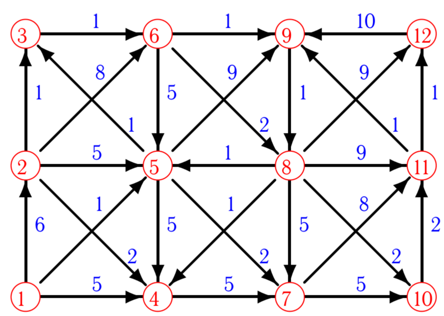

рис. 8

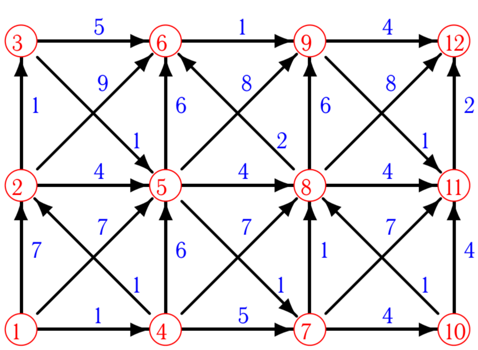

рис. 9

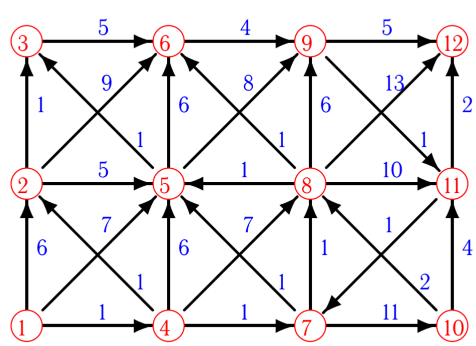

рис. 10

АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРИ В MAPLE

Приклад 1. Дано орієнтований граф:

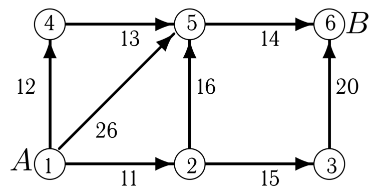

рис. 11

Знайдіть найкоротший шлях від вершини A до вершини B, використовуючи алгоритм Дейкстри.

with(*GraphTheory*) :

G1 ≔ *Graph*({[[1, 2], 11], [[1, 4], 12], [[1, 5], 26], [[2, 3], 15], [[2, 5], 16], [[3, 6], 20], [[4, 5], 13], [[5, 6], 14]}) :

DrawGraph(*G1*, *layout*=*spring*)

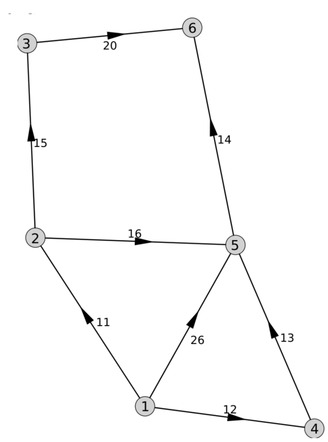

рис. 12

DijkstrasAlgorithm(*G1*, 1, 6)

[[1, 4, 5, 6], 39]

Відповідь:
довжина найкоротшого шляху: 39, найкоротший шлях: $1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

Приклад 2. Орієнтовний граф задано матрицею ваг:

$$\begin{pmatrix}
- & 6 & \infty & 5 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & - & 1 & 2 & 5 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 1 & \infty & - & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & - & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & - & \infty & \infty & 4 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 5 & - & \infty & 2 & 10 & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & - & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & - & 2 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}$$

Знайдіть найкоротший шлях від вершини 1 до вершини 12, використовуючи алгоритм Дейкстри.

```
W1 := Matrix([[0, 6, 0, 5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ], [0, 0, 1, 2, 5, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0,
    6, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 4, 7, 0], [0,
    0, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 2, 10, 8], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
    0, 2], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 0, 0, 0]])
```

$$W1 := \begin{bmatrix}
0 & 6 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}$$

12 × 12 Matrix

$G2 := Graph(directed, weighted, W1)$:

$DrawGraph(G2, layout=spring)$

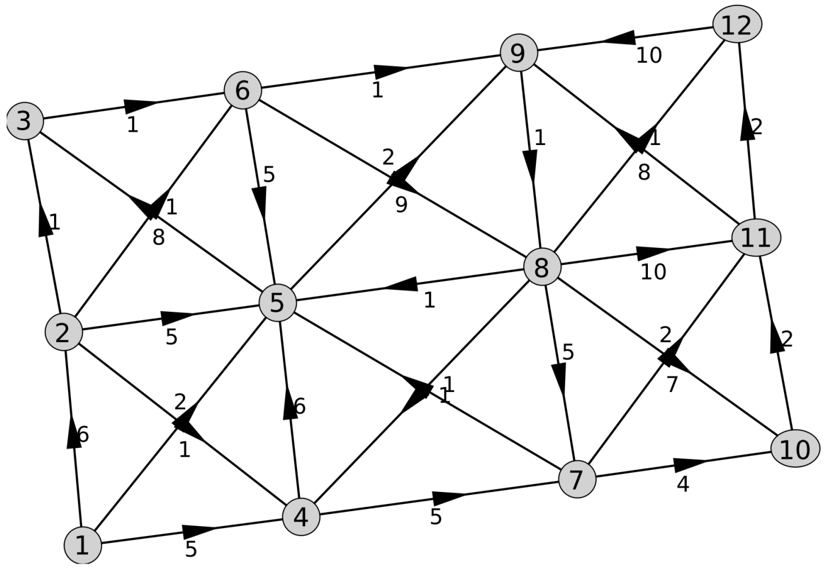

рис. 13

$DijkstrasAlgorithm(G2, 1, 12)$

$[[1, 5, 3, 6, 8, 10, 11, 12], 11]$

Відповідь:

довжина найкоротшого шляху: 11,

найкоротший шлях: $1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12$.

АЛГОРИТМ ФОРДА–МУРА–БЕЛЛМАНА

Алгоритм Форда–Мура–Беллмана призначений для знаходження найкоротших шляхів від початкової вершини s до всіх інших вершин орієнтованого зваженого графа.

На відміну від алгоритму Дейкстри, алгоритм Форда–Мура–Беллмана допускає наявність від'ємних ваг ребер. Якщо у графі існує цикл від'ємної ваги, досяжний із вершини s, то найкоротший шлях не існує.

Ідея алгоритму полягає у послідовному покращенні (релаксації) оцінок довжин шляхів. На кожній ітерації враховуються шляхи, що містять не більше ніж k ребер. Після виконання не більше ніж $n-1$ ітерацій (де n — кількість вершин) отримуються довжини найкоротших шляхів, якщо граф не містить циклів від'ємної ваги.

Приклад. Розглянемо орієнтований граф, який містить дуги з від'ємними вагами (рис. 14).

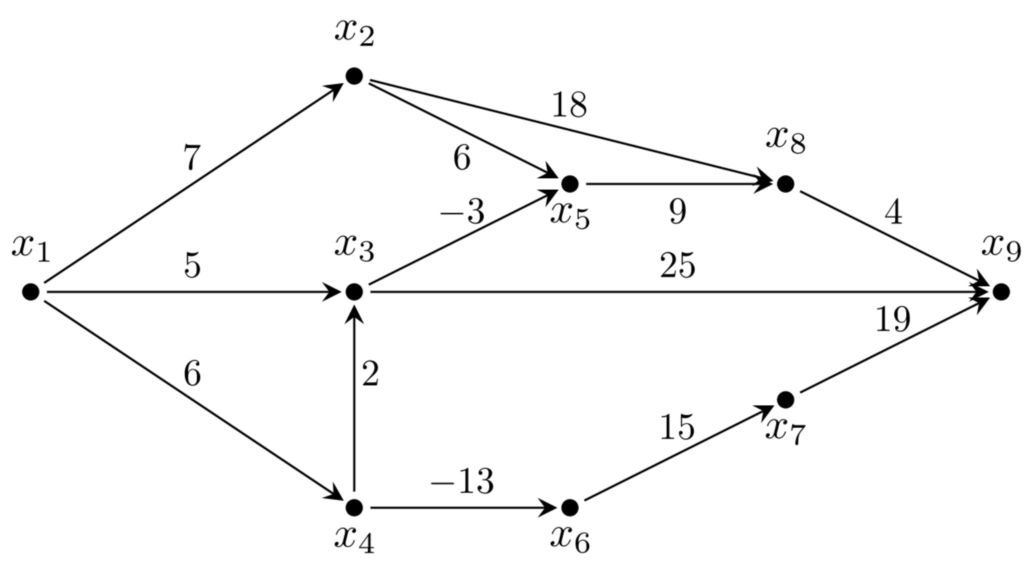

рис. 14

Необхідно знайти найкоротший шлях від вершини x_1 до вершини x_9.

На рисунку 14 зображений граф, який містить від'ємні ваги. Знайти розв'язок можна без спеціального алгоритму, оскільки граф містить небагато ребер. Виконавши перебір варіантів, знайдемо найкоротший шлях:

$$x_1 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_5 \longrightarrow x_8 \longrightarrow x_9$$

$$l_{\min} = 15.$$

На рисунку 15 виділено найкоротший шлях.

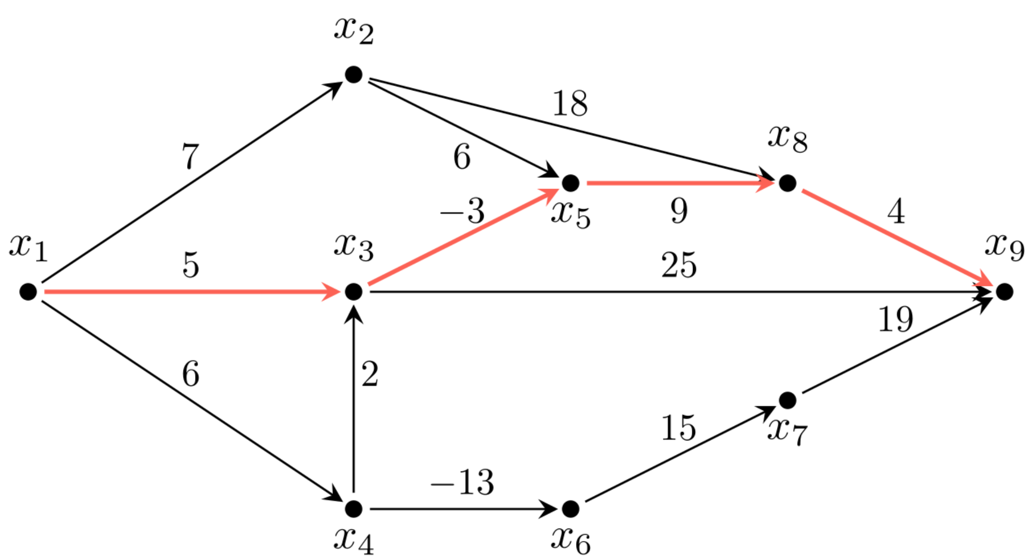

рис. 15

Постановка задачі. Нехай задано орієнтований зважений граф $G = (X, U)$ з матрицею ваг $C = [c(x_i, x_j)]$, де ваги можуть бути як додатними, так і від'ємними. Необхідно знайти найкоротші шляхи від початкової вершини s до всіх інших вершин графа.

Основні позначення

- $l^k(x_i)$ — довжина найкоротшого шляху до вершини x_i, що містить не більше ніж k ребер;
- S — множина вершин, для яких відбулося покращення оцінки на поточній ітерації;
- $\Gamma(x_i)$ — множина вершин, суміжних з x_i;
- $\Gamma^{-1}(x_i)$ — множина вершин, з яких існує дуга в x_i;
- n — кількість вершин графа.

АЛГОРИТМ ФОРДА–МУРА–БЕЛЛМАНА

Крок 1. Ініціалізація:

- $k := 1$;
- $l^1(s) := 0$;
- $l^1(x_i) := c(s, x_i)$ для всіх $x_i \in \Gamma(s)$;
- $l^1(x_i) := \infty$ для інших вершин;
- $S := \Gamma(s)$.

Крок 2. Для кожної вершини $x_i \in \Gamma(S)$, $x_i \neq s$, побудувати множину

$$T_i = \Gamma^{-1}(x_i) \cap S$$

і виконати релаксацію:

$$l^{k+1}(x_i) := \min \left\{ l^k(x_i),\ \min_{x_j \in T_i} \left[l^k(x_j) + c(x_j, x_i) \right] \right\}.$$

Для інших вершин:

$$l^{k+1}(x_i) = l^k(x_i).$$

Крок 3. Перевірка умови зупинки.

- Якщо $l^{k+1}(x_i) = l^k(x_i)$ для всіх x_i, то алгоритм завершується — знайдено найкоротші шляхи.
- Якщо $k = n-1$ і хоча б для однієї вершини виконується $l^{k+1}(x_i) \neq l^k(x_i)$, то граф містить цикл від'ємної ваги.

Крок 4. Оновити множину

$$S := \{x_i : l^{k+1}(x_i) \neq l^k(x_i)\}.$$

Крок 5. Покласти $k := k + 1$ та перейти до **Кроку 2**.

Приклад. Знайдіть найкоротший шлях від вершини x_1 до вершини x_7, якщо задано матрицю ваг орієнтованого графа з вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

$$\begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Ітерація 1

$$l^1(x_1) = 0,$$
$$l^1(x_2) = 15, \quad l^1(x_4) = 12, \quad l^1(x_5) = 10,$$
$$l^1(x_3) = l^1(x_6) = l^1(x_7) = \infty.$$

Таблиця $l^1(x_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	15	∞	12	10	∞	∞

$$S = \{x_2, x_4, x_5\}.$$

Ітерація 2

$$\Gamma(S) = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$$

Для x_3:

$$T_3 = \{x_2, x_4\}, \quad l^2(x_3) = \min\{\infty;\, 15+4;\, 12+10\} = 19.$$

Для x_4:

$$T_4 = \{x_2\}, \quad l^2(x_4) = \min\{12;\, 15-6\} = 9.$$

Для x_5:

$$T_5 = \{x_2, x_4\}, \quad l^2(x_5) = \min\{10;\, 15+2;\, 12+7\} = 10.$$

Для x_6:

$$T_6 = \{x_5\}, \quad l^2(x_6) = \min\{\infty;\ 10 - 5\} = 5.$$

Для x_7:

$$T_7 = \{x_4, x_5\}, \quad l^2(x_7) = \min\{\infty;\ 12 + 9;\ 10 + 5\} = 15.$$

Таблиця $l^2(x_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	15	∞	12	10	∞	∞
0	15	19	9	10	5	15

$$S = \{x_3, x_4, x_6, x_7\}.$$

Ітерація 3

$$\Gamma(S) = \{x_3, x_5, x_6, x_7\}.$$

Для x_3:

$$T_3 = \{x_4\}, \quad l^3(x_3) = \min\{19;\ 9 + 10\} = 19.$$

Для x_5:

$$T_5 = \{x_3, x_4\}, \quad l^3(x_5) = \min\{10;\ 19 - 4;\ 9 + 7\} = 10.$$

Для x_6:

$$T_6 = \{x_3\}, \quad l^3(x_6) = \min\{5;\ 19 + 2\} = 5.$$

Для x_7:

$$T_7 = \{x_3, x_4, x_6\}, \quad l^3(x_7) = \min\{15;\ 19 - 3;\ 9 + 9;\ 5 + 6\} = 11.$$

Таблиця $l^3(x_i)$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	15	19	9	10	5	15
0	15	19	9	10	5	11

$$S = \{x_7\}.$$

Ітерація 4

$$\Gamma(S) = \varnothing.$$

Оскільки значення не змінюються, алгоритм завершується.

Побудова найкоротшого шляху

Після завершення алгоритму отримано остаточні значення:

$$l(x_1) = 0, \quad l(x_2) = 15, \quad l(x_3) = 19, \quad l(x_4) = 9,$$

$$l(x_5) = 10, \quad l(x_6) = 5, \quad l(x_7) = 11.$$

Необхідно відновити найкоротший шлях від вершини x_1 до вершини x_7.

Крок 1. Розглянемо вершину x_7.

$$l(x_7) = 11.$$

Шукаємо вершину x_j, для якої виконується умова

$$l(x_j) + c(x_j, x_7) = l(x_7).$$

Маємо дуги:

$$c(x_3, x_7) = -3, \quad c(x_4, x_7) = 9, \quad c(x_6, x_7) = 6.$$

Перевіряємо:

$$19 - 3 = 16 \neq 11,$$

$$9 + 9 = 18 \neq 11,$$

$$5 + 6 = 11.$$

Отже, попередня вершина — x_6:

$$x_7 \longleftarrow x_6.$$

Крок 2. Переходимо до вершини x_6.

$$l(x_6) = 5.$$

Єдина вхідна дуга:

$$c(x_5, x_6) = -5.$$

Перевірка:

$$10 - 5 = 5.$$

Отже,

$$x_7 \longleftarrow x_6 \longleftarrow x_5.$$

Крок 3. Переходимо до вершини x_5.

$$l(x_5) = 10.$$

Вхідні дуги:

$$c(x_1, x_5) = 10, \quad c(x_2, x_5) = 2, \quad c(x_3, x_5) = -4, \quad c(x_4, x_5) = 7.$$

Перевіряємо:

$$0 + 10 = 10,$$

$$15 + 2 = 17 \neq 10,$$

$$19 - 4 = 15 \neq 10,$$

$$9 + 7 = 16 \neq 10.$$

Рівність виконується для вершини x_1.

$$x_7 \longleftarrow x_6 \longleftarrow x_5 \longleftarrow x_1.$$

Оскільки досягнуто початкову вершину x_1, побудову завершено.

Найкоротший шлях:

$$x_1 \longrightarrow x_5 \longrightarrow x_6 \longrightarrow x_7.$$

$$l_{\min} = 11.$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Знайти найкоротші шляхи від вершини x_1 до всіх інших вершин графа методом Форда–Мура–Беллмана.

Варіант 1

$$\begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 2

$$\begin{pmatrix} - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 3

$$\begin{pmatrix} - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 4

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 5

$$\begin{pmatrix} - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 6

$$\begin{pmatrix} - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 7

$$\begin{pmatrix} - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 8

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 6 & 9 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & 3 & - & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & -6 & 8 & - & 4 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 9

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & -6 & 10 & 12 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & -7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 7 & 10 & \infty & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 10

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 11

$$\begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 12

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 13

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 11 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & -5 & 15 & \infty & 18 & \infty \\ \infty & \infty & - & 7 & -7 & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & 10 & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 14

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 9 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 8 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & -7 & \infty & 8 & 12 \\ \infty & \infty & -4 & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & - & 5 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 15

$$\begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 16

$$\begin{pmatrix} - & 3 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ \infty & 4 & -3 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 17

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 15 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 11 & 18 & 20 \\ \infty & \infty & - & -4 & -10 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 18

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & - & 6 & -6 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -5 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 19

$$\begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & -7 & \infty \\ \infty & -8 & \infty & - & \infty & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 5 & 9 & - & 4 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 20

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 21

$$\begin{pmatrix} - & \infty & -11 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 12 & 8 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & 17 & -9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 & 27 \\ \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 22

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 15 & \infty & 9 & 22 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -7 & -8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & - & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 23

$$\begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 12 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & -8 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 24

$$\begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 3 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & 6 & -8 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & - & 4 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 25

$$\begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 26

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 27

$$\begin{pmatrix} - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 28

$$\begin{pmatrix} - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 29

$$\begin{pmatrix} - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Варіант 30

$$\begin{pmatrix} - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

АЛГОРИТМ ФОРДА–МУРА–БЕЛЛМАНА В WOLFRAM CLOUD

Wolfram Cloud (Wolfram Language) надає вбудовані засоби для роботи з орієнтованими зваженими графами та задачами пошуку найкоротших шляхів. Побудова графа здійснюється на основі матриці ваг, після чого застосовуються стандартні функції для знаходження довжини та самого найкоротшого шляху. Wolfram Language автоматично обирає алгоритм залежно від типу ваг:

- якщо всі ваги невід'ємні — використовується алгоритм Дейкстри;
- якщо у графі є від'ємні ваги — застосовується алгоритм Форда–Мура–Беллмана.

Таким чином, користувачеві не потрібно явно задавати алгоритм — система самостійно визначає оптимальний метод обчислення. Обмеженням є наявність від'ємного циклу, досяжного зі стартової вершини. У такому випадку найкоротший шлях не існує, оскільки довжину шляху можна необмежено зменшувати. Далі розглянемо приклад розв'язання задачі пошуку найкоротшого шляху методом Форда–Мура–Беллмана у Wolfram Cloud.

Приклад. Знайти найкоротший шлях від вершини 1 до вершини 7, якщо орієнтований граф задано матрицею ваг:

$$\begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Блок коду

```
m = {
 {0, 15, Infinity, 12, 10, Infinity, Infinity},
 {Infinity, 0, 4, -6, 2, Infinity, Infinity},
 {Infinity, Infinity, 0, Infinity, -4, 2, -3},
 {Infinity, Infinity, 10, 0, 7, Infinity, 9},
 {Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, 0, -5, 5},
 {Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, 0, 6},
 {Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, Infinity, 0}
};

g = WeightedAdjacencyGraph[m];

FindShortestPath[g, 1, 7]
GraphDistance[g, 1, 7]
```

Пояснення до коду

1) Матриця `m` задає ваги дуг графа.
2) `WeightedAdjacencyGraph[m]` задає орієнтований зважений граф.
3) `FindShortestPath[g, 1, 7]` визначає послідовність вершин найкоротшого шляху.
4) `GraphDistance[g, 1, 7]` обчислює довжину цього шляху.

Wolfram автоматично застосовує алгоритм Форда–Мура–Беллмана, оскільки в матриці присутні від'ємні ваги.

Результат

$$\{1, 5, 6, 7\}$$

$$11$$

Отже, найкоротший шлях:

$$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7,$$

довжина шляху дорівнює 11.

Блок коду

```
 g2 = SimpleGraph[g];
 Graph[g2,
 VertexLabels -> Placed["Name", Center],
 EdgeLabels -> Placed["EdgeWeight", Center],
 VertexSize -> 0.35,
 VertexLabelStyle -> Directive[14],
 EdgeLabelStyle -> Directive[14],
 EdgeStyle -> Thick,
 ImageSize -> Large
]
```

Пояснення

1) `g2 = SimpleGraph[g]` формуємо граф без петель;
2) `VertexSize -> 0.35` збільшує розмір вершин;
3) `VertexLabelStyle -> Directive[14]` задає розмір шрифту номерів вершин;
4) `EdgeLabelStyle -> Directive[14]` збільшує розмір чисел ваг;
5) `EdgeStyle -> Thick` збільшує товщину ребер;

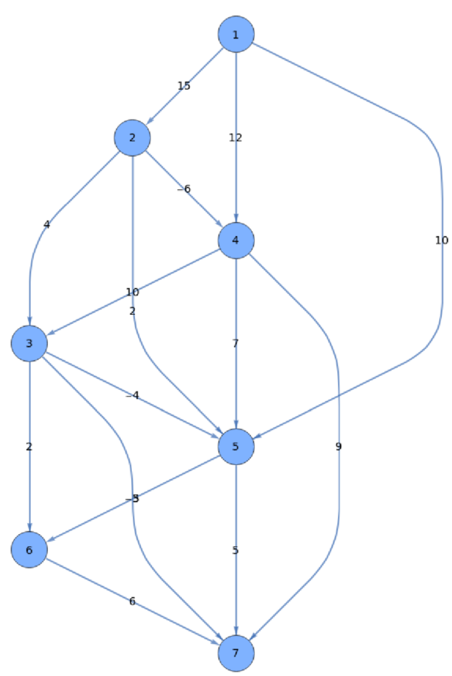

рис. 16

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Журавчак Л. М. – *Дискретна математика для програмістів*. Видавництво: Львівська політехніка, 2019. - 420 с.

2. Манзій О. С., Тесак І. Є. – *Дискретна математика*. Видавництво: Львівська політехніка, 2023. - 212 с.

3. Терентьєв О. О. та ін. – *Дискретна математика*. Видавництво: КНУБА, 2024. - 343 с.

4. Манзій О. С., Тесак І. Є., Ковалець І. І., Чарковська Н. В. – *Дискретна математика. Практикум*. Видавництво: Львівська політехніка, 2016. - 210 с.

5. Крива Н. Р., Блащак Н. І. – *Курс лекцій з дисципліни «Дискретна математика», розділ «Теорія графів».* Видавництво: ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2023. - 40 с.

Навчально-методичне видання

Максименкова Юлія Анатоліївна,
Михайлова Тетяна Федорівна,
Нечай Ігор Вікторович

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧА ПРО НАЙКОРОТШИЙ ШЛЯХ

Навчально-методичні рекомендації
до практичних занять та самостійної роботи

Електронне видання

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка І. В. Нечай

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1,876 від 12.06.2026)

Формат 60х84$^{1/16}$ Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 2.11.
Зам. № 58

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010