МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Український державний університет
науки і технологій**

Кафедра «Транспортні вузли»

В авторській редакції

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І УПРАВЛІННЯ

ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Навчально-методичні рекомендації

Електронне видання

ДНІПРО
2026

УДК 656.073(076.1)
О 75

Упорядники
А. С. Дорош, І. Я. Сковрон, О. О. Мазуренко

Електронне видання

Схвалено Групами забезпечення якості освітньої програми
275.02 «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті»
(Протокол №8 від 03.04.2024 р.),
275.02 «Транспортно-експедиторська діяльність та логістика»
(Протокол №7 від 20.03.2024 р.),
275.03 «Організація перевезень і управління на автомобільному транспорті»
(Протокол №3 від 13.03.2024 р.)

О 75 Основи теорії систем та управління. Оптимізація функціонування елементів транспортної системи : навчально-методичні рекомендації до контрольної роботи / упоряд. А. С. Дорош, І. Я. Сковрон, О. О. Мазуренко ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Едектрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 46 с.

Навчально-методичні рекомендації призначені для використання студентами безвідривної форми навчання освітнього ступеня «бакалавр» за ОПП «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті», ОПП «Організація військових перевезень і управління на залізничному транспорті», ОПП «Транспортно-експедиторська діяльність та логістика» та «Організація перевезень і управління на автомобільному транспорті» спеціальності 275 «Транспортні технології (за видами)».

Навчально-методичні рекомендації містять приклади рішення задач пошуку найкоротших відстаней і максимального потоку на транспортній мережі, задачі про розподіл транспортних засобів на мережі і оптимізації завозу-вивозу вантажів в розподільчому центрі.

Іл. 37. Табл. 13. Бібліогр.: 4 назви.

ЗМІСТ

ВСТУП

До основних завдань, що вирішують фахівці транспортно-логістичної галузі при організації перевезень, слід віднести розробку раціональних схем доставки вантажів і пасажирів, оптимізація їх функціонування і розрахунок основних показників.

Метою виконання контрольної роботи є оволодіння основними сучасними математичними методами оптимізації та пошуку раціональних рішень на прикладі елементів транспортних систем. Отримані теоретичні навички і знання можуть бути використані студентами на практиці для підвищення ефективності функціонування транспортних систем.

Навчально-методичні рекомендації містять приклади рішення задач пошуку найкоротших відстаней і максимального потоку на транспортній мережі, задачі про розподіл транспортних засобів на мережі і оптимізації завозу-вивозу вантажів в розподільчому центрі. Також в методичних вказівках розглянуто приклад вирішення транспортної задачі з обмеженням пропускної здатності її елементів.

Контрольна робота виконується у відповідності до завдання, що містить вихідні дані до задач №1-5 і схеми відповідних транспортних мереж. Приклад завдання наведено у додатку А.

1. ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКОРОТШИХ ВІДСТАНЕЙ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

1.1 Теоретичні відомості

Однією з основних задач при організації перевезень вантажів і пасажирів наземним транспортом, є задача визначення найкоротших маршрутів на транспортній мережі [1]. Інформація про такі маршрути необхідна під час планування та керування транспортом, зокрема при регулюванні пасажиро- та вантажопотоків, визначення розмірів руху при календарному плануванні та ін.

Термін «найкоротший маршрут» слід розуміти в узагальненому сенсі, що може означати маршрут з найменшою відстанню, вартістю або тривалістю перевезення. Відповідно кожна ділянка транспортної мережі може характеризуватись довжиною, тривалістю або витратами на здійснення перевезення.

Будь-яка довільна транспортна мережа може бути представлена у вигляді графу, що складається з вершин і дуг (рис. 1.1). Вершинами такої мережі можуть бути об’єкти транспортної інфраструктури – населені пункти, залізничні станції, перевантажувальні комплекси, морські порти та ін., а дугами (ребрами) – транспортні шляхи (автомобільні дороги, залізничні колії), що їх з’єднують. Вага кожної такої дуги C_{ij} характеризує довжину, вартість або тривалість перевезення.

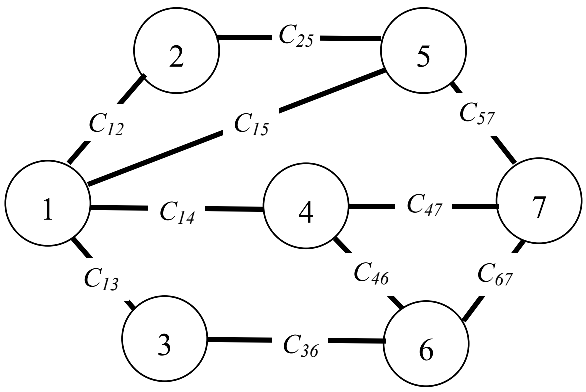


Рис. 1.1. Транспортна мережа

1.2. Алгоритм розв’язання задачі

Задача визначення найкоротших відстаней на транспортній мережі може бути вирішена з використанням алгоритму Форда-Беллмана [2], який передбачає наступні кроки:

Крок 1. Присвоїти всім вершинам транспортної мережі потенціал ∞. Потенціал – це найкоротша на даному етапі розв’язання відстань від початкової до даної вершини.

Крок 2. Присвоїти вершині, від якої здійснюється пошук, потенціал **0** та помітити її знаком **«-»**.

Крок 3. Перевірити, чи є хоча б одна вершина з міткою **«-»**. Якщо такої вершини немає, то розв'язання закінчено, інакше перейти до кроку 4.

Крок 4. Обрати чергову вершину з міткою **«-»**. Нехай це буде вершина k. Для всіх дуг, що виходять з вершини k перевірити умову:

$$U_k + C_{kj} < U_j, \tag{1}$$

де U_k, U_j – потенціали вершин k та j відповідно;

C_{kj} – довжина дуги kj.

Якщо для обраної дуги умова (1) виконується, то перейти до кроку 5, інакше – до кроку 6.

Крок 5. Біля вершини j вказати номер вершини k та новий потенціал вершини j, що розраховується як $U_k + C_{kj}$. Формат запису біля вершини j – $(\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{U_k + C_{kj}})$. Помітити вершину j знаком **«-»** та перейти до кроку 6.

Крок 6. Перевірити, чи всі дуги, що виходять з вершини k, розглянуті. Якщо так, то зняти з неї мітку **«-»** та перейти до кроку 3, інакше перейти до кроку 4.

1.3 Приклад розв'язання задачі

1.3.1 Умова задачі

Задана довільна транспортна мережа (рис. 1.2), що складається з 12 населених пунктів та певної кількості дуг (транспортних шляхів), що їх з'єднують. Для кожної дуги транспортної мережі задана її довжина C_{kj} (відстань).

Для заданої транспортної мережі знайти найкоротші відстані від вершини 1 до всіх інших. Результати вирішення задачі представити у вигляді «дерева».

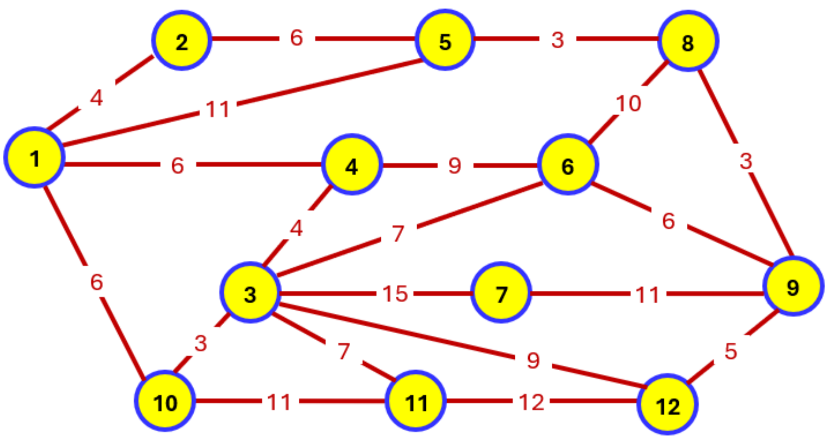


Рис. 1.2. Вихідна транспортна мережа

1.3.2 Розв'язання задачі

Крок 1. Присвоїмо всім вершинам транспортної мережі, окрім вершини 1, потенціал ∞.

Крок 2. Присвоїмо вершині 1 потенціал **0** та помітимо цю вершину знаком «-» (див. рис. 1.3).

Крок 3. Серед вершин транспортної мережі є одна вершина з міткою **«-»** – це вершина 1.

Крок 4. Розглядаємо вершину 1 як таку, що помічена знаком **«-»**. Перевіримо умову (1) для дуг, що виходять з цієї вершини: 1-2, 1-4, 1-5, 1-10.

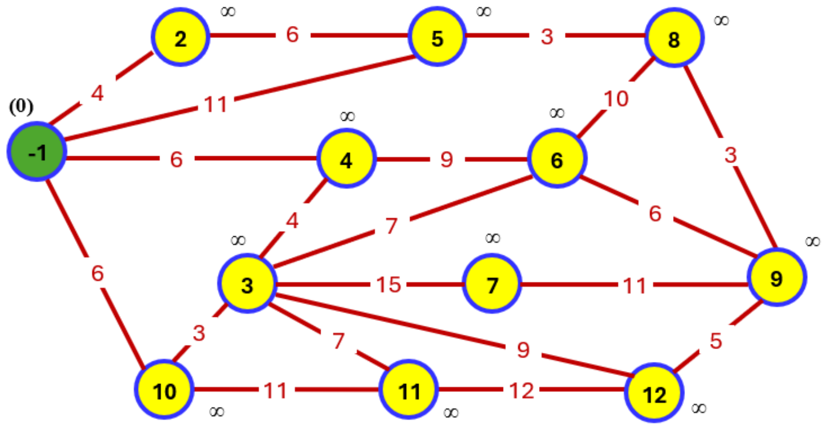


Рис. 1.3. Початковий етап розв'язку задачі

Наприклад, для дуги 1-2 маємо: $0 + 4 < \infty$ - умова виконується, тому переходимо на крок 5 алгоритму.

Крок 5. Біля вершини 2 вказуємо номер суміжної вершини 1, а значення 4 присвоюємо в якості нового потенціалу вершини 2, тобто біля вершини 2 слід записати – (1;4). Помічаємо вершину 2 знаком «-» та переходимо до іншої дуги, що виходить з вершини 1.

Крок 6. Розглянувши всі дуги, що виходять з вершини 1, знімаємо з неї мітку **«-»** (рис. 1.4) та переходимо до наступної вершини з міткою **«-»**.

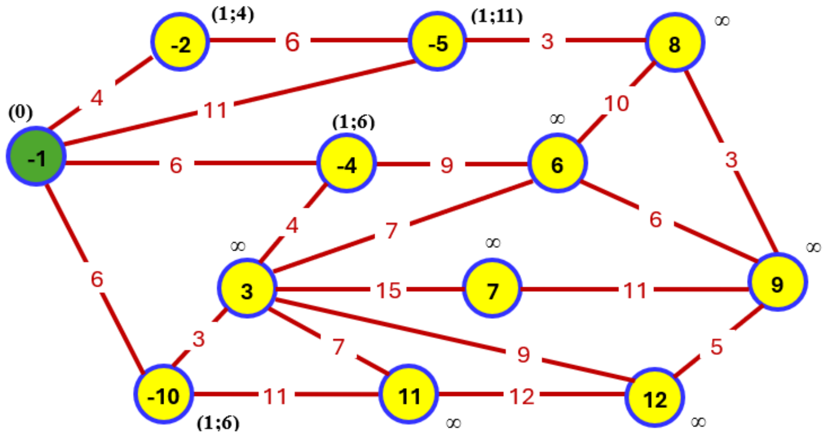


Рис. 1.4. Проміжний етап розв'язку задачі

Серед вершин з міткою «-» найменший потенціал у вершини 2, тому для подальшого розгляду обираємо саме її.

Для дуги 2-1 умова (1) не виконується ($4 + 4 > 0$), для дуги 2-5 ($4 + 6 < 11$) – виконується. Таким чином, вершина 5 отримує новий номер суміжної вершини та нове значення потенціалу – (2;10). Розглянувши всі дуги, що виходять з вершини 2, знімаємо з цієї вершини мітку «-» (рис. 1.5) та розглядаємо наступну вершину з міткою «-».

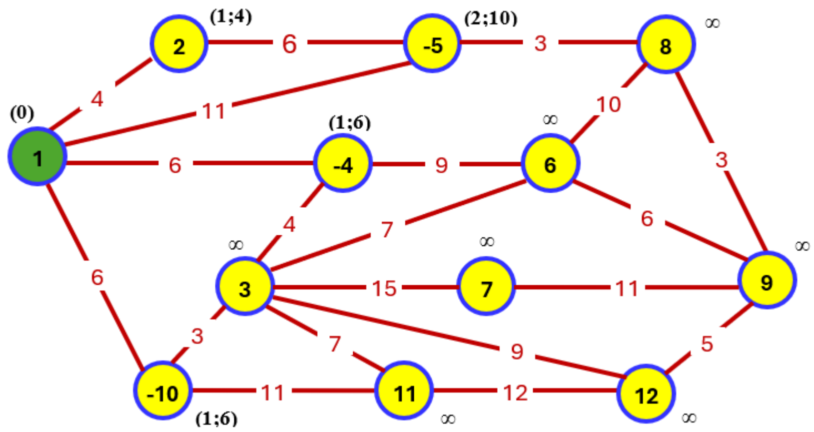


Рис. 1.5. Проміжний етап розв’язку задачі

На наступному кроці слід обрати вершину 4 або 10, оскільки вони мають найменший і однаковий потенціал 6. Для подальших розрахунків обираємо вершину 4.

Описані дії повторюються до тих пір, поки не зникнуть всі вершини з міткою «-». Кінцевий розв’язок задачі матиме наступний вигляд (рис. 1.6). У дужках біля кожної вершини вказано вершину, з якої необхідно до неї рухатися та відстань від початкової вершини.

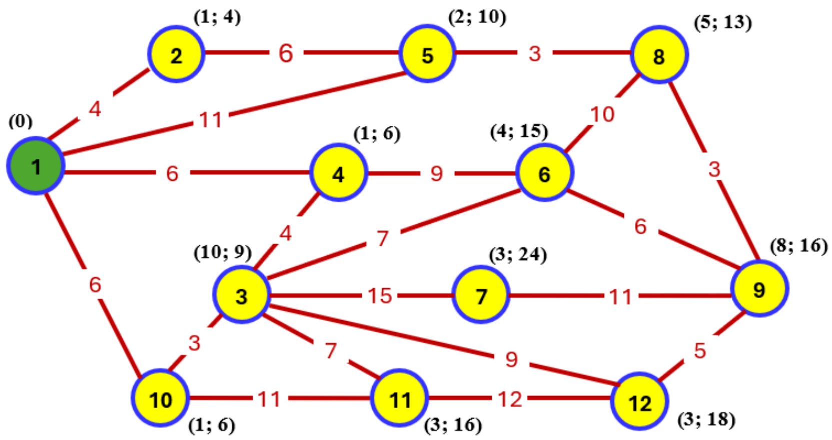


Рис. 1.6. Кінцевий етап розв’язку задачі

Найкоротші відстані на мережі подаються у вигляді «дерева», тобто транспортної мережі без циклів (рис. 1.7).

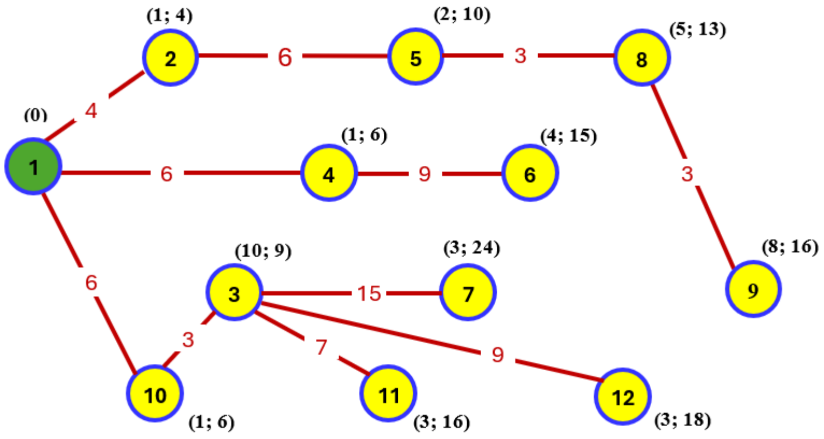


Рис. 1.7. «Дерево» найкоротших відстаней

Таким чином, в результаті використання алгоритму Форда-Беллмана вдалося визначити найкоротші відстані від початкової вершини 1 до всіх інших вершин транспортної мережі.

2. ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

2.1 Теоретичні відомості

При плануванні перевезень виникають задачі розподілу перевезень таким чином, щоб повністю використати пропускну здатність транспортної мережі. Така задача виникає, наприклад, при різкому зростанні обсягів перевезень, коли від відправника до одержувача необхідно доставити максимальний обсяг транспортної маси, нехтуючи витратами, під час виникнення надзвичайних ситуацій тощо. Під терміном «транспортна маса» можна розуміти як рухомий склад (автомобілі, поїзди, вагони), так і вантаж, що перевозиться. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти максимальний обсяг транспортної маси, який можна перевезти від відправника до одержувача існуючою транспортною мережею.

В якості вихідних даних для задачі про максимальний потік є транспортна мережа з одним початковим пунктом $\boldsymbol{s}$ (*джерелом*) та одним кінцевим пунктом $\boldsymbol{t}$ (*стоком*), а також задані значення пропускних здатностей $\boldsymbol{d_{ij}}$для кожної ділянки (дуги) між пунктами мережі $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ (рис. 2.1). Задача полягає в знаходженні таких потоків по ділянках (дугах) мережі, щоб результуючий потік від джерела до стоку був максимальним.

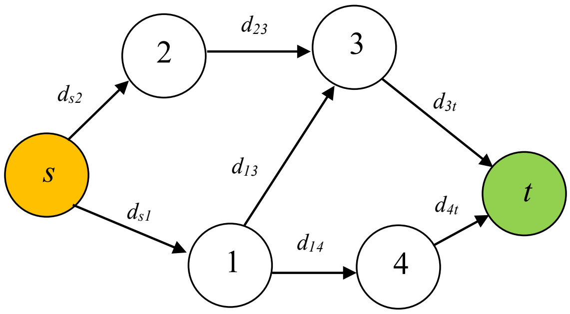


Рис. 2.1. Транспортна мережа

2.2. Алгоритм розв'язання задачі

Задача про максимальний потік на транспортній мережі може бути вирішена з використанням алгоритму Форда-Фалкерсона [3], який передбачає наступні кроки:

Крок 1. Знайти будь-який можливий шлях між вершинами $\boldsymbol{s}$ та $\boldsymbol{t}$, при цьому перехід від вершини $\boldsymbol{i}$ до вершини $\boldsymbol{j}$ можливий тільки, якщо між ними є дуга з ненульовим значенням пропускної здатності в необхідному напрямку $(\boldsymbol{d_{ij}} > \boldsymbol{0})$.

Якщо такого шляху не існує, перейти до кроку 5, інакше – до кроку 2.

Крок 2. На графі виділити дуги, що входять до знайденого шляху.

Крок 3. Для виділених дуг $(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$ серед значень їх пропускної здатності $\boldsymbol{d_{ij}}$ знайти мінімальне $\Delta = min\{\boldsymbol{d_{ij}}\}$.

Крок 4. Перетворити граф шляхом віднімання значення Δ від усіх значень пропускної здатності $\boldsymbol{d_{ij}}$ виділених дуг. Зняти виділення з дуг і перейти до кроку 1.

Крок 5. Пропускні здатності дуг графа, отриманого на кроках 1-4, позначити як $\boldsymbol{d^*_{ij}}$, а пропускні здатності дуг у вихідному (початковому) графі позначити як $\boldsymbol{d_{ij}}$. Величина потоку $\boldsymbol{x_{ij}}$, що пропускається по кожній дузі, визначається як:

$$\boldsymbol{x_{ij}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_{ij}} - \boldsymbol{d^*_{ij}}, & \text{якщо } \boldsymbol{d_{ij}} > \boldsymbol{d^*_{ij}} \\ \boldsymbol{0}, & \text{якщо } \boldsymbol{d_{ij}} \le \boldsymbol{d^*_{ij}} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

На основі отриманих значень $\boldsymbol{x_{ij}}$ будується граф, на якому відображається розподіл потоку по дугах.

Крок 6. Максимальний потік з пункту $\boldsymbol{s}$ в пункт $\boldsymbol{t}$ визначається як сума потоків, що пропускається по дугах, які виходять з джерела $\boldsymbol{s}$, або як сума потоків, що пропускаються по дугах, які входять у стік $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{F} = \textstyle\sum_i \boldsymbol{x_{si}} = \sum_i \boldsymbol{x_{jt}} \qquad (2)$$

2.3. Приклад розв'язання задачі

2.3.1 Умова задачі

Задана довільна транспортна мережа (рис. 2.2), що складається з 6 населених пунктів та певної кількості направлених дуг (транспортних шляхів), що мають обмежену пропускну здатність.

Визначити максимальний потік з пункту **8** в пункт **10**.

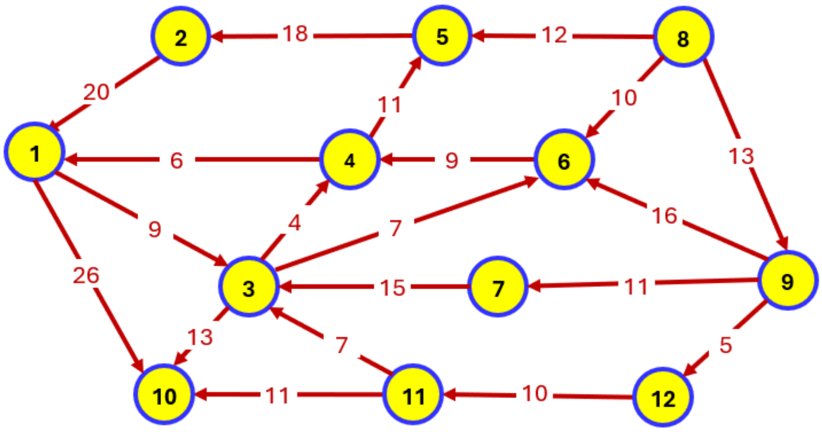


Рис. 2.2. Вихідна транспортна мережа

2.3.2 Розв'язання задачі

Початковою вершиною $\boldsymbol{s}$ (джерелом) потоку транспортної маси є вершина **8**, а кінцевим пунктом $\boldsymbol{t}$ (стоком) – вершина **10**.

Ітерація 1.

Крок 1. Знайдемо будь-який можливий шлях між вершинами **8** та **10**, наприклад, це буде маршрут $\mathbf{8 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 10}$.

Крок 2. Виділимо на графі дуги $(\mathbf{8-9}), (\mathbf{9-12}), (\mathbf{12-11}), (\mathbf{11-10})$**,** як показано на рисунку 2.3.

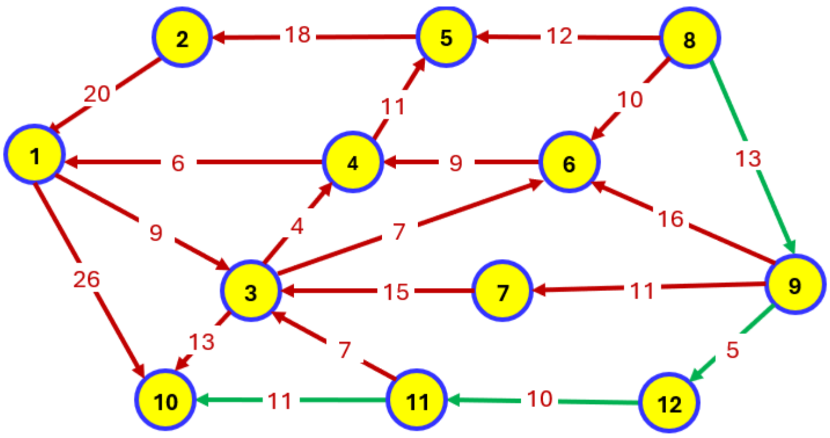


Рис. 2.3. Початковий шлях між джерелом і стоком (ітерація 1)

Крок 3. Серед значень пропускної здатності виділених дуг знайдемо мінімальне значення $\Delta = min\{13; 5; 10; 11\} = 5$.

Крок 4. Перетворимо граф віднявши величину $\Delta = 5$ від значень пропускної здатності виділених дуг і отримаємо нові значення їх пропускної здатності:

$$d_{8-9} = 13 - 5 = 5;$$
$$d_{9-12} = 5 - 5 = 0;$$
$$d_{12-11} = 10 - 5 = 5;$$
$$d_{11-10} = 11 - 5 = 6.$$

Знімаємо виділення з дуг $(\mathbf{8} - \mathbf{9}), (\mathbf{9} - \mathbf{12}), (\mathbf{12} - \mathbf{11}), (\mathbf{11} - \mathbf{10})$ і отримаємо новий граф (див. рисунок 2.4).

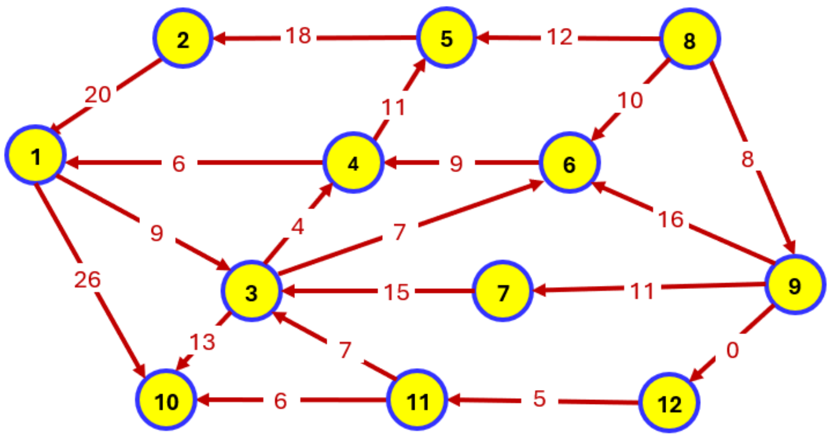


Рис. 2.4. Граф після перетворення (ітерація 1)

Слід відмітити, що кроки 1-4 повторюємо до тих пір, поки на кроці 1 неможливо буде знайти шлях з вершини $\mathbf{8}$ до вершини $\mathbf{10}$. Як видно з рисунку 2.4 такі шляхи ще існують, а отже переходимо до ітерації 2.

Ітерація 2.

Крок 1. Зазначимо, що рух по дузі $(\mathbf{9} - \mathbf{12})$ вже неможливий оскільки її пропускна здатність дорівнює 0. Отже, знайдемо можливий шлях між вершинами $\mathbf{8}$ та $\mathbf{10}$ – маршрут $\mathbf{8} \to \mathbf{9} \to \mathbf{7} \to \mathbf{3} \to \mathbf{10}$.

Крок 2. Виділимо на графі дуги $(\mathbf{8} - \mathbf{9}), (\mathbf{9} - \mathbf{7}), (\mathbf{7} - \mathbf{3}), (\mathbf{3} - \mathbf{10})$, як показано на рисунку 2.5.

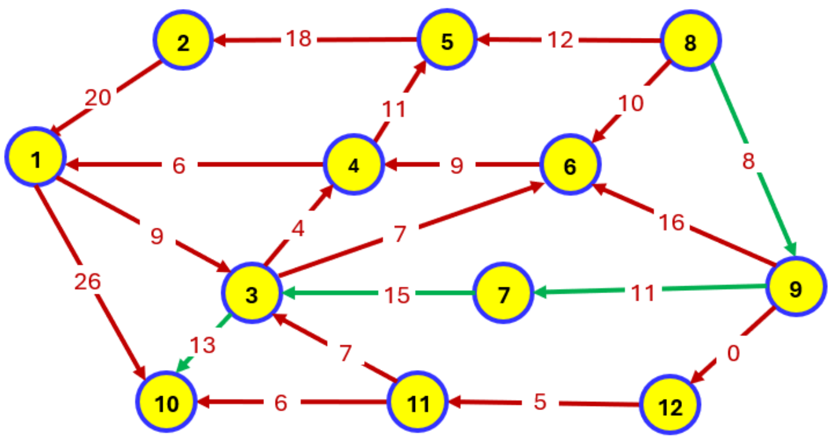


Рис. 2.5. Маршрут руху між джерелом і стоком (ітерація 2)

Крок 3. Серед значень пропускної здатності виділених дуг знайдемо мінімальне значення $\Delta = min\{8; 11; 15; 13\} = 8$.

Крок 4. Перетворимо граф віднявши величину $\Delta = 8$ від значень пропускної здатності виділених дуг і отримаємо їх нові значення:

$$d_{8-9} = 8 - 8 = 0;$$
$$d_{9-7} = 11 - 8 = 3;$$
$$d_{7-3} = 15 - 8 = 7;$$
$$d_{3-10} = 13 - 8 = 5.$$

Знімаємо виділення з дуг $(\mathbf{8-9}), (\mathbf{9-7}), (\mathbf{7-3}), (\mathbf{3-10})$ і отримаємо новий граф (див. рисунок 2.6).

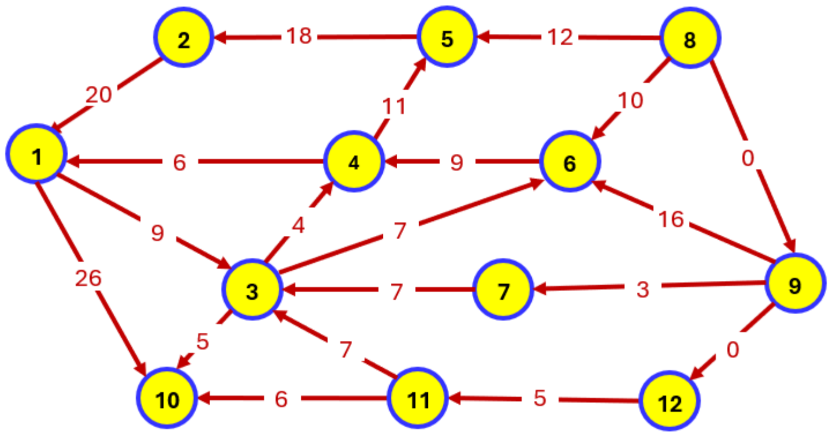


Рис. 2.6. Граф після перетворення (ітерація 2)

Як видно з рисунку $d_{8-9} = 0$ і тому через дану дугу вже неможливо пропустити додатковий потік, але ще існують шляхи з джерела до стоку. Для подальшого вирішення необхідно перейти до наступної ітерації і аналогічним чином повторити кроки 1-4. На останній ітерації отримаємо граф, що наведено на рисунку 2.7.

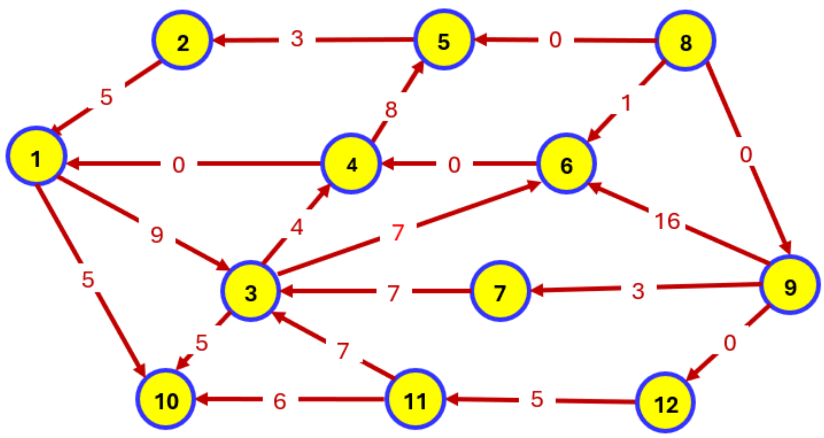


Рис. 2.7. Граф після перетворення на останній ітерації

Як видно з рисунку, після останньої ітерації не існує шляху з джерела $\mathbf{8}$ в стік $\mathbf{10}$, оскільки дуги, що виходять з джерела мають нульову пропускну здатність $d_{8-5} = d_{8-9} = 0$, а з вершини 6, де ще є резерв пропускної здатності $d_{8-6} = 1$, неможливо направити потік в напрямку вершини 10. Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Визначимо згідно з формулою (1) величину потоків x_{ij}, що пропускаються по кожній дузі графу:

$x_{8-5} = 12 - 0 = 12;$ $x_{6-4} = 9 - 0 = 9;$
$x_{8-6} = 10 - 1 = 9;$ $x_{9-7} = 11 - 3 = 8;$
$x_{8-9} = 13 - 0 = 13;$ $x_{7-3} = 15 - 7 = 8$
$x_{5-2} = 18 - 3 = 15;$ $x_{9-12} = 5 - 0 = 5;$
$x_{2-1} = 20 - 5 = 15;$ $x_{12-11} = 10 - 5 = 5;$
$x_{1-10} = 26 - 5 = 21;$ $x_{11-10} = 11 - 6 = 5;$
$x_{4-5} = 11 - 8 = 3;$ $x_{12-11} = 10 - 5 = 5.$

Величину отриманих потоків зобразимо на початковому графі (див. рисунок 2.8).

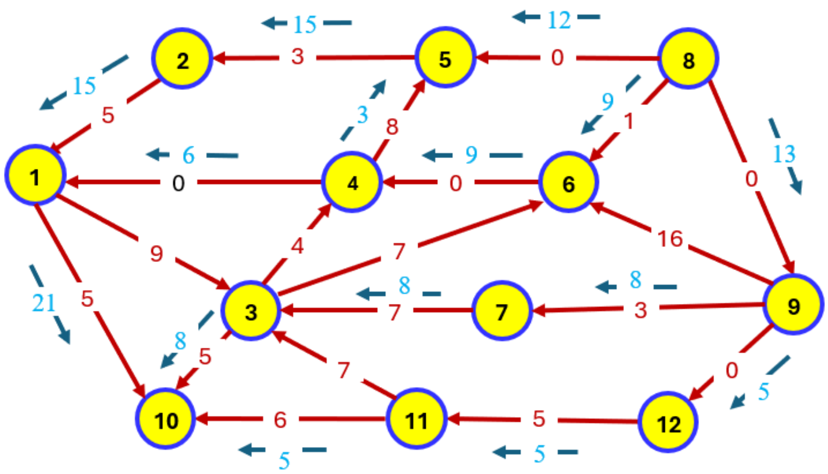


Рис. 2.8. Потоки на дугах транспортної мережі

Крок 6. Максимальний потік з вершини 8 в вершину 10 згідно з формулою (2) визначається як сума потоків на дугах, що виходять з вершини 8 (джерела), або як сума потоків на дугах, що входять до вершини 10 (стоку):

$$F = x_{8-5} + x_{8-6} + x_{8-9} = x_{1-10} + x_{3-10} + x_{11-10}$$

$$F = 12 + 9 + 13 = 21 + 8 + 5 = 34 \text{ од.}$$

В результаті розв’язання задачі за алгоритмом Форда-Фалкерсона визначено, що максимальний обсяг транспортної маси, що можна перевезти з вершини 8 до вершини 10 становить **34 одиниці.**

3. РОЗПОДІЛ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ НА МЕРЕЖІ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕННЯ ЧАСУ

3.1 Теоретичні відомості

Одна із поширених і популярних оптимізаційних задач в логістиці – транспортна задача. В класичному вигляді вона передбачає пошук оптимального плану вантажоперевезень [3].

Наприклад, існує мережа магазинів до яких потрібно доставити певну кількість однорідних товарів зі складів постачальників, де вони зберігаються. Обсяг запасів товарів на кожному складі різний, а вартість їх доставки до кожного магазину встановлюється тарифом. Виникає необхідність розробити такий план перевезень, щоб всі магазини отримали необхідну кількість товарів із найменшими витратами на транспортування. В таких випадках оптимізаційна задача може бути сформульована як транспортна, при цьому під час її вирішення можуть встановлюватись додаткові обмеження щодо термінів доставки, допустимих витрат на перевезення та ін.

На практиці доволі часто виникає задача забезпечення доставки вантажів з пунктів відправлення A_i в пункти призначення B_j на момент часу $T_{\text{пр}}$, при цьому готовність до відправлення вантажів настає в різні моменти часу $T_{\text{від}}$, а швидкість їх перевезення між пунктами постійна і становить $V_{\text{д}}$. Такі умови вимагають встановлення обмеження щодо максимально можливого пробігу від пунктів A_i до B_j, тому така задача може бути сформульована як транспортна з обмеженням часу.

3.2. Алгоритм розв'язання задачі

Етап 1. Перевірка балансу транспортних засобів.

На даному етапі необхідно визначити загальну кількість транспортних засобів, що відправляються з m пунктів A_i

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

та прибувають в n пунктів B_j

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

У випадку якщо $\sum a_i \neq \sum b_j$, то маємо відкриту (незбалансовану) транспортну задачу, яку слід перетворити в закриту (збалансовану) шляхом введення фіктивного пункту призначення або відправлення.

Якщо $\sum a_i > \sum b_j$, то задача *з надлишком запасів* і необхідно ввести фіктивний пункт призначення $B_ф$ (додатковий стовпчик $B_ф$) з потребами:

$$b_ф = \sum a_i - \sum b_j$$

Якщо $\sum a_i < \sum b_j$, то задача *з надлишком потреб* і необхідно ввести фіктивний пункт відправлення $A_ф$ (додатковий рядок $A_ф$) із запасами:

$$a_ф = \sum b_j - \sum a_i$$

Слід зауважити, що в обох випадках вартість перевезення від будь-якого пункту транспортної мережі до фіктивного буде дорівнювати $c_ф = 0$.

Етап 2. Розрахунок та введення обмежень в транспортну задачу.

Постановка транспортної задачі передбачає необхідність розрахунку максимально можливої відстані перевезення вантажу $S_{max\,i}$ з моменту відправлення $T_{\text{від}\,i}$ з пунктів A_i до моменту часу $T_{\text{пр}}$

$$S_{max\,i} = (T_{\text{пр}} - T_{\text{від}\,i})V_{\text{д}} \tag{3.1}$$

де $T_{\text{пр}}$ – момент часу, в який необхідно доставити вантаж в пункт призначення B_j, год.;

$T_{\text{від}\,i}$ – момент відправлення вантажу з пункту A_i, год.;

$V_{\text{д}}$ – швидкість перевезення вантажу, км/год.

Отримані значення $S_{max\,i}$ необхідно порівняти зі значенням відстані S_{ij} у всіх клітинах, що знаходяться на перетині рядку A_i та стовпчиків B_j транспортної таблиці.

Якщо в будь-якій клітині рядку A_i виконується умова $S_{ij} < S_{max\,i}$, то ця клітина є забороненою і не буде використовуватись при складанні початкового плану перевезень, тому її слід виділити (заштрихувати) в транспортній таблиці.

Етап 3. Складання початкового плану перевезень.

Початковий план перевезень може бути побудовано з використанням одним із відомих методів – найменшої вартості, Фогеля, північно-західного кута, подвійної переваги. Суть усіх методів у тому, щоб розподілити всі запаси вантажу й задовольнити всі потреби в ньому. В рамках практичного заняття розглянемо метод подвійної переваги, основні кроки якого наступні.

Крок 1. В кожному з m рядків транспортної таблиці знаходимо клітину з мінімальною відстанню і позначаємо її міткою «*». Далі такі ж дії потрібно виконати і для всіх n стовпчиків транспортної таблиці.

В результаті цих дій отримаємо клітини, що мають мінімальні значення як по рядку, так і по стовпчику (позначені «**») – мають подвійну перевагу.

Зверніть увагу! Нульові значення відстані ($S_{ij} = 0$) в будь-якому рядку A_i або стовпчикуB_j ігноруються, тому клітини з нульовими відстанями не можуть бути позначені міткою «*».

Крок 2. Розподіляємо в клітини з «**» максимально можливі перевезення x_{ij}, виключаючи при цьому із розгляду після кожного запису x_{ij} відповідно рядок A_i або стовпчик B_j.

Далі в частині таблиці, що залишилася, записуються максимально можливі перевезення x_{ij} в клітини, що відзначені знаком «*». Після цього перевезення призначаються в непомічені клітини.

Таким чином, клітини таблиці в які призначено перевезення ($x_{ij} > 0$) стали базисними, а клітини без перевезень є небазисними.

Рекомендація. З метою більш швидкого отримання оптимального рішення при призначенні перевезень в помічені «**», «*» або непомічені клітини, в першу чергу ***слід обирати клітини з меншою відстанню перевезення***.

Зверніть увагу! Оскільки розглядається транспортна задача з обмеженням часу, то можливі деякі відхилення від описаного вище алгоритму складання початкового плану, обумовлені конкретним розташуванням у таблиці клітин із забороненими перевезеннями. Крім того, в результаті складання початкового плану методом подвійної переваги не всі клітинки, помічені міткою «*», отримають перевезення x_{ij}.

Крок 3. Отриманий на попередньому кроці план перевезень вважається допустимим якщо кількість базисних клітин в таблиці відповідає умові $m + n - 1$ (де m, n – кількість рядків та стовпчиків, відповідно), проте можливі такі випадки:

- кількість базисних клітин *більше* $m + n - 1$ – при складанні початкового плану були допущені помилки. Необхідно перевірити призначення перевезень x_{ij} в клітини таблиці;
- кількість базисних клітин *менше* $m + n - 1$ – маємо випадок виродження початкового плану перевезень.

Виродження може статися, якщо призначення певного перевезення x_{ij} призводить до одночасного виключення рядка і стовпчика транспортної таблиці. Для подальшого розв'язання задачі необхідно збільшити кількість базисних клітин до $m + n - 1$, шляхом введення штучних нульових перевезень ($x_{ij} = 0$). При цьому порядок дій такий:

1) клітина, при заповненні якої в транспортній таблиці одночасно виключаються і рядок, і стовпчик, відмічається буквою «В»;

2) остання клітина, що отримала перевезення при складанні початкового плану, відмічається міткою «П»;

3) штучне нульове перевезення призначається в клітину, що розташована на перетині рядка або стовпчика з міткою «В» та стовпчика або рядка з міткою «П».

Етап 4. Розрахунок цільової функції.

Після отримання плану перевезень необхідно розрахувати цільову функцію, тобто загальній пробіг транспортних засобів з вантажем, за формулою

$$C_i = \sum S_{ij} x_{ij}$$

Етап 5. Пошук оптимального плану перевезень.

Для пошуку оптимального плану перевезень в транспортній задачі доцільно використовувати метод потенціалів.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних клітин ($x_{ij} \geq 0$)

$$U_i + V_j = c_{ij} \tag{3.2}$$

- для небазисних клітин ($x_{ij} = 0$)

$$U_i + V_j \leq c_{ij} \tag{3.3}$$

де U_i, V_j – відповідно потенціали рядка та стовпчика.

Пошук оптимального плану передбачає наступні кроки.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Обираємо деякий рядок A_i чи стовпчик B_j з найбільшою кількістю базисних клітин та присвоюємо йому потенціал 0. Далі, використовуючи базисні клітини і умову оптимальності (3.2), розраховуємо потенціали всіх рядків та стовпчиків транспортної таблиці і переходимо на крок 2.

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Після розрахунку всіх потенціалів транспортної таблиці план перевезень перевіряється на оптимальність за умовами (3.2)-(3.3).

Якщо для всіх клітин виконуються умови оптимальності (3.2)-(3.3), то даний план є оптимальним і розв’язання задачі завершено.

Якщо для небазисних клітин умова (3.3) не виконується, то в них проставляється величина порушення, що розраховується за формулою

$$q_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} \tag{4}$$

Наявність порушень свідчить про те, що план перевезень не є оптимальним і його необхідно покращити (перейти на крок 3).

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

Покращення плану перевезень передбачає перерозподіл вантажопотоків таким чином, щоб клітина з найбільшим порушенням оптимальності ($max\ q_{ij}$) була включена до плану перевезень, тобто стала базисною.

Поява перевезення у обраній клітині з порушенням повинна компенсуватися зміною значень в інших базисних клітинах таблиці. З цією метою будується цикл перерахунку в такому порядку:

1) цикл перерахунку починається і закінчується у вільній клітині з максимальним порушенням. Цикл будується таким чином, щоб всі його вершини, крім початкової, були розташовані в базисних клітинах. При цьому зміна напрямку руху (поворот) циклу в кожній вершині виконується лише під кутом 90 градусів. Цикли можуть набувати різних форм (рис. 3.1);

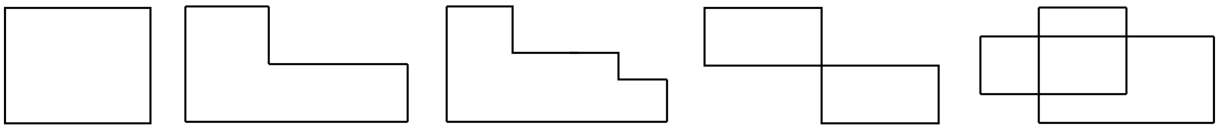


Рис. 3.1. Можливі форми циклу перерахунку

2) вільна клітина, що вводиться в план перевезень, відмічається знаком «+». Далі по черзі відмічаються всі базисні клітини циклу знаками «–» та «+» і т. д;

3) клітина, що відмічена знаком «–» і має найменше значення перевезення X^*, повинна бути виключена з базису й стати вільною;

4) обсяг перевезень у клітинах, відмічених знаком «+», збільшується на величину X^*, а в клітинах, відмічених знаком «–», зменшується на величину X^*.

Після перерозподілу перевезень необхідно заповнити нову транспортну таблицю з новими значеннями обсягів перевезень в клітинах, які було включено до циклу перерахунку. Всі інші значення, окрім потенціалів, слід перенести без змін в нову транспортну таблицю з попередньої і перейти на етап 4.

3.3 Приклад розв'язання задачі

3.3.1 Умова задачі

На залізницю з пунктів A_i в моменти часу T_i надходять порожні вагони. Необхідно забезпечити подачу цих вагонів в пункти B_j на момент часу 17:00 таким чином, щоб загальні пробіги поїздів були мінімальними.

Дані про час надходження вагонів T_i, кількість вагонів, що надходять з пунктів A_i, кількість вагонів, необхідних в пунктах B_j та відстані між пунктами S_{ij} наведені відповідно в таблицях 3.1-3.3. Середня швидкість руху вантажного поїзда складає $V_д = 53$ км/год.

Таблиця 3.1

Надходження вагонів

Пункт	A_1		A_2	A_3	A_4	A_5
Момент відправлення $T_{\text{від}}$, *год*	8	11	12	6	6	0
Кількість вагонів a_i, *ваг*	37	52	62	37	25	184

Таблиця 3.2

Потреби у вагонах

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Кількість вагонів b_j, *ваг*	60	100	45	100	70

Таблиця 3.3

Відстані між пунктами в кілометрах

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	180	220	300	340	520
A_2	220	50	540	70	120
A_3	130	170	560	280	120
A_4	380	300	570	240	180
A_5	560	620	400	350	340

3.3.2 Розв'язання задачі

Етап 1. Перевірка балансу транспортних засобів.

Визначимо за формулою загальну кількість порожніх вагонів, що відправляються з пунктів A_i. При цьому слід зауважити, що з пункту A_1 вагони відправляються двічі за добу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 37 + 52 + 62 + 37 + 25 + 184 = 397 \text{ ваг.}$$

Визначимо загальну кількість порожніх вагонів, що прибувають в пункти B_j:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 60 + 100 + 45 + 100 + 70 = 375 \text{ ваг.}$$

Оскільки $\sum a_i > \sum b_j$, то дана задача є транспортною задачею з неправильним балансом, а точніше – задачею з надлишком запасів.

Для подальшого розв'язання введемо фіктивний пункт призначення $B_ф$ з потребами

$$b_ф = 397 - 375 = 22 \text{ ваг.}$$

Відстані від усіх пунктів відправлення A_i до фіктивного пункту призначення $B_ф$ дорівнюють нулю.

Етап 2. Розрахунок та введення обмежень в транспортну задачу.

Визначимо за формулою (3.1) максимальні відстані $S_{max\ i}$, які може пройти поїзд від моменту відправлення порожніх вагонів з пунктів A_i до моменту їх здачі в 17:00 в пунктах B_j:

- A_1 ($T_{від} - 8{:}00$) $S'_{max\ 1} = (17 - 8) \cdot 53 = 477$ км;
- A_1 ($T_{від} - 11{:}00$) $S''_{max\ 1} = (17 - 11) \cdot 53 = 318$ км;
- A_2 ($T_{від} - 11{:}00$) $S_{max\ 2} = (17 - 12) \cdot 53 = 265$ км;
- A_3 ($T_{від} - 6{:}00$) $S_{max\ 3} = (17 - 6) \cdot 53 = 583$ км;
- A_4 ($T_{від} - 6{:}00$) $S_{max\ 4} = (17 - 6) \cdot 53 = 583$ км;
- A_5 ($T_{від} - 0{:}00$) $S_{max\ 5} = (17 - 0) \cdot 53 = 901$ км.

Будуємо транспортну таблицю і порівняємо отримані значення $S_{max\ i}$ зі значеннями S_{ij} у відповідних рядках таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Вихідна транспортна таблиця

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
A'_1	180	220	300	340	520	0	37
A''_1	180	220	300	340	520	0	52
A_2	220	50	540	70	120	0	62
A_3	130	170	560	280	120	0	37
A_4	380	300	570	240	180	0	25
A_5	560	620	400	350	340	0	184
b_j	60	100	45	100	70	22	

Як видно з таблиці, перша подача порожніх вагонів, що відправляється з пункту A_1 (рядок A'_1), не зможе досягти пункту призначення B_5 вчасно, оскільки $S'_{max\ 1} = 477$ км менше $S_{A_1B_1} = 520$ км, отже клітина A'_1B_1 не може бути використана для перевезення і помічається як заборонена (заштриховується). Аналогічно порожні вагони, що відправляються з пункту A_1 у складі другої подачі (рядок A''_1), не встигнуть вчасно прибути до пунктів B_4 та B_5.

Проаналізувавши всі рядки таблиці 3.4, виявимо всі заборонені для перевезення клітини транспортної таблиці і переходимо до побудови початкового плану.

Етап 3. Складання початкового плану перевезень.

З використанням методу подвійної переваги побудовано початковий план перевезень, що наведено в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Початковий план перевезень (ітерація 1)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
A_1'	* 180	220	* 300 **37**	340	520	0	37
A_1''	* 180 **52**	220	300	340	520	0	52
A_2	220	** 50 **62**	540	* 70	* 120	0	62
A_3	* 130 **8**	170 **29**	560	280	* 120	0	37
A_4	380	300 **9**	570 **8**	240	* 180	0 **8**	25
A_5	560	620	400	350 **100**	* 340 **70**	0 **14**	184
b_j	60	100	45	100	70	22	

Отриманий план перевезень є допустимим, оскільки кількість базисних клітин в таблиці становить $6 + 6 - 1 = 11$, що відповідає умові $m + n - 1$.

Етап 4. Розрахунок цільової функції.

Сумарний пробіг порожніх вагонів в отриманому початковому плані становить

$$C_1 = 37 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 9 \cdot 300 + 8 \cdot 570 + 100 \cdot 350 + 70 \cdot 340 = 95\,590 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Етап 5. Пошук оптимального плану перевезень.

З використанням методу потенціалів визначимо, чи є отриманий в таблиці 3.5 план перевезень оптимальним. Для цього попередньо присвоїмо рядку A_5 потенціал $U_5 = 0$, оскільки в ньому найбільша кількість базисних клітин, і, використовуючи ці та інші базисні клітини, розрахуємо за формулою (3.2) потенціали всіх рядків і стовпчиків транспортної таблиці. Наприклад, потенціали 4-го та 5-го стовпчиків становлять:

- стовпчик B_4 $\quad V_4 = S_{54} - U_5 = 350 - 0 = 350;$

- стовпчик B_5 $\quad V_5 = S_{55} - U_5 = 340 - 0 = 340.$

Результати розрахунку потенціалів наведені в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6

Перевірка початкового плану перевезень на оптимальність (ітерація 1)

	V_j	**260**	**300**	**570**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-270	A_1'	* 180	220	* 300 **37**	340	520	0	37
-80	A_1''	* 180 **52**	220	300 **190**	340	520	0	52
-250	A_2	220	** 50 **62**	540	* 70 **30**	* 120	0	62
-130	A_3	* 130 **8**	170 **29**	560	280	* 120 **90**	0	37
0	A_4	380	300 **9**	570 **8**	240 **110**	* 180 **160**	0 **8**	25
0	A_5	560	620	400 **170**	350 **100**	* 340 **70**	0 **14**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Використовуючи отримані значення потенціалів перевіримо для всіх клітин таблиці виконання умов оптимальності (3.2)-(3.3).

Наприклад, для небазисної клітинки A_2B_4 умова (3.3) не виконується, оскільки сума потенціалів складає $-250 + 350 = 100$, що більше ніж $S_{A_2B_4} = 70$, тому в даній клітині вказується порушення величиною

$$q_{A_2B_4} = -250 + 350 - 70 = 30$$

Результати перевірки наведено в таблиці 3.6. Як видно, в таблиці є 6 клітин з порушеннями, тому даний план перевезень не вважається оптимальним і його необхідно покращити за рахунок перерозподілу перевезень.

Для перерозподілу обираємо в таблиці 3.6 клітину з найбільшим порушенням – це клітина $A_1''B_3$ з порушенням $q_{A_1''B_3} = 190$ і будуємо цикл перерахунку, який починається і закінчується в цій клітині (див табл. 3.6)

Клітину $A_1''B_3$ з найбільшим порушенням помічаємо знаком «+», а далі почергово помічаємо клітини (вершини) по циклу знаками «–» та «+» і т.д. Для клітини $A_1''B_3$ цикл перерахунку зображений на рисунку 3.2.

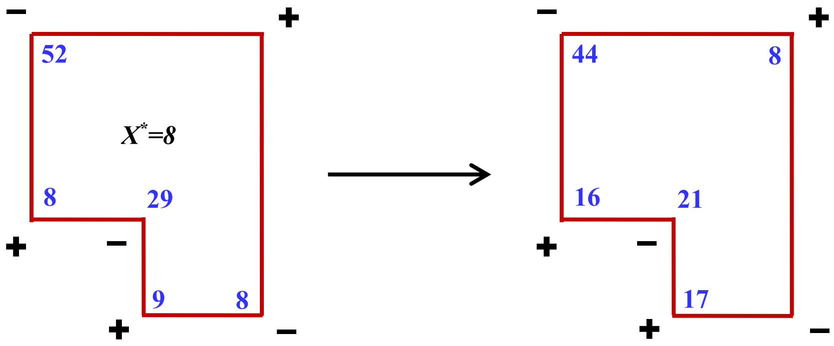


Рис. 3.2. Цикл перерахунку (ітерація 1)

В отриманому циклі знаходимо клітину, що помічена знаком «–» і має найменший обсяг перевезень – це клітина A_4B_3 ($X^* = x_{43} = 8$). Дану клітину виключаємо з базисного плану, а обсяги перевезень в клітинах, помічених знаком «–», зменшуємо на величину $X^* = 8$, а в клітинах, помічених знаком «+», збільшуємо на $X^* = 8$. В результаті цих перетворень отримуємо цикл з новими значеннями перевезень (рисунок 3.2) та новий план перевезень (таблиця 3.7).

Таблиця 3.7

Покращений план перевезень (ітерація 2)

	V_j	**260**	**300**	**380**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-80	A_1'	180	220	300 **37**	340	520	0	37
-80	A_1''	180 **44**	220	300 **8**	340	520	0	52
-250	A_2	220	50 **62**	540	70 **30**	120	0	62
-130	A_3	130 **16**	170 **21**	560	280	120 **90**	0	37
0	A_4	380	300 **17**	570	240 **110**	180 **160**	0 **8**	25
0	A_5	560	620	400	350 **100**	340 **70**	0 **14**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Отримавши в транспортній таблиці новий план перевезень розрахуємо значення цільової функції, тобто сумарний пробіг порожніх вагонів

$$C_2 = 37 \cdot 300 + 44 \cdot 180 + 8 \cdot 300 + 62 \cdot 50 + 16 \cdot 130 + 21 \cdot 170 + 17 \cdot 300 + 100 \cdot 350 + 70 \cdot 340 = 94\,070 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.7 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.7, є 4 клітин з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.3) починаючи з клітини, що має найбільше порушення – клітина A_4B_5 ($q_{A_4B_5} = 160$).

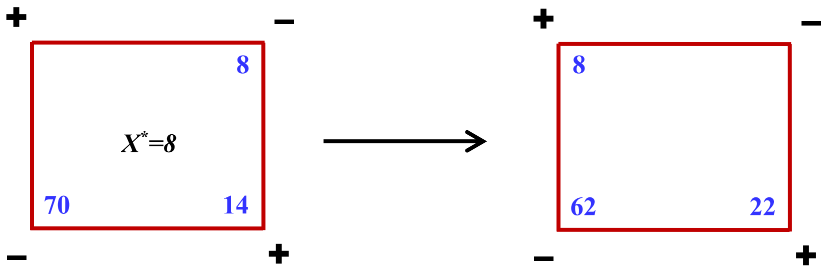


Рис. 3.3 – Цикл перерахунку (ітерація 2)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень, що наведено в таблиці 3.8. Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_3 = 37 \cdot 300 + 44 \cdot 180 + 8 \cdot 300 + 62 \cdot 50 + 16 \cdot 130 + 21 \cdot 170 + 17 \cdot 300 + 8 \cdot 180 + 100 \cdot 350 + 62 \cdot 340 = 92\,790 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.8

Покращений план перевезень (ітерація 2)

	V_j	**420**	**460**	**540**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-240	A_1'	180	220	300 **37**	340	520	0	37
-240	A_1''	180 **44**	220	300 **8**	340	520	0	52
-410	A_2	220	50 **62**	540	70	120	0	62
-290	A_3	130 **16**	170 **21**	560	280	120	0	37
-160	A_4	380	300 **17**	570	240	180 **8**	0	25
0	A_5	560	620	400 **140**	350 **100**	340 **62**	0 **22**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Знову повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.8 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.8, залишилась одна клітина з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.4) починаючи з клітини A_5B_3 з порушенням $q_{A_5B_3} = 140$.

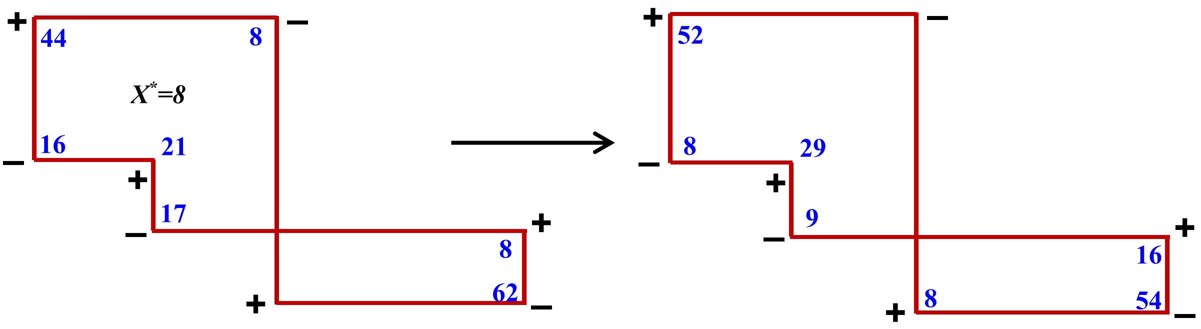


Рис. 3.4. Цикл перерахунку (ітерація 3)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (таблиця 3.9). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_4 = 37 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 9 \cdot 300 + 16 \cdot 180 + 8 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 54 \cdot 340 = 91\,670 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.9

Покращений план перевезень (ітерація 3)

	V_j	**420**	**460**	**400**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-100	A_1'	180 **140**	220 **140**	300 **37**	340	520	0	37
-240	A_1''	180 **52**	220	300	340	520	0	52
-410	A_2	220	50 **62**	540	70	120	0	62
-290	A_3	130 **8**	170 **29**	560	280	120	0	37
-160	A_4	380	300 **9**	570	240	180 **16**	0	25
0	A_5	560	620	400 **8**	350 **100**	340 **54**	0 **22**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Знову повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.9 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.9, є 2 клітини з однаковими порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.5) починаючи з клітини $A_1''B_2$ з порушенням $q_{A_1''B_2} = 140$.

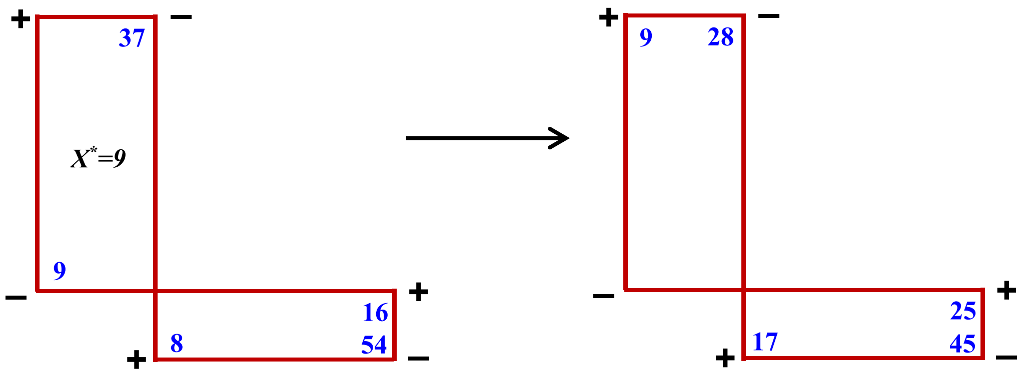


Рис. 3.5. Цикл перерахунку (ітерація 3)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (таблиця 3.10). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_5 = 9 \cdot 220 + 28 \cdot 300 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 29 \cdot 170 + 25 \cdot 180 + 17 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 45 \cdot 340 = 90\,410 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.10

Покращений план перевезень (ітерація 4)

	V_j	**280**	**320**	**400**	**350**	**340**	**0**	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-100	A_1'	180	220 **9**	300 **28**	340	520	0	37
-100	A_1''	180 **52**	220	300	340	520	0	52
-270	A_2	220	50 **62**	540	70 **10**	120	0	62
-150	A_3	130 **8**	170 **29**	560	280	120 **70**	0	37
-160	A_4	380	300	570	240	180 **25**	0	25
0	A_5	560	620	400 **17**	350 **100**	340 **45**	0 **22**	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Знову повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.10 плану на оптимальність.

Як видно з таблиці 3.10, є 2 клітини з порушеннями і тому даний план перевезень не є оптимальним. Для покращення плану перевезень побудуємо цикл перерахунку (рис. 3.6) починаючи з клітини A_3B_5, що містить максимальне порушенням $q_{A_3B_5} = 70$.

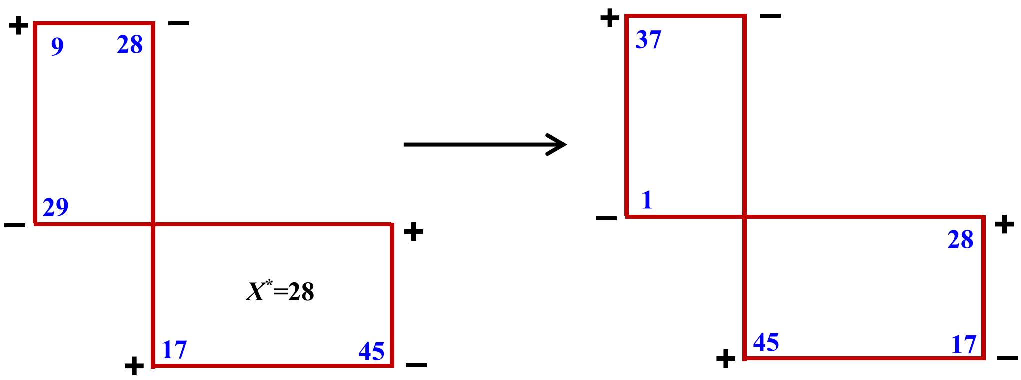


Рис. 3.6. Цикл перерахунку (ітерація 4)

В результаті перерозподілу отримаємо новий план перевезень (див. таблицю 3.11). Значення цільової функції для цього плану перевезень становить

$$C_6 = 37 \cdot 220 + 52 \cdot 180 + 62 \cdot 50 + 8 \cdot 130 + 1 \cdot 170 + 28 \cdot 120 + 25 \cdot 180 + 45 \cdot 400 + 100 \cdot 350 + 17 \cdot 340 = 88\,450 \text{ ваг} \cdot \text{км}$$

Таблиця 3.11

Оптимальний план перевезень

	V_j	350	390	400	350	340	0	
U_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	a_i
-170	A_1'	180	220 37	300	340	520	0	37
-170	A_1''	180 52	220	300	340	520	0	52
-340	A_2	220	50 62	540	70	120	0	62
-220	A_3	130 8	170 1	560	280	120 28	0	37
-160	A_4	380	300	570	240	180 25	0	25
0	A_5	560	620	400 45	350 100	340 17	0 22	184
	b_j	60	100	45	100	70	22	

Знову повторюючи кроки етапу 5 виконаємо розрахунок потенціалів та перевірку отриманого в таблиці 3.11 плану на оптимальність.

Перевірка показала, що отриманий в таблиці 3.11 план перевезень є оптимальним і забезпечує мінімальний загальний пробіг порожніх вагонів $C_{\text{опт}} = 88\,450$ ваг · км.

Крім того, оптимальний план перевезень краще за початковий на

$$\Delta = \frac{C_1 - C_{\text{опт}}}{C_1} \cdot 100\% = \frac{95\,590 - 88\,450}{95\,590} \cdot 100\% = 7{,}4\%.$$

4. ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАВОЗУ-ВИВОЗУ ВАНТАЖУ НА РОЗПОДІЛЬЧОМУ ЦЕНТРІ

4.1 Теоретичні відомості

Однією з задач при організації транспортного обслуговування підприємств або торгових мереж є забезпечення розподілу транспортних засобів між пунктами завантаження-розвантаження за умови мінімальних витрат на їх пробіг.

Вказана задача може бути зведена до транспортної задачі на мережі і вирішуватись з використанням методу потенціалів.

4.2 Алгоритм розв’язання задачі

Етап 1. Розрахунок балансу транспортних засобів.

На даному етапі розраховується кількість автомобілів, які необхідно перерозподілити між пунктами навантаження та вивантаження:

- $N_i^{\text{в}}$ – кількість автомобілів, які вивільняються в i-му пункті після вивантаження;

- $N_i^{\text{н}}$ – кількість автомобілів, які надходять в i-й пункт під навантаження.

Кожний з пунктів i транспортної мережі може бути постачальником або споживачем транспортних засобів:

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} > \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті є надлишкові порожні транспортні засоби і його слід вважати постачальником. Кількість надлишкових транспортних засобів визначається як $N_i^{\text{над}} = N_i^{\text{в}} - N_i^{\text{н}}$ і зі знаком «+» записується в дужках біля i-ої вершини;

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} < \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті недостатньо порожніх транспортних засобів і його слід вважати споживачем. Кількість недостатніх транспортних засобів визначається як $N_i^{\text{нест}} = N_i^{\text{н}} - N_i^{\text{в}}$ і зі знаком «–» записується в дужках біля i-ої вершини;

- якщо $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}} = \boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, то у даному пункті збалансовано кількість транспортних засобів і біля i-ої вершини нічого не вказується.

Додатково необхідно визначити баланс транспортних засобів в вершині, що є розподільчим центром (РЦ):

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} > \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то в пунктах транспортної мережі є надлишкові транспортні засоби, які необхідно відправити в РЦ. В такому випадку вершина РЦ є споживачем транспортних засобів, а їх кількість визначається як $N_{\text{рц}} = \sum N_i^{\text{над}} - \sum N_i^{\text{нест}}$ і зі знаком «–» записується в дужках біля вершини;

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} < \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то в пунктах транспортної мережі недостатньо порожніх транспортних засобів, які можна залучити з РЦ. В такому випадку вершина РЦ є постачальником транспортних засобів, а їх кількість визначається як $N_{\text{рц}} = \sum N_i^{\text{нест}} - \sum N_i^{\text{над}}$ і зі знаком «+» записується в дужках біля вершини;

- якщо $\sum \boldsymbol{N_i^{\text{над}}} = \sum \boldsymbol{N_i^{\text{нест}}}$, то біля вершини РЦ нічого не вказується.

Як правило, розрахунок балансу транспортних засобів доцільно виконувати в табличній формі.

Етап 2. Побудова початкового плану перевезень.

При складанні початкового плану перевезень на транспортній мережі необхідно досягти того, щоб всі транспортні засоби з пунктів відправлення (вершини зі знаком «+») були відправлені та всі потреби пунктів призначення (вершини зі знаком «–») були задоволені (рис. 4.1).

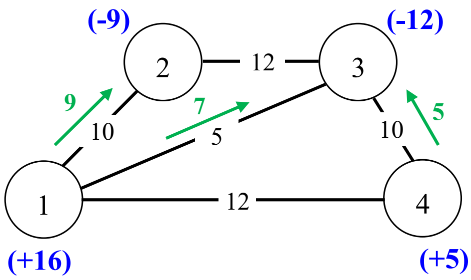


Рис. 4.1. Приклад початкового плану перевезень

Спеціальних способів побудови початкового плану перевезень, наближеного до оптимального, при розв’язанні задач на мережі немає. Однак, при складанні початкового плану перевезень не можна допускати зустрічних перевезень.

Початковий план перевезень утворюють базисні ребра, тобто ребра на яких є перевезення – ребра 1-2, 1-3, 4-3 (рис. 4.1). Базисні ребра повинні складати дерево, тобто всі вершини повинні бути з'єднані та не повинно бути замкнених контурів.

Кількість базисних ребер повинна дорівнювати $n = m - 1$, де m – кількість вершин. У випадках виродження кількість базисних ребер менше $m - 1$, та на схемі утворюються одне або декілька ізольованих дерев, що не з’єднують всі вершини. В цьому випадку їх необхідно з’єднати ребрами з фіктивними перевезеннями $x_{ij} = 0$, при цьому напрямок перевезення на ребрі обирається довільним (рис. 4.2).

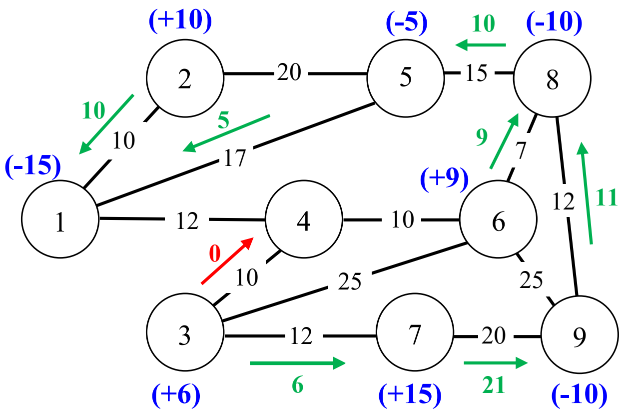


Рис. 4.2. Приклад виродження початкового плану перевезень

У випадку, якщо кількість базисних ребер n більше ніж $m - 1$, то необхідно виконати перерозподіл потоків на дугах транспортної мережі таким чином, щоб отримати необхідну кількість базисних ребер.

Після отримання початкового плану перевезень необхідно розрахувати значення цільової функції

$$C_i = \sum c_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

Етап 3. Пошук оптимального плану перевезень методом потенціалів.

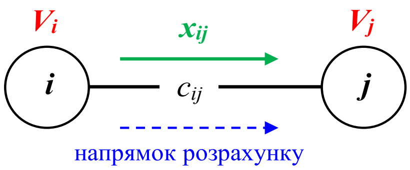
Для пошуку оптимального варіанту розподілу перевезень на транспортній мережі доцільно використовувати метод потенціалів, який передбачає наступні кроки.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Одній з вершин транспортної мережі, з якої виходить хоча б одне базисне ребро, присвоюється потенціал, при цьому бажано обирати велике значення, щоб не оперувати від'ємними потенціалами (наприклад 100).

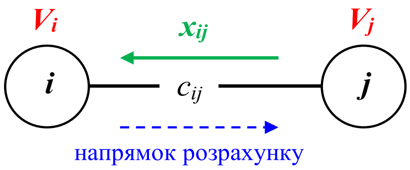
Далі, рухаючись по базисним ребрам, розраховуються потенціали інших вершин транспортної мережі, при цьому можливі такі випадки:

1) якщо напрямок розрахунку **співпадає** з напрямком слідування вантажопотоків, то до потенціалу попередньої вершини v_i додається вартість перевезень c_{ij}



$$V_j = V_i + C_{ij}$$

2) якщо напрямок розрахунку **зустрічний** до напрямку слідування вантажопотоків, то від потенціалу попередньої вершини v_i віднімається вартість перевезень c_{ij}



$$V_j = V_i - c_{ij}$$

Розрахунок триває до тих пір, поки не будуть визначені потенціали всіх вершин транспортної мережі.

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Після розрахунку потенціалів всіх вершин транспортної мережі необхідно перевірити план перевезень на оптимальність.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних ребер ($x_{ij} \geq 0$)

$$V_j - V_i = c_{ij} \tag{4.2}$$

- для небазисних ребер ($x_{ij} = 0$)

$$V_j - V_i \leq c_{ij} \tag{4.3}$$

де V_j, V_i – відповідно більший та менший потенціали вершин, що обмежують ребро, тобто $V_j > V_i$

Якщо для небазисних ребер умова (4.3) не виконується, то біля них проставляється величина порушення, що розраховується як

$$q_{ij} = V_j - V_i - c_{ij} \tag{4.4}$$

Отримане значення порушення q_{ij} зі знаком «+» записується на відповідному ребрі ij.

Якщо на ребрах транспортної мережі **відсутні порушення**, тобто виконується умови (4.2)-(4.3), то такий план перевезень є оптимальним і розв'язання задачі завершено.

Якщо на ребрах транспортної мережі **є порушення**, то такий план перевезень не є оптимальним і необхідно перейти на крок 3.

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

3.1 Обираємо ребро з найбільшим значенням порушення $\boldsymbol{q_{ij}}$ та знаходимо замкнений контур, що складається з базисних ребер та обраного ребра з порушенням.

3.2 Визначаємо напрямок руху в контурі рухаючись від меншого потенціалу до більшого по ребру з порушенням.

3.3 Рухаючись по контуру за обраним напрямком знаходимо ребро з мінімальним зустрічним потоком $\boldsymbol{g_{min}} = \boldsymbol{x_{ij}}$. Якщо в контурі є кілька ребер з однаковою величиною зустрічного потоку, то можна обрати будь-яке.

3.4 На цьому ребрі прибираємо потік x_{ij}, а ребро з порушенням додаємо в базис, пропустивши по ньому потік g_{min} у відповідності з напрямком руху в контурі. Рухаючись по ребрам контуру додаємо до всіх попутних потоків величину g_{min} і віднімаємо її від усіх зустрічних потоків.

3.5 Отримавши новий план перевезень визначаємо значення цільової функції за формулою (4.1) і переходимо на крок 1.

4.3 Приклад розв'язання задачі

4.3.1 Умова задачі

Розподільчий центр (РЦ) здійснює обслуговування магазинів торгової мережі міста з використанням автомобільного транспорту. В кожному магазині торгової мережі виконується вивантаження продукції з автотранспорту, і навантаження порожньої тари (палет) у вже вільні автомобілі.

Кількість автомобілів, що необхідна для доставки продукції і забирання тари в кожній точці торгової мережі наведена в таблиці 4.1. Схема торгової мережі міста **обирається за вихідними даними задачі №1** і наведена на рисунку 4.3. Розподільчому центру відповідає пункт (вершина), що відстуній у таблиці 4.1, тобто пункт 1.

Якщо в пунктах торгової мережі не вистачає автомобілів, то вони туди направляються з РЦ, а надлишкові автомобілі направляються до РЦ.

Слід розробити план роботи автомобілів по пунктам торгової мережі таким чином, щоб їх порожні пробіги були мінімальними.

Таблиця 4.1

Обсяги вивантаження-навантаження в пунктах торгової мережі

Пункт	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вивантаження, авт	6	8	12	7	11	2	4	18	6	11	7
Навантаження, авт	12	4	11	7	15	6	7	8	4	12	5

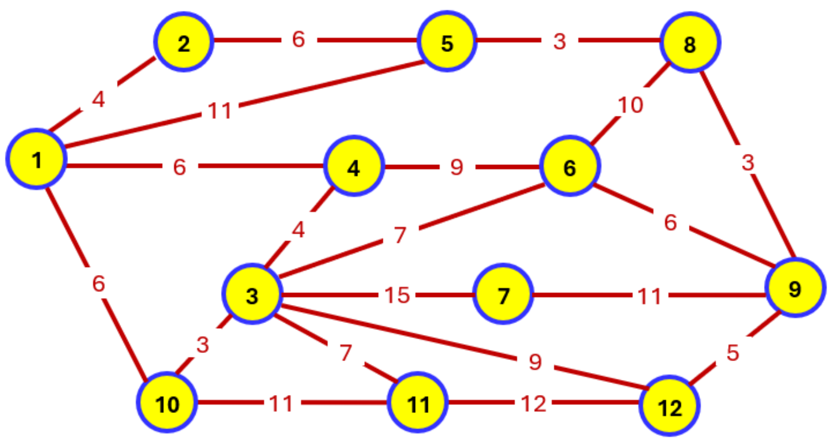


Рис. 4.3. Схема доріг міста та відстані між магазинами торгової мережі

4.3.2 Розв'язання задачі

Етап 1. Розрахунок балансу автомобілів.

На даному етапі виконаємо розрахунок кількості надлишкових $N_i^{\text{над}}$ і недостатніх $N_i^{\text{нест}}$ автомобілів в кожній точці торгової мережі (див. табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Розрахунок балансу автомобілів

Пункт	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Σ**
Вивантаження $\boldsymbol{N_i^{\text{в}}}$, авт	6	8	12	7	11	2	4	18	6	11	7	92
Навантаження $\boldsymbol{N_i^{\text{н}}}$, авт	12	4	11	7	15	6	7	8	4	12	5	91
Надлишок $\boldsymbol{N}_{\text{над}}$, авт	–	4	1	–	–	–	–	10	2	–	2	19
Нестача $\boldsymbol{N}_{\text{нест}}$, авт	6	–	–	–	4	4	3	–	–	1	–	18

Як видно з таблиці 4.2 після вивантаження в усіх точках торгової мережі вивільняються $\sum \boldsymbol{N}_{\text{над}} = 92$ авт., а для навантаження у всіх точках необхідно лише $\sum \boldsymbol{N}_{\text{нест}} = 91$ авт. Оскільки $\sum \boldsymbol{N}_{\text{над}} > \sum \boldsymbol{N}_{\text{нест}}$, то надлишкові порожні автомобілі у кількості $N_{\text{рц}} = 92 - 91 = 1$ авт. направляються до РЦ (РЦ є споживачем порожніх автомобілів).

Етап 2. Побудова початкового плану перевезень.

На першому кроці даного етапу вказуємо баланс автомобілів в кожному пункті торгової мережі, після чого виконуємо розподіл автомобілів від пунктів з додатнім балансом до найближчих з від'ємним балансом (див. рис. 4.4).

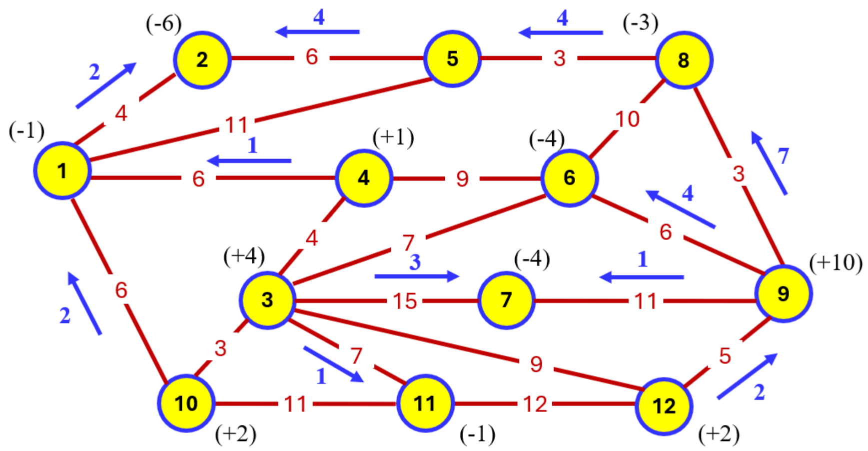


Рис. 4.4. Початковий план перевезень

Для торгової мережі з 12-ти пунктів ($m = 12$) кількість базисних ребер n має становити $12 - 1 = 11$, що відповідає їх кількості на рисунку 4.4. Отже, отриманий план слід вважати опорним, а загальний порожній пробіг автомобілів становить:

$$C_1 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 180 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Етап 3. Пошук оптимального плану перевезень.

Крок 1. Побудова системи потенціалів.

Присвоїмо вершині 1, що відповідає розподільчому центру, потенціал 100 ($V_1 = 100$), а далі, використовуючи базисні ребра, виконаємо розрахунок потенціалів інших вершин торгової мережі.

Так, з вершини 1 виходять три базисні ребра 1-2, 1-4 та 1-10. Визначимо потенціал вершини 2 рухаючись по ребру 1-2 від вершини 1, що вже має потенціал $V_1 = 100$. Оскільки на ребрі 1-2 є попутній по відношенню до напрямку розрахунку потік, то до потенціалу вершини 1 слід додати величину вартості перевезення по ребру c_{12}

$$V_2 = V_1 + c_{1-2} = 100 + 4 = 104$$

При розрахунку потенціалу вершини 4 від потенціалу вершини 1 слід відняти величину вартості перевезення c_{14} по ребру 1-4, оскільки потік по ребру є зустрічним по відношенню до напрямку розрахунку

$$V_4 = V_1 - c_{1-4} = 100 - 6 = 94$$

Розраховані потенціали записуємо біля кожної вершини торгової мережі (рис. 4.5) і переходимо до кроку 2.

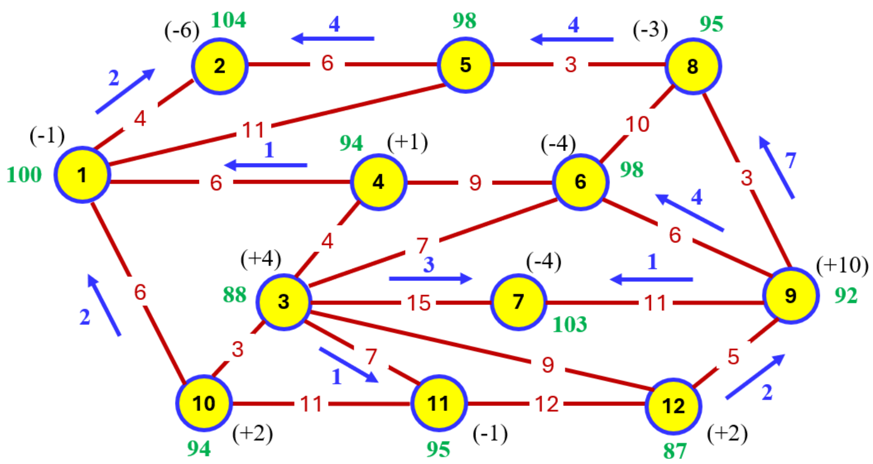


Рис. 4.5. Розрахунок потенціалів вершин торгової мережі

Крок 2. Перевірка оптимальності плану.

Перевіримо отриманий на етапі 2 план перевезень на оптимальність. Для базисних ребер перевірка виконується за формулою (4.2), а для небазисних – за формулою (4.3).

Наприклад. Базисне ребро 1-2 → $V_2 - V_1 = 104 - 100 = 4$, що дорівнює $c_{1-2} = 4$, тобто умова (4.2) виконується.

Небазисне ребро 3-10 → $V_{10} - V_3 = 94 - 88 = 6$, що більше $c_{3-10} = 3$, і, відповідно, умова (4.3) не виконується.

Для ребра 3-10 за формулою (4.4) розраховується величина порушення $q_{3-10} = 94 - 88 - 3 = 3$ і зі знаком «+» записується на ребрі 3-10 (див. рис. 4.6). Всі наявні порушення для небазисних ребер записуються на відповідних ребрах.

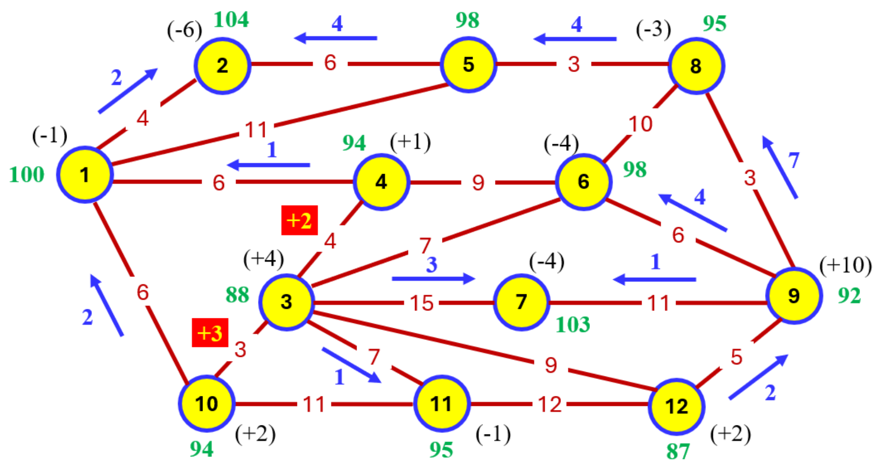


Рис. 4.6. Перевірка оптимальності плану перевезень

Як видно з рисунку 4.6 на ребрах 3-10 і 3-4 транспортної мережі є порушення «+3» і «+2», відповідно, тому план перевезень не є оптимальним і необхідно перейти на крок 3.

Крок 3. Перерозподіл вантажопотоків.

3.1 Оскільки на транспортній мережі є два ребра з порушенням, то для подальшого розв'язання необхідно обрати ребро з максимальним значенням порушення – ребро 3-10 (порушення «+3»). Небазисне ребро 3-10 разом з базисними ребрами 3-7, 7-9, 9-8, 8-5, 5-2, 2-1 та 1-10 утворюють замкнений контур 10-3-7-9-8-5-2-1-10 (рис. 4.7).

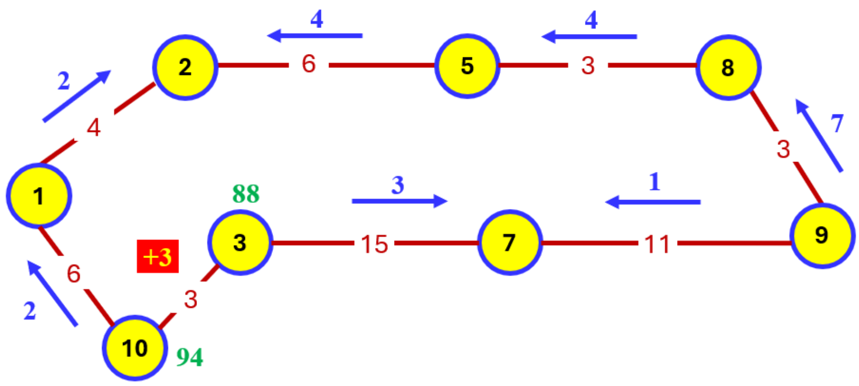


Рис. 4.7. Замкнений контур з порушенням

3.2 Напрямок руху в контурі обираємо по ребру 3-10 з порушенням, за умови руху від вершини 3 з меншим потенціалом $V_3 = 88$ до вершини 10 з більшим потенціалом $V_{10} = 94$ (рис. 4.8).

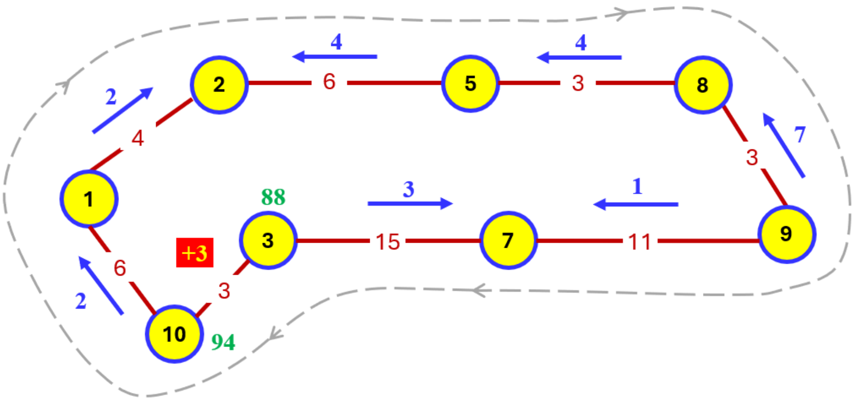


Рис. 4.8. Визначення напрямку руху в контурі

3.3 Рухаючись по контуру 3-10-1-2-5-8-9-7-3 знаходимо ребро з мінімальним зустрічним потоком – це ребро 7-3 з потоком $x_{7-3} = 3$, тоді $g_{min} = 3$.

3.4 Прибираємо з ребра 7-3 перевезення $x_{7-3} = 3$, а на ребро 3-10 з порушенням додаємо нове перевезення $x_{3-10} = g_{min} = 3$ з напрямком руху від вершини 3 до вершини 10 (напрямок руху в контурі).

Рухаючись далі по контуру додаємо $g_{min} = 3$ до значення потоків на ребрах 10-1, 1-2, 9-7 оскільки вони є попутними, і віднімаємо $g_{min} = 3$ від значень потоків на ребрах 2-5, 5-8, 8-9 оскільки вони є зустрічними:

$$x_{10-1}^{\text{нов}} = x_{10-1} + g_{min} = 2 + 3 = 5 \qquad x_{2-5}^{\text{нов}} = x_{2-5} - g_{min} = 4 - 3 = 1$$
$$x_{1-2}^{\text{нов}} = x_{1-2} + g_{min} = 2 + 3 = 5 \qquad x_{5-8}^{\text{нов}} = x_{5-8} - g_{min} = 4 - 3 = 1$$
$$x_{9-7}^{\text{нов}} = x_{9-7} + g_{min} = 1 + 3 = 4 \qquad x_{8-9}^{\text{нов}} = x_{8-9} - g_{min} = 7 - 3 = 4$$

Нові значення потоків на вказаних ребрах наведені на рисунку 4.9.

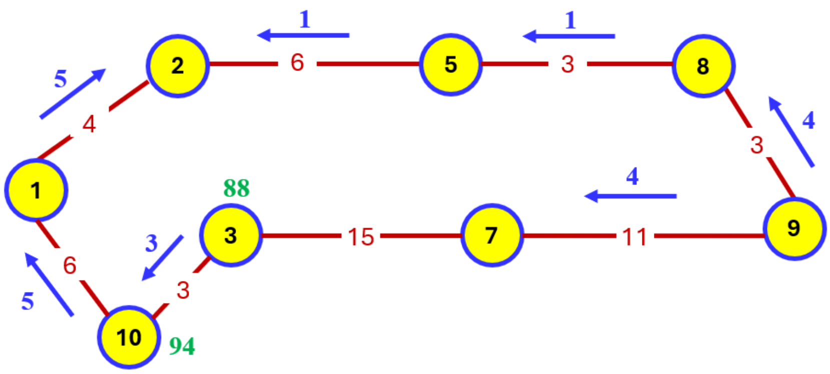


Рис. 4.9. Перерозподіл потоків в контурі

В результаті перерозподілу потоків по ребрам контуру 3-10-1-2-5-8-9-7-3 отримано новий план перевезень по торговій мережі, який наведено на рисунку 4.10.

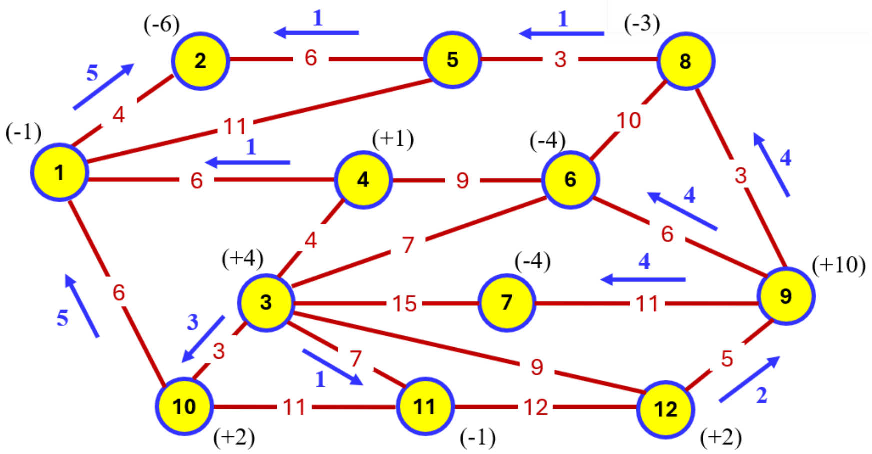


Рис. 4.10. Покращений план перевезень

3.5 Розраховуємо значення цільової функції для нового плану перевезень і знову переходимо на кроки 1-2

$$C_2 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 174 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Кроки 1-2. Виконаємо розрахунок потенціалів і перевірку оптимальності для покращеного плану перевезень, який наведено на рис. 4.10. Результати розрахунку наведені на рис. 4.11.

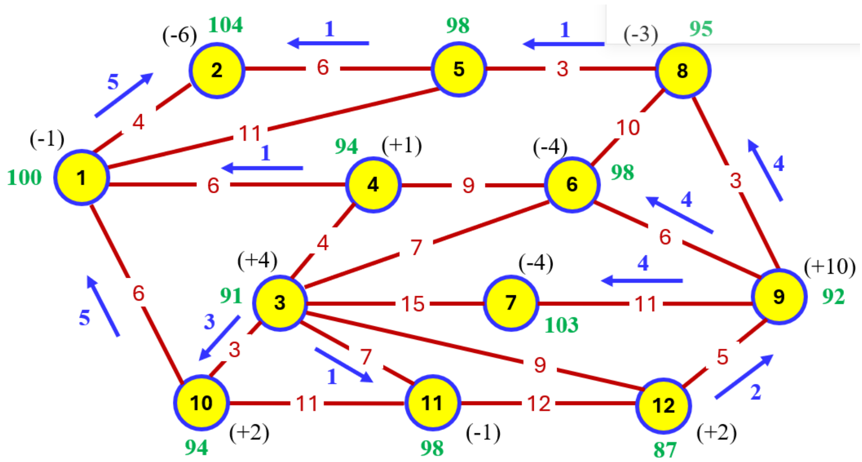


Рис. 4.11. Перевірка оптимальності плану перевезень

Як видно, з рисунку 4.11 для всіх базисних і небазисних ребер торгової мережі виконуються умови (4.2)-(4.3), тому отриманий план перевезень є оптимальним.

Загальний пробіг автомобілів оптимального плану перевезень складає $C_{опт} = 174 \text{ авт} \cdot \text{км}$.

5. ВИРІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ НА МЕРЕЖІ З ОБМЕЖЕННЯМ ПРОПУСКНОЇ ЗДАТНОСТІ

5.1 Теоретичні відомості

На практиці досить часто на окремих ділянках реальних транспортних мереж існують обмеження щодо пропускної здатності (мости, тонелі, шляхопроводи), і цей фактор необхідно враховувати під час розв'язання відповідних транспортних задач.

5.1 Розв'язання задачі

Розглянемо розв'язання такої транспортної задачі за вихідними даними задачі 4. Слід відмітити, що певні ребра цієї транспортної мережі (див. рис. 5.1) мають обмежену пропускну здатність d_{ij}, що вказана в знаменнику:

- ребро 3-10 – 1 автомобіль;
- ребро 5-8 – 1 автомобіль.

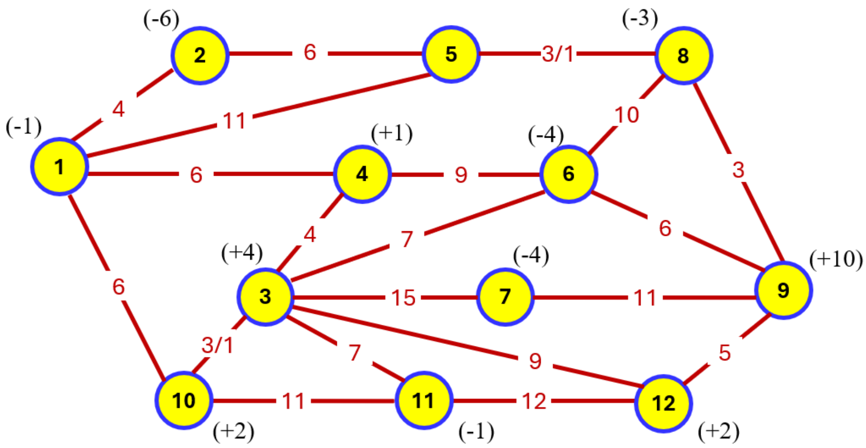


Рис. 5.1. Транспортна мережа з обмеженням пропускної здатності на ребрах

Крок 1. Побудова початкового плану перевезень.

Підхід до побудови початкового плану в даній задачі подібний задачі №4, але при його складанні необхідно дотримуватись обмежень пропускної здатності ребер.

На відміну від задач без обмеження пропускної здатності, **ребра з повністю заповненою пропускною здатністю ($x_{ij} = d_{ij}$) не вважаються базисними** та можуть вводитись в базис лише у випадку виродження.

Кількість базисних ребер n початкового плану перевезень повинна дорівнювати $n = m - 1$ (де m – кількість вершин). Якщо кількість базисних ребер $n < m - 1$, то необхідно додати перевезення $x_{ij} = 0$ на одне із небазисних ребер. У випадку якщо $n > m - 1$, то необхідно виконати перерозподіл потоків.

Початковий план перевезень наведено на рисунку 5.2 і він містить 11 базисних ребер, що відповідає умові побудові початкового плану перевезень. Ребро 5-8 не є базисним, оскільки його пропускна здатність повністю вичерпана.

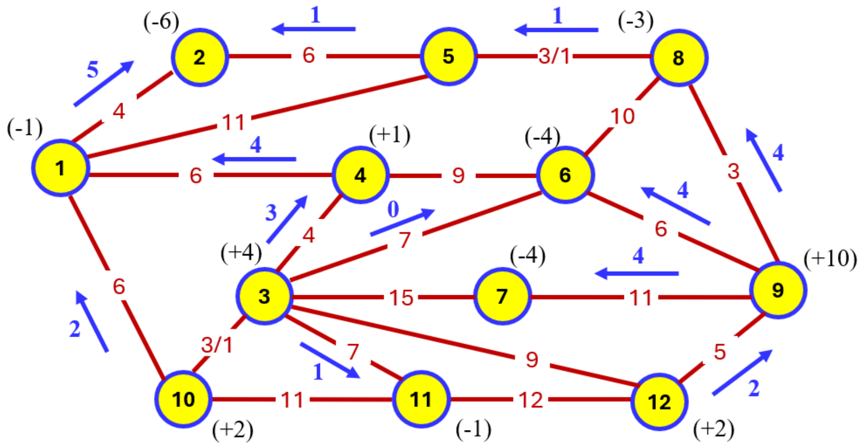


Рис. 5.2. Початковий план перевезень (ітерація 1)

Отже, отриманий план слід вважати опорним, а загальний порожній пробіг автомобілів становить

$$C_1 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 174 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Крок 2. Побудова системи потенціалів.

Розрахунок потенціалів вершин транспортної мережі здійснюється аналогічно задачі № 4, а їх значення у кожній вершині транспортної мережі наведені на рис. 5.3.

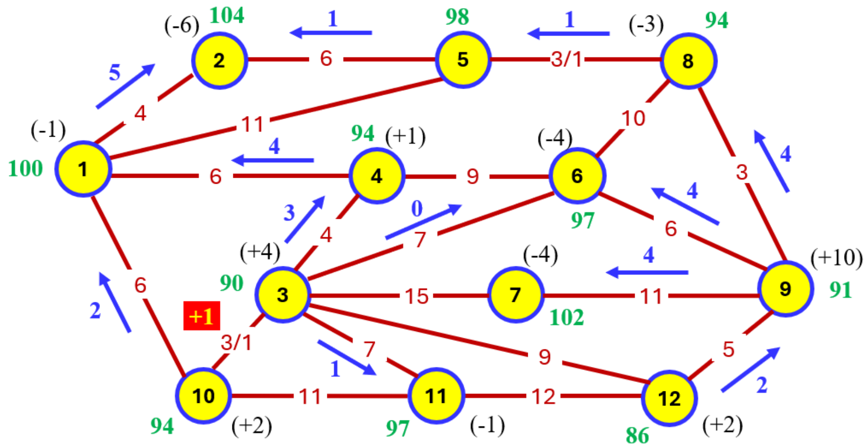


Рис. 5.3. Розрахунок потенціалів плану перевезень (ітерація 1)

Крок 3. Перевірка оптимальності плану перевезень.

План перевезень вважається оптимальним, якщо виконуються умови:

- для базисних ребер ($0 < x_{ij} < d_{ij}$)

$$V_j - V_i = c_{ij} \tag{5.1}$$

- для небазисних ребер без обмежень пропускної здатності ($x_{ij} = 0$)

$$V_j - V_i \leq c_{ij} \tag{5.2}$$

- для небазисних ребер з обмеженням пропускної здатності ($x_{ij} = d_{ij}$)

$$V_j - V_i \geq c_{ij} \tag{5.3}$$

де V_j, V_i – відповідно більший та менший потенціали вершин, що обмежують ребро, тобто $V_j > V_i$;

Якщо умови (5.2)-(5.3) не виконуються, то такий план перевезень не є оптимальним і біля них проставляється величина порушення, що розраховується як

$$q_{ij} = V_j - V_i - c_{ij} \tag{5.4}$$

Отримане порушення q_{ij} може бути двох типів:

- $q_{ij} > 0$ – характерно для небазисних ребер **без обмеження пропускної здатності**, тобто ребер які не мають перевезень;
- $q_{ij} < 0$ – характерно для небазисних ребер з **повністю заповненою пропускною здатністю**.

Як видно з рисунку 5.3 для небазисного ребра $3 - 10$ не виконується умова (5.2), оскільки $V_{10} - V_3 > \ c_{3-10}$ $(94 - 90 = 4 > 3)$, а величина порушення становить

$$q_{3-10} = V_{10} - V_3 - \ c_{3-10} = 94 - 90 - 3 = 1 > 0$$

Отримане значення порушення запишемо на ребрі $3 - 10$ у форматі «+1» (див. рис. 5.3).

Крок 4. Перерозподіл вантажопотоків.

4.1 Для виконання перерозподілу вантажопотоків необхідно **обрати ребро** з максимальним порушенням за абсолютним значенням

$$q_{max} = \max\{|q_{ij}|\}$$

Як видно з рисунку 5.3 на ребрах транспортної мережі є лише одне порушення $q_{3-10} = 1 > 0$ на ребрі $3 - 10$.

4.2 Знайдемо **замкнений контур**, що складається з ребра $3 - 10$ з порушенням та базисних ребер – це контур $3 - 10 - 1 - 4 - 3$.

4.3 **Напрямок руху** в контурі обираємо від вершини з меншим потенціалом для ребра з порушенням до вершини з більшим потенціалом (з вершини 3 до вершини 10).

4.4 Визначимо **величину покращення g** потоків на ребрах замкненого контуру в залежності від типу порушення:

- $q_{ij} > 0$ – величина g визначається мінімальною величиною зустрічного потоку $x_{ij}^{з}$ та мінімальною різницею між пропускною здатністю та величиною потоку на попутних ребрах $d_{ij} - x_{ij}^{п}$ в контурі (якщо контур проходить через ребро з обмеженням пропускної здатності)

$$g = min\{x_{ij}^{з}, d_{ij} - x_{ij}^{п}\} \tag{5.5}$$

- $q_{ij} < 0$ – величина g визначається як мінімум серед мінімального попутного потоку $x_{ij}^{п}$ та мінімальною різницею між пропускною здатністю та величиною потоку на зустрічних ребрах $d_{ij} - x_{ij}^{з}$ в контурі

$$g = min\{x_{ij}^{п}, d_{ij} - x_{ij}^{з}\} \tag{5.6}$$

Оскільки порушення $q_{ij} > 0$ і замкнений контур $3 - 10 - 1 - 4 - 3$ проходить через ребро з обмеженням пропускної здатності, то величина g визначається за формулою (5.5) і становить

$$g = min\{x_{4-3}; d_{3-10} - 0\} = min\{3; 1\} = 1.$$

4.5 Виконаємо **перерозподіл потоків** в контурі за правилами, що залежать від типу порушення:

- $q_{ij} > 0$ – величина g пропускається по ребру з порушенням, а також додається до всіх попутних потоків і віднімається від усіх зустрічних потоків;
- $q_{ij} < 0$ – величина g додається до всіх зустрічних потоків і віднімається від усіх попутних потоків в контурі.

Отже, по ребру 3-10 пропускаємо потік $g = 1$ (але ребро до базису не додається), додаємо g до потоку на ребрі 10-1 і віднімаємо від потоків на ребрах 1-4 та 4-3. Новий покращений план перевезень наведено на рисунку 5.4.

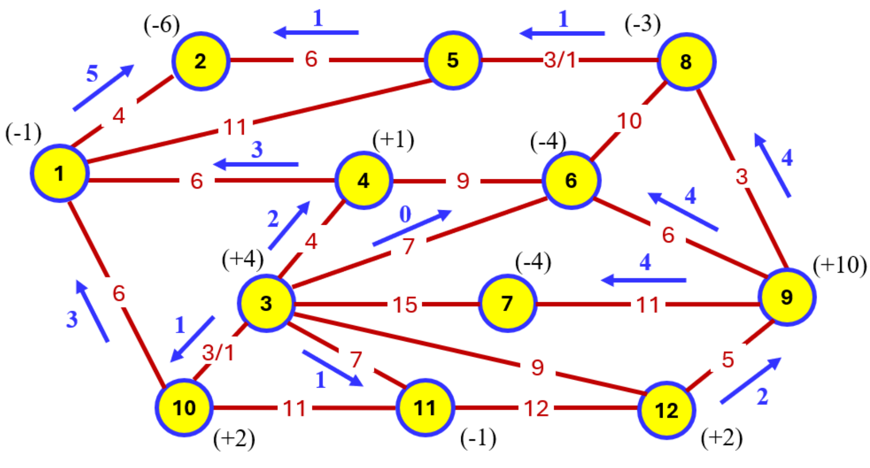


Рис. 5.4. Покращений план перевезень (ітерація 2)

Розрахуємо пробіг автомобілів для отриманого плану перевезень:

$$C_1 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 173 \text{ авт} \cdot \text{км}$$

Кроки 2-4 повторюються до тих пір поки не буде отримано оптимальний план перевезень.

Отриманий на рис.5.4 план перевезень перевіримо на оптимальність за формулами (5.1)-(5.3) для чого виконаємо розрахунок потенціалів. Результати розрахунків наведено на рисунку 5.5.

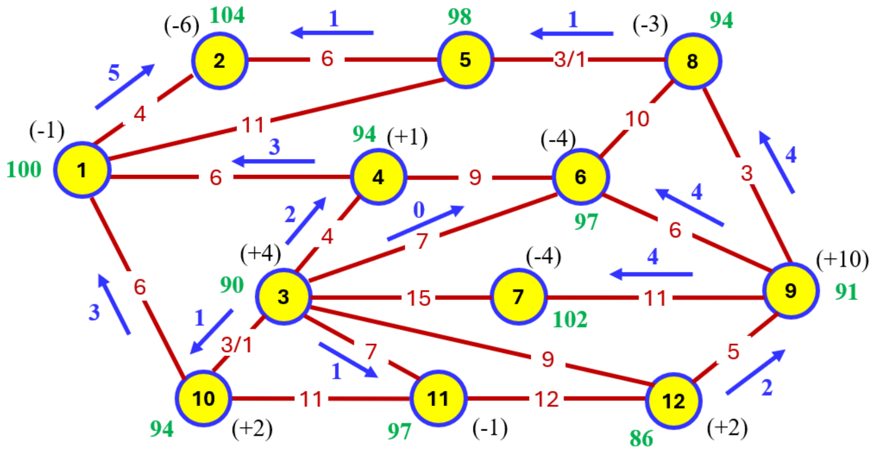


Рис. 5.5. Оптимальний план перевезень

Перевірка показала, що для отриманого плану перевезень умови (5.1)-(5.3) виконуються для всіх ребер. Окрім того, кількість базисних ребер дорівнює 11 (ребра 3-10, 5-8 не є базисним, оскільки їх пропускна здатність повністю вичерпана).

Отже, отриманий план перевезень є оптимальним, а загальний пробіг автомобілів становить $C_{\text{опт}} = 173 \text{ авт} \cdot \text{км}$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Системологія на транспорті. Підручник у 5 кн. / Під заг. ред. Дмитриченка М.Ф.– Кн. І: Основи теорії систем і управліня / Є. В. Гаврилов, М. Ф. Дмитриченко, В. К. Доля, О. Т. Лановий, І. Є. Линник, В. П. Поліщук. – К.: Знання України, 2005. – 344 с.
2. Основи теорії систем і системного аналізу: Навч. посібник /К. О. Сорока. – ХНАМГ:, 2004. – 291 с.
3. Теорія систем і системний аналіз: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Н. Б. Чорней, Р. К. Чорней. – К.: МАУП, 2005. – 256 с.
4. Грицюк П. М. Основи теорії систем і управління : навч. посіб. / П. М. Грицюк, О. І. Джоші, О. М. Гладка. - Рівне: НУВГП, 2021. – 272 с

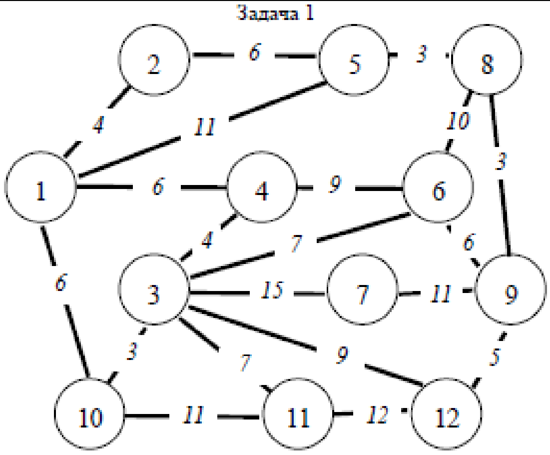
Додаток А

БЛАНК ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ЗАВДАННЯ 1
для виконання контрольної роботи з дисципліни
«Основи теорії систем та управління"

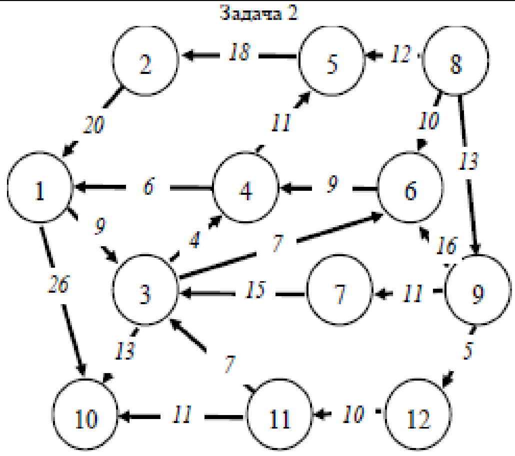
Група **Студент**

Задача 1



Знайти найкоротші відстані від вершини 1 до всіх інших

Задача 2



Визначити максимальний потік з вершини 1 в вершину 9

Задача 3

На залізницю з пунктів A_i в моменти часу T_i надходять порожні вагони. Необхідно забезпечити подачу цих вагонів в пункти B_j на 17:00 таким чином, щоб загальні пробіги були мінімальними. Дані про час надходження вагонів T_i, кількість вагонів, що надходять із пунктів A_i, кількість вагонів, необхідних в пунктах B_j і відстані між пунктами наведені у таблиці. Середня швидкість руху вантажного поїзда $V_д$ км/год.

Надходження вагонів

Пункт	A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Год	8	11	12	6	6	0
Кількість вагонів	37	52	62	37	25	184

Потреби у вагонах

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Кількість вагонів	60	100	45	100	70

Відстань між пунктами

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	180	220	300	340	520
A_2	220	50	540	70	120
A_3	130	170	560	280	120
A_4	380	300	570	240	180
A_5	560	620	400	350	340

$V_д$ =53 км/год

Задача 4

Розподільчий центр (РЦ) здійснює обслуговування магазинів торгової мережі міста з використанням автомобільного транспорту. В кожному магазині торгової мережі виконується вивантаження продукції з автотранспорту, і навантаження порожньої тари (палет) у вже вільні автомобілі. Кількість автомобілів, що необхідна для доставки продукції і забирання тари в кожній точці торгової мережі наведена в таблиці. У якості схеми доріг міста використати транспорту мережу з умови задачі №1.

А) Розробити план роботи автомобілів так, щоб їх порожні пробіги були мінімальними.

Б) Вирішити задачу з обмеженням пропускної здатності, якщо умовно на дугах існують наступні обмеження:

5-8 1 авт. 3-10 1 авт.

Залізничній станції відповідає пункт 1

Пункт	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вивантаження, авт	6	8	12	7	11	2	4	18	6	11	7
Навантаження, авт	12	4	11	7	15	6	7	8	4	12	5

Навчально-методичне видання

Дорош Андрій Сергійович,
Сковрон Ігор Ярославович,
Мазуренко Олександр Олександрович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І УПРАВЛІННЯ

ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Навчально-методичні рекомендації

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка А. С. Дорош

Експертний висновок склав канд. техн. наук, доц. Євген Демченко

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 740 від 27.06.2024)

Формат 60x84 $^{1/16}$. Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 2,82.
Зам. № 26

Видавець: Український державний університет науки і технологій
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010