

УДК 621.891

О. А. МИКОСЯНЧИК<sup>1</sup>, Н. О. КУЗИН<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный авиационный университет, Украина

<sup>2</sup>Львовский филиал Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Украина;

Львовский научно-исследовательский институт судебных экспертиз, Украина

## К ВОПРОСУ ВЫБОРА МЕТОДИКИ УСТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ТРИБОПРОЦЕССОВ ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ПАР ТРЕНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

*Предложена задача анализа функциональных взаимосвязей между входными параметрами трибосистемы, материалом контактных поверхностей и смазочного материала при трении с помощью трибологических инвариантов. Рассмотрены инварианты, описывающие механическое взаимодействие тел; учитывающие физико-химические процессы в контакте; характеризующие тепловые факторы, возникающие при трении и износе. Использован метод регрессионного анализа для математической обработки экспериментальных данных, адекватность модельного приближения которого оценивается обобщенным аддитивным функционалом, что позволяет использовать функцию для интерполяции и экстраполяции данных.*

**Ключевые слова:** трение, математическое моделирование, трибологические инварианты, регрессионный анализ, аддитивный функционал.

**Проблема описания контактного взаимодействия пар трения.** Фрикционное взаимодействие, вследствие сложности и многообразия физико-химических процессов, которые их сопровождают, часто невозможно с необходимой полнотой и точностью описывать исключительно с помощью моделей механики.

Неполнота информации о явлениях сопровождающих трение тел и, как результат, недостаточная точность при их моделировании и расчетах, существенно осложняет проектирование элементов конструкций и узлов, которые работают в условиях фрикционного контакта. Структурная приспособляемость и изменение трибологической системы в процессе эксплуатации могут существенным образом изменить выходные параметры, используемые при прогнозировании ресурса узла трения.

Одним из способов решения данной научной проблемы является совместное использование экспериментальных исследований с последующим установлением аналитических зависимостей, которые описывают особенности трибоконтакта. При физическом моделировании трибологических процессов важно использовать методику испытаний, которая может оценить работу трибосистемы в реальных условиях эксплуатации, выявить закономерности влияния состава, строения, состояния структурных компонентов на характер контактного взаимодействия и триботехнические свойства контактных поверхностей, установить кинетику изнашивания при нелинейной зависимости скорости износа от контактных параметров. Математическое моделирование трибологических процессов включает получение критериев подобия и применение критериальных зависимостей для прогнозирования трибологических характеристик узла трения при эксплуатации [1; 2].

Структура упрощенной математической модели двигателя внутреннего сгорания для моделирования влияния химмотологических и трибологических про-

цессов на динамику двигателя, его КПД и смазочную способность, основывается на двух требованиях – универсальности и адекватности [3]. Универсальность позволяет использовать модель в широком диапазоне внешних условий, в том числе – в составе моделей более высокого уровня. Адекватность обеспечивает соответствие модели конкретным условиям проведения эксперимента. При этом основной целью математического моделирования является прогнозирование протекания трибологических процессов в различных условиях, к которым относятся и условия, не охватываемые натурным экспериментом.

Численное моделирование механизмов трения в граничном и смешанном режимах смазочного действия, доминирующих при нестационарной работе элементов трибосопряжений, является перспективным направлением в плане оценки изменения свойств конструкционных материалов при эксплуатации. В работе [4] с использованием комбинированных численных и экспериментальных подходов приведены результаты моделирования проявления смазочным материалом вязко-упругих свойств при воздействии давления в закрытых смазочных областях, образующихся на поверхности металла. В работе [5] разработана методика математического моделирования переходных процессов в трибосистемах, позволяющая определять ресурс и механические потери на трение проектируемых трибосистем с учетом износа на приработку.

При экспериментально-теоретическом описании фрикционного взаимодействия тел в конкретных условиях эксплуатации важно не только установить количественные взаимосвязи между исследуемыми величинами, но и построить обобщенные зависимости, которые не только подтверждают количественные экспериментальные взаимосвязи, но и позволяют прогнозировать поведение трибоконтрукций при изменении режимов их работы.

**Цель работы** – разработка методики оценки эксплуатационных характеристик трибосистем с учетом трибологических инвариантов, характеризующих особенности физико-механических процессов возникающих в условиях трения.

**Обобщенная постановка задачи.** На данный момент сформировались два подхода к решению задач моделирования и идентификации сложных систем: содержательное моделирование (*hard modeling*) и формализованное моделирование (*soft modeling*) [6].

В первом случае на основе известных базовых представлений о закономерностях процессов строится система дифференциальных уравнений, решение которой позволяет исследовать особенности поведения искомого объекта.

Второй подход используется тогда, когда идентификация физико-химических процессов в исследуемом объекте слишком сложна или невозможна.

При этом наиболее эффективным на данный момент подходом является подход, который базируется на построении функциональных приближений трения и износа тел с помощью трибологических инвариантов [7].

На данный момент выделяют три основных группы трибологических инвариантов: 1) описывающие механическое взаимодействие тел; 2) учитывающие физико-химические процессы в контакте; 3) представляющие тепловые факторы, возникающие при трении и износе.

Для учета механического взаимодействия тел, в литературе приняты следующие инварианты:

$\Phi_a$  – комплекс, характеризуючий напружене стан тіл в зоні контакту ( $\Phi_a = \frac{p}{HB}$  или  $\Phi_a = \frac{f \cdot p}{HB}$ , где  $p$  – нормальное контактное давление,  $f$  – коэффициент трения,  $HB$  – твердость материала);

$\Phi_{см}$  – комплекс, определяющий относительную толщину смазочного слоя ( $h$  – толщина слоя смазки,  $\chi = R_a = (R_{a1}^2 + R_{a2}^2)^{1/2}$ ,  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$  – среднестатистические отклонения шероховатости);

$\Phi_y = \frac{\xi \cdot p}{\sigma_{-1}}$  – инвариант, который используется для характеристики усталостной прочности поверхностей трения ( $\xi$  – коэффициент, который зависит от коэффициента трения  $f$  и напряженного состояния в контакте,  $\sigma_{-1}$  – предел усталости материала в данных условиях работы);

$\Phi_{ш}$  – инвариант, который характеризует шероховатость поверхности трения, он имеет различный вид:

1.  $\Phi_{ш} = \frac{r}{R_a}$ , где  $r$  – средний радиус микронеровности;

2.  $\Phi_{ш} = \frac{S_{ш}}{R_a}$ , где  $S_{ш}$  – средний шаг неровностей;

3.  $\Phi_{ш} = \frac{R_{\max}}{b^{1/v}}$ , где  $R_{\max}$  – наибольшая высота неровностей профиля,  $b^{1/v}$  – параметр опорной кривой.

По мнению авторов, при рассмотрении особенностей контактного взаимодействия выражение, описывающие напряженное состояние в зоне контакта  $\Phi_a = \frac{f \cdot p}{HB}$  существенно упрощено, поскольку необходимо также учитывать не только твердость непосредственно на поверхности, но и ее 3-D функциональное распределение (градиентность), которая может существенно изменяться в результате конструктивной, технологической или эксплуатационной модификации.

Например, проведенный анализ изменения микротвёрдости ( $H_{20}$ ) приповерхностных слоёв стали 45 при трении качения с проскальзыванием от 3 до 40% выявил неоднородность прочностных свойств металла по глубине (рис.1). Исходная поверхность стали 45 после закалки, высокотемпературного отпуска и шлифования характеризуется положительным градиентом механических свойств с максимальной зоной упрочнённого слоя на глубине 75 – 95 мкм ( $H_{20}$  составляет 5290МПа) (рис.1, а).

Для контактных поверхностей с минимальным проскальзыванием 3% до глубины 50 мкм установлено разупрочнение приповерхностных слоёв металла в пределах 1700 – 1000 МПа, а в центральной части по длине контакта, соответствующей линии соприкосновения исследуемых образцов, наблюдается расширение объёма упрочнённого металла до глубины 200 мкм (рис.11, б). С увеличением проскальзывания до 20% зона разупрочнения охватывает приповерхностные слои до 20–25 мкм, на глубине 40 мкм начинается упрочнение приповерхностных слоёв (рис.11, в).

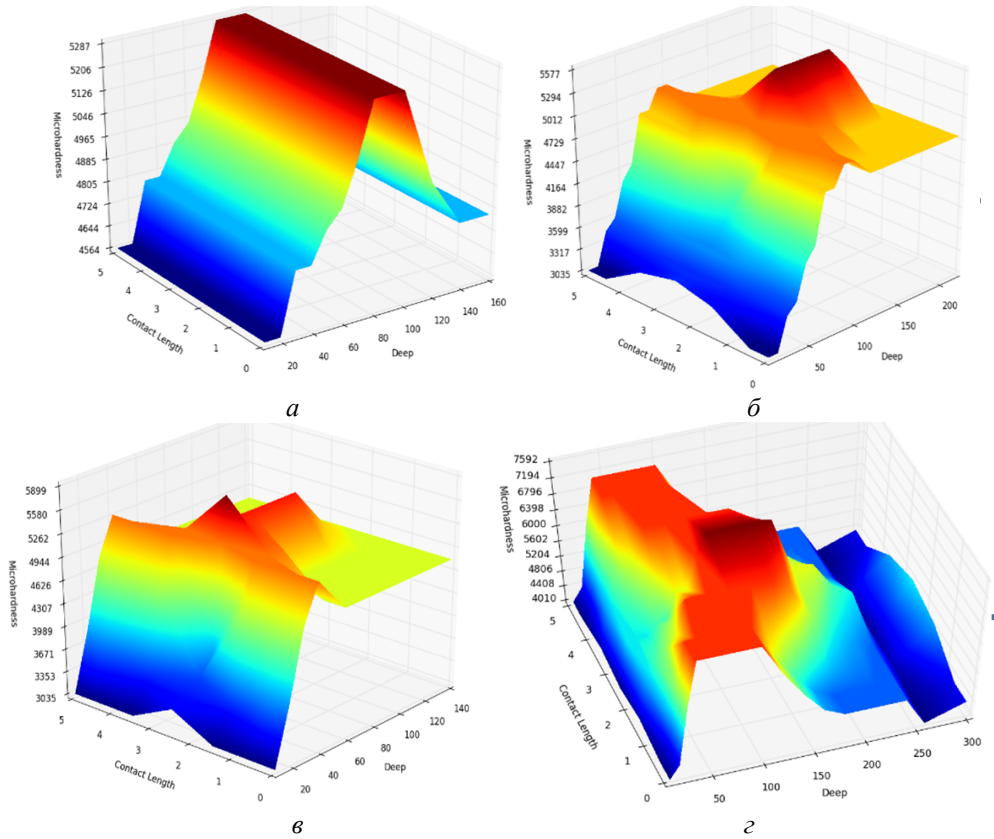


Рис. 1. Распределение микротвердости поверхностных слоев металла по глубине по линии контакта пар трения

Установлена аналогичная эпюра распределения микротвёрдости по линии соприкосновения пар трения – зона максимального упрочнения распространяется на глубину до 120 мкм и соответствует  $H_{20}=5500$  МПа. Для контактных поверхностей с проскальзыванием 40% установлен минимальный объём разупрочнённого слоя – микротвёрдость приповерхностных слоёв снижается на 400 – 500 МПа до 10 мкм по глубине (рис.11, з). Нижележащие слои характеризуются постепенным сильным упрочнением до 7600 МПа на глубине до 160 мкм.

Для учета пространственной нелокальности поверхности твердости предлагается, в соответствии с работой [8], вместо  $HB$  ввести усредненное значение  $\langle HB \rangle$ , которое вычисляется по формуле:

$$\langle HB \rangle = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} HB(x) dx, \quad (1)$$

где  $V^*$  – рассматриваемая окрестность локальной области.

С учетом [9], примем что  $V^* \approx (1.2...1.3) \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3$ , где  $d$  – диаметр единичного пятна контакта.

При анализе физико-химического воздействия среды рассматриваются следующие инварианты:

$$\Phi_{\text{кин}} = \frac{pV\tau_0}{HB \cdot d_\phi} - \text{комплекс, характеризующий временной фактор физико-}$$

химических превращений в области контакта ( $p$  – контактное давление,  $V$  – относительная скорость перемещения в области контакта,  $\tau_0$  – характерное давление,  $d_\phi$  – средний диаметр пятна контакта);

$$\Phi_{\text{сп.ад.}} = \frac{R \cdot T}{Q} - \text{комплекс, который описывает свойства граничной смазки ад-}$$

сорбционной природы ( $R$  – газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура в контакте,  $Q$  – теплота абсорбции смазочных слоев).

При учете влияния на изнашивание тепловых факторов рассматриваются следующие инварианты:

$$\Phi_{\text{к.т.}} = \frac{t}{t_{\text{кр}}} - \text{комплекс, который учитывает влияние контактной температуры}$$

( $t$  – температура в зоне контакта тел,  $t_{\text{кр}}$  – критическая температура, которая характерна для заданных условий контакта тел);

$$\Phi_{\text{к.т.с.}} = \frac{q\delta_T}{\lambda t_{\text{кр}}} - \text{комплекс, который характеризует влияние температурного}$$

градиента и теплового граничного слоя ( $q$  – плотность теплового потока,  $\delta_T$  – толщина теплового слоя,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности);

$$\Phi_{\text{м.н.}} = \frac{E\alpha\Delta t}{(1-\nu)\sigma_{\text{кр}}} - \text{комплекс, который определяет термонапряженность по-}$$

верхностных слоев ( $E$  – модуль упругости,  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $\Delta t$  – прирост температуры,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma_{\text{кр}}$  – критический уровень напряжений);

$\Phi_{\text{т.с.}}$  – комплекс характеризующий способность к схватыванию пары трения, который выражается как отношение теплосодержания материала при нагреве к температуре контактного плавления к пластической постоянной ( $\rho$  – плотность,  $c$  – удельная теплоемкость,  $K$  – пластическая постоянная материала), в некоторых случаях ее можно представить в виде:  $\frac{\rho c \Delta t}{\sigma_T}$ , где  $\Delta t$  – прирост температуры до контактного плавления,  $\sigma_T$  – предел текучести материала.

**Разработка методики оценки эксплуатационных характеристик трибосистем.** Математическая обработка экспериментальных данных зависимости поведения фрикционной системы от трибологических инвариантов предлагается проводить при помощи методов регрессионного анализа по следующему алгоритму:

1. Выбор и построение математической модели отклика исследуемой системы (линейной и нелинейной);
2. Константное наполнение модели с помощью метода наименьших квадратов;
3. Установление погрешности математической модели и экспериментальных данных;
4. Оценка модели с помощью совокупности критериев качества;

5. Прогнозирование поведения исследуемой системы при помощи построенной модели.

Рассмотрим вышеприведенный алгоритм подробнее.

Выбор математической модели будем проводить в общем случае в следующем виде [10]:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 f_1(x_1) + \dots + b_k f_k(x_k) + \dots + b_n f_n(x_i, x_j) + \dots + b_h f_h(x_1, \dots, x_k), \quad (2)$$

где  $b_0, \dots, b_h$  – искомые коэффициенты математической модели,  $x_1, \dots, x_k$  – управляемые факторы,  $f_1, \dots, f_h$  – известные базисные функции от управляемых параметров.

Константное наполнение (поиск коэффициентов  $b_0, \dots, b_h$ ) будем проводить при помощи модифицированного метода наименьших квадратов, который сводится к следующему выражению:

$$R = \sum_{i=1}^N \left( \hat{y}(x_1^i, \dots, x_k^i) - y_i \right)^2 \cdot \alpha_i(x_1^i, \dots, x_k^i) \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $\alpha_i(x_1^i, \dots, x_k^i)$  – заданные весовые функции,  $\hat{y}(x_1^i, \dots, x_k^i)$  – значение получаемое в результате модельного приближения,  $y_i$  – значение, получаемое в результате эксперимента.

В случае, если  $\alpha_i(x_1^i, \dots, x_k^i)$  для  $i=1 \dots N$  выражение (3) превращается в классический метод наименьших квадратов.

Функционал (3) эквивалентен следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial b_0} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial R}{\partial b_h} = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

которая является базовой для поиска коэффициентов  $b_0, \dots, b_h$ .

Критериями качества построенной математической модели примем следующие показатели:

1. Среднее абсолютное отклонение (Mean Absolute Derivation, MAN):

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_t$  – погрешность (отклонение) между расчетными (модельными) и экспериментальными данными в точке  $t$ ,  $n$  – число экспериментальных данных.

2. Среднеквадратическая ошибка (Mean Squared Error, MSE):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2. \quad (6)$$

3. Сумма квадратов ошибки (Sum Squared Error, SSE):

$$SSE = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2. \quad (7)$$

4. Средняя абсолютная ошибка в процентах (Mean Absolute Percentage Error, MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|\varepsilon_t|}{Y_t}, \quad (8)$$

где  $Y_t$  – экспериментальные данные в точке  $t$ .

5. Средняя процентная ошибка (Mean Percentage Error, MPE):

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t}{Y_t} \cdot 100, \quad (9)$$

6. Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}, \quad (10)$$

где  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t$ . Чем ближе  $R^2$  к 1, тем лучше модель описывает реальные данные. Модель считается адекватной, если  $R^2 > 0,75$ .

7. Скорректированный коэффициент детерминации (СКД):

$$СКД = 1 - \frac{n-1}{n-r-1} (1-R^2), \quad (11)$$

где  $r$  – размерность модели.

8. Стандартную ошибку оценки будем определять по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{SSE}{n-r-1}} = \sqrt{MSE}. \quad (12)$$

9. Величина коррелированности факторов характеризуется парным коэффициентом корреляции:

$$r_{ij}(x_i, x_j) = \frac{\sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)^2 \sum_{t=1}^n (x_{jt} - \bar{x}_j)^2}}, \quad (13)$$

где  $x_{it}$ ,  $x_{jt}$  – значение  $i$ -го,  $j$ -го фактора в  $t$ -ом опыте,  $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{it}$ ,  $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{jt}$

10. Связь между статистикой  $F$  и значением  $R^2$  описывается соотношением:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \left( \frac{n-r-1}{r} \right). \quad (14)$$

При уровне значимости  $\alpha$  гипотеза про значения коэффициентов  $b_0, \dots, b_n$  принимается, если  $F > F_\alpha$ .

Для принятия решения на основе всей совокупности критериев предлагается следующий обобщенный аддитивный функционал:

$$G_0 = \sum_{i=1}^q G_i \cdot \beta_i, \quad (15)$$

где  $G_i = \{1, \text{ если данные удовлетворяют } i\text{-му критерию}; 0, \text{ в ином случае}\}$ ,  $\beta_i$  – весовые значения функции  $G_i$ ,  $q$  – количество критериев.

Если  $G_0 < G_0^{kp}$ , то предложенное модельное приближение неадекватно описывает данные, если  $G_0 \geq G_0^{kp}$ , то мы имеем адекватное модельное приближение. В последнем случае, мы можем использовать функцию вида (2) для интерполяции и экстраполяции данных (рис. 2).

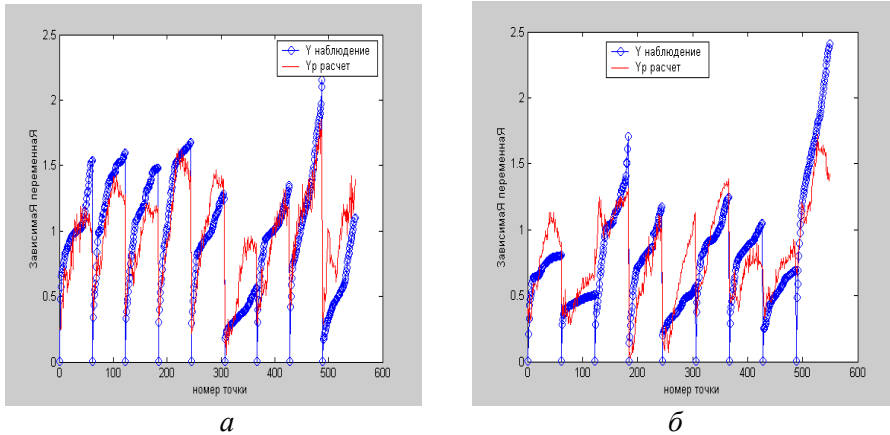


Рис. 2. Износ опережающей (а) и отстающей (б) поверхностей в условиях качения с проскальзыванием 20% в режиме пуск – остановка.

Таким образом, использование предложенной методики обработки эмпирических данных позволит выделить наиболее значимые факторы, влияющие на смазывающие, реологические, антифрикционные и противоизносные свойства трибоконтакта. Построение математических зависимостей на основании этих данных позволит прогнозировать кинетику изменения триботехнических свойств контакта на стадии проектирования узлов трения, работающих в условиях качения с переменным проскальзыванием.

### Выводы:

1. Проанализировано современное состояние описания фрикционного взаимодействия тел с учетом локальных контактных нагрузок.
2. Проведен выбор трибологических инвариантов, которые характеризуют особенности физико-механических процессов возникающих в условиях трения.
3. Предложена методика, позволяющая проводить экспериментальную обработку эмпирических данных, а также функционал, который по совокупности заданных критериев оценивает адекватность построенной математической модели.

### Список литературы

1. Веников В.А. Развитие методов подбора и планирования эксперимента / В.А. Веников, С.Ю. Сыромятников // Электронное моделирование. – 1980. – № 6. – С. 35 – 44.
2. Евдокимов Ю.А. Применение методов физического моделирования в электрическом скользящем контакте / Ю.А. Евдокимов, В.Г. Козубенко, В.М. Коротков // Трение и износ. – 1988. – Т.9. – № 4. – С. 696 – 700.
3. Моисеев А.А. Упрощенная математическая модель двигателя внутреннего сгорания/ А.А. Моисеев // Научные технологии в космических исследованиях земли. – 2014. – №1. – С.20–29.
4. Ludwig M. Simulation of Dynamic Lubricant Effects in Sheet Metal Forming Processes / M. Ludwig, C. Müller, P. Groche // Key Engineering Materials. – 2010. – Vol. 438. – P. 171– 178.

5. Войтов В. А. Моделирование переходных процессов в трибосистемах. Часть 2. Методика моделирования переходных процессов / В. А. Войтов, А. Г. Козырь, И. И. Сысенко // Проблемы трибологии. – 2013. – № 4. – С. 25–32.
6. Esbensen K.H. Multivariate Data Analysis – In Practice (5-th ed.). – Oslo, Norway: CAMO Software AS. – 2006. – 587p.
7. Дроздов Ю.Н., Юдин Е.Г., Белов А.И. Прикладная трибология (трение, износ и смазка)/ Под ред. Ю.Н. Дроздова. – М.: Эко-Пресс, 2010. – 604 с.
8. Выбор критерия при оценке параметров прочности функционально-градиентных конструкций/ Н.О. Кузин, Б.А. Ляшенко, В.П. Ламашевский// Технологічний аудит та резерви виробництва. – 2015. – № 6/1 (26). – с. 4 – 8.
9. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
10. Радченко С.Г. Устойчивые методы оценивания статистических моделей. – К.: Санспарель, 2005. – 504 с.

Стаття надійшла до редакції 29.11.2016.

*О. О. МИКОСЯНЧИК, М. О. КУЗИН*

### **ДО ПИТАННЯ ВИБОРУ МЕТОДИКИ ВСТАНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ ТРИБОПРОЦЕСІВ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ ПАР ТЕРТЯ З ЛОКАЛЬНИМ КОНТАКТОМ**

Запропонована задача аналізу функціональних взаємозв'язків між вхідними параметрами трибосистеми, матеріалом контактних поверхонь та змащувального матеріалу при терті за допомогою трибологічних інваріантів. Розглянуті інваріанти, які характеризують механічну взаємодію тіл; враховують фізико-хімічні процеси в контакті; оцінюють теплові фактори, що виникають при терті та зношуванні. Використано метод регресійного аналізу для математичної обробки експериментальних даних, адекватність модельного наближення якого оцінюється узагальненим адитивним функціоналом, що допускає використання одержаної функції для інтерполяції та екстраполяції даних.

**Ключові слова:** тертя, математичне моделювання, трибологічні інваріанти, регресійний аналіз, адитивний функціонал.

*О.О. MIKOSYANCHUK, N.O. KUSIN*

### **THE SELECTION OF THE PROCEDURE FOR ESTABLISHING FUNCTIONAL RELATIONSHIP IN TRIBOTECHNICAL PROCESS IN EXPERIMENTAL STUDIES OF FRICTION PAIRS WITH LOCAL CONTACTS**

A task analysis of the functional relationships between the input parameters of tribosystem, material of contact surfaces and the lubricant under friction is suggested with the support of tribological invariants. Those invariants has been taking into account, which describe the mechanical interaction of objects; include physical and chemical processes in the contact; characterize thermal factors arising from friction and wear. The method of mathematical regression analysis has been applied for experimental data processing. The adequacy of the model approximation is estimated by generalized additive functional, allowing to apply the function for data interpolation and extrapolation.

**Keywords:** friction, mathematical modeling, tribological invariants, regression analysis, functional additive.

**Мікосянчик Оксана Олександрівна** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри безпеки життєдіяльності, Національний авіаційний університет, пр. Космонавта Комарова, 1, м. Київ, Україна, 03058, тел.: +38 044 406 78 91, E-mail: [oksana.mikos@bk.ru](mailto:oksana.mikos@bk.ru).

**Кузін Микола Олегович** – докт. техн. наук, доцент кафедри рухомого складу і колії, Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич 12а, м. Львів, Україна, 79052, тел. +38 050 170 28 18; провідний судовий експерт, Львівський науково-дослідний інститут судових експертиз, вул. Липинського 54, м. Львів, 79024, тел. +38 032 231 70 61, E-mail: [n\\_kuzin@mail.ru](mailto:n_kuzin@mail.ru).