

Необхідні умови в задачі векторної оптимізації для функціоналів стосовно відновлювальних технологій

В роботі представлено розв'язок задачі векторної оптимізації в просторі функціоналів. Розроблений алгоритм можна застосовувати для техніко-економічної оцінки технології відновлення зношених деталей та оптимізації процесу відновлення за критеріями ресурсу (терміну експлуатації) та вартості процесу відновлення деталей.

Ключові слова: відновлення деталей, векторна оптимізація, ресурс, функціонал

В работе представлены решения задачи векторной оптимизации в пространстве функционалов. Разработанный алгоритм можно применять для технико-экономической оценки технологии восстановления изношенных деталей и оптимизации процесса восстановления по критериям ресурса (срока эксплуатации) и стоимости процесса восстановления деталей.

Ключевые слова: восстановление деталей, векторная оптимизация, ресурс, функционал

The paper presents the solution of vector optimization in the space of functionals. The developed algorithm can be used for techno-economic evaluation of technologies for the rehabilitation of worn parts and to optimize the recovery of the resource criteria (lifetime) and cost recovery process details.

Keywords: parts restoration, vector optimization, resource, functional

Вступ, постановка проблеми.

Однією з актуальних задач ремонтного виробництва залізниці є підвищення ресурсу рухомого складу та зменшення витрат на ремонт. Одним із напрямків розвитку ремонтного виробництва на залізничному транспорті є розвиток існуючих та розробка нових ресурсощадних відновлювальних технологій. При цьому важливою складовою розв'язання поставленої задачі є нанесення відновлювальних покриттів, строк експлуатації яких буде не менший, ніж нової деталі. Основною причиною відмов та несправностей механічної частини рухомого складу є знос та пошкодження контактних поверхонь деталей, в результаті чого виникають додаткові динамічні навантаження, вібрації, биття, порушення герметичності та режиму змащування, втрата міцності з'єднання для спрйжень з гарантованим натягом. До того ж знос, який супроводжується пошкодженнями робочої поверхні деталей такими, як риски, задири, глибинні вириви та інші, зменшує втомну міцність та може приводити до руйнування.

На даний час існують різні шляхи підвищення зносостійкості деталей: при проектуванні рухомого складу (й інших машин) вдосконалювати конструкцію елементів механічної частини, застосовувати нові матеріали та технології на етапі виготовлення, закладати використання більш ефективних змащувальних матеріалів. Однак проблема зношування деталей, ймовірно залишиться і потребуватиме уваги і для нових локомотивів та вагонів, тому виникне і у подальшому необхідність їх заміни або відновлення.

Як вже було показано у роботах [1-4] одним із напрямків розвитку сучасних відновлюючих технологій є використання багатопшарових покриттів. Однак, при розробці технологій відновлення шаруватими покриттями постає важлива проблема раціонального вибору методів відновлення, матеріалів, ефективних режимів, визначення доцільності використання більш складних технологій з точки зору економічності та зносостійкості.

Дана робота є логічним продовженням і розвитком робіт [1-4].

Метою даної роботи є визначення раціональних параметрів відновлення зношених деталей за допомогою інструментів векторної оптимізації з врахуванням економічної складової процесу.

Виклад основного матеріалу.

В загальному вигляді розглядається задача векторної оптимізації.

$$\begin{pmatrix} F_1[u] \\ F_2[u] \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (1)$$

при умові, що функція $u(x)$ неперервна та диференційована на відріжку $x \in [a, b]$, а по своїм значенням належить відріжку $[\underline{u}, \bar{u}]$ та задовольняє граничним умовам.

$$u(a) = C_1; \quad u(b) = C_2 \quad (2)$$

Функціонали F_1 і F_2 мають вид

$$F_1[u] = \int_a^b f_1(x, u, u') dx;$$

$$F_2[u] = \int_a^b f_2(x, u, u') dx \quad (3)$$

Визначення 1. Функція $u[x]$, яка задовольняє умовам (2) будемо називати ефективною, якщо її варіація $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + \varepsilon \varphi(x)$ (4)

призводить до покращення одного з функціоналів та до погіршення другого.

Визначення 2. Множина U , елементами якої є ефективні функції будемо називати рішенням задачі (1) – (2), якщо будь-які дві функції $u_1[x]$ та $u_2[x]$ між собою непорівнянні, тобто має місце

$$\left(\begin{matrix} F_1[u_1] \leq F_1[u_2] \\ F_2[u_1] \geq F_2[u_2] \end{matrix} \right) \text{ або } \left(\begin{matrix} F_1[u_1] \geq F_1[u_2] \\ F_2[u_1] \leq F_2[u_2] \end{matrix} \right)$$

причому серед нерівностей, хоча б одне являється строгим.

Із визначення 1 випливає, що якщо $u[x]$ – ефективно, то приріст функціоналів з необхідністю повинні мати різний знак, а тому маємо.

$$\Delta F_1 + t \cdot \Delta F_2 = 0, \quad (5)$$

де $t \geq 0$,

$$\Delta F_1 = F_1[\tilde{u}] - F_1[u];$$

$$\Delta F_2 = F_2[\tilde{u}] - F_2[u].$$

Розрахуємо приріст функціоналів з урахуванням (4), тоді

$$\Delta F_1 = \int_a^b (f_1(x, \tilde{u}, \tilde{u}') - f_1(x, u, u')) dx$$

та розкладаючи $f_1(x, \tilde{u}, \tilde{u}')$ у ряд по ε отримаємо

$$\Delta F_1 = \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \varepsilon \varphi(x) + \frac{\partial f_1}{\partial u'} \varepsilon \varphi'(x) + 0(\varepsilon^2) \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u'} \right) \right) \varepsilon \varphi(x) + \frac{\partial f_1}{\partial u'} \varepsilon \varphi(x) \Big|_a^b + 0(\varepsilon^2)$$

Накладемо на функцію $\varphi(x)$ умову

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

З урахуванням цієї умови приріст ΔF_1 буде мати вигляд

$$\Delta F_1 = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u'} \right) \right) \varphi(x) dx + 0(\varepsilon^2),$$

аналогічно отримаємо для ΔF_2

$$\Delta F_2 = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u'} \right) \right) \varphi(x) dx + 0(\varepsilon^2).$$

Підставив ці прирости у необхідну умову (5) отримаємо

$$\int_a^b \left(\frac{\partial (f_1 + t f_2)}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial (f_1 + t f_2)}{\partial u'} \right) \right) \varphi(x) dx + \frac{0(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = 0.$$

Спрямувавши ε до нуля маємо

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) \right) \varphi(x) dx = 0,$$

де $f = f_1 + t f_2$.

Оскільки $\varphi(x)$ узята довільно, то в силу основної лемми варіаційного обчислення [5] отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) = 0. \quad (6)$$

Дане рівняння є аналогом рівняння Ейлера [5], стосовно до задачі векторної оптимізації (1).

Нехай $u(x, t, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ є загальним рішенням диференціального рівняння (6).

Сталі інтегрування $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ визначаємо, як деякі функції параметра t з граничних умов (2), тобто розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} u(a, t, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2) &= c_1 \\ u(b, t, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2) &= c_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо $\tilde{C}_1(t)$, $\tilde{C}_2(t)$ є розв'язком системи (7), тоді ефективні рішення задачі векторної оптимізації (1) мають вигляд $u(x, t, \tilde{C}_1(t), \tilde{C}_2(t))$ при $x \in [a, b]$. Підставив отримане $u(x, t, \tilde{C}_1(t), \tilde{C}_2(t))$ в функціонали (3), отримуємо дві функції, які залежать від параметру $t \geq 0$.

Тоді серед всіх t необхідно відібрати такі, щоб значення $u(x, t, \tilde{C}_1(t), \tilde{C}_2(t))$ були б незрівняними, тобто задовольняли визначенню 2.

Приклад 1. Розглянемо чисто ілюстративний приклад теоретичного розгляду викладеного вище.

В цьому прикладі функціонали мають вигляд

$$\begin{aligned} F_1[u] &= \int_0^1 u'^2 dx \\ F_2[u] &= \int_0^1 (u'^2 - u) dx. \end{aligned}$$

Причому бажано зробити F_1 якомога меншим, а F_2 якомога більшим, тобто розглядається задача векторної оптимізації

$$\begin{pmatrix} F_1[u] \\ -F_2[u] \end{pmatrix} \rightarrow \min$$

з граничними умовами $u(0) = 1$; $u(1) = 0$.

Функції f_1 і f_2 мають наступний вигляд

$$f_1 = u'^2; \quad f_2 = -(u'^2 - u),$$

а функція f приймає представлення

$$f = u'^2 - t(u'^2 - u).$$

Диференціальне рівняння (6) буде наступним

$$t - 2(1-t)u'' = 0.$$

Виконав інтегрування отримуємо загальний розв'язок

$$u = \frac{tx^2}{4(1-t)} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

З урахуванням початкових умов система (7) приймає вигляд

$$\begin{cases} \tilde{C}_2 = 1 \\ \frac{t}{4(1-t)} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 0 \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2(t) &= 1; \\ \tilde{C}_1(t) &= -1 - \frac{t}{4(1-t)}. \end{aligned}$$

Підставив у загальний розв'язок отримуємо

$$u = \frac{tx^2}{4(1-t)} + x - \frac{t}{4(1-t)} - 1. \quad (8)$$

Оскільки при $t \rightarrow 1$ $u \rightarrow \infty$, тому значення параметра $t = 1$ виключаємо та розглядаємо дві множини $[0, 1)$ та $(1, \infty)$.

Співвідношення (8) можна розглядати, як деяку поверхню, коли $x \in [0, 1]$, а t належить одній з вказаних множин.

Так, наприклад, коли $x \in [0, 1]$, а $t \in [0, 1]$ вигляд цієї поверхні представлено на рисунку 1, а випадок $x \in [0, 1]$, а $t \in (1, \infty)$ представлено на рисунку 2.

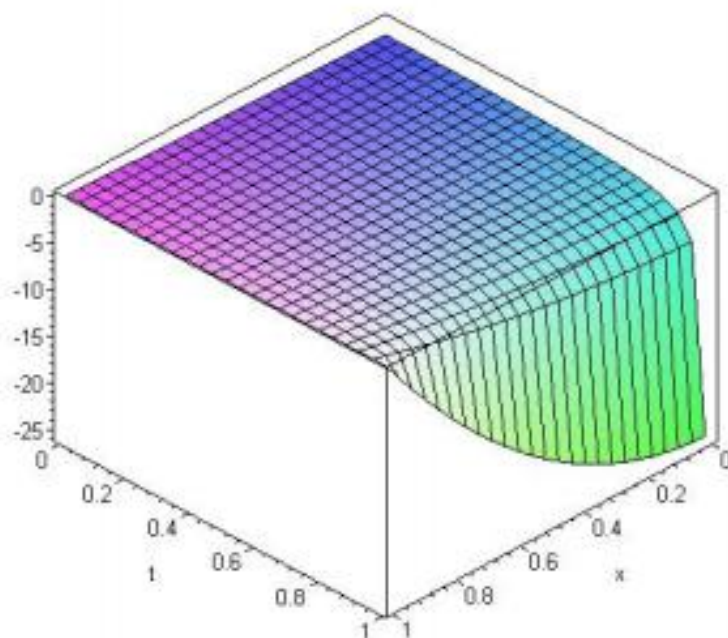


Рис 1. Вигляд поверхні $u(x, t)$ при $x \in [0, 1]$; $t \in [0, 1]$

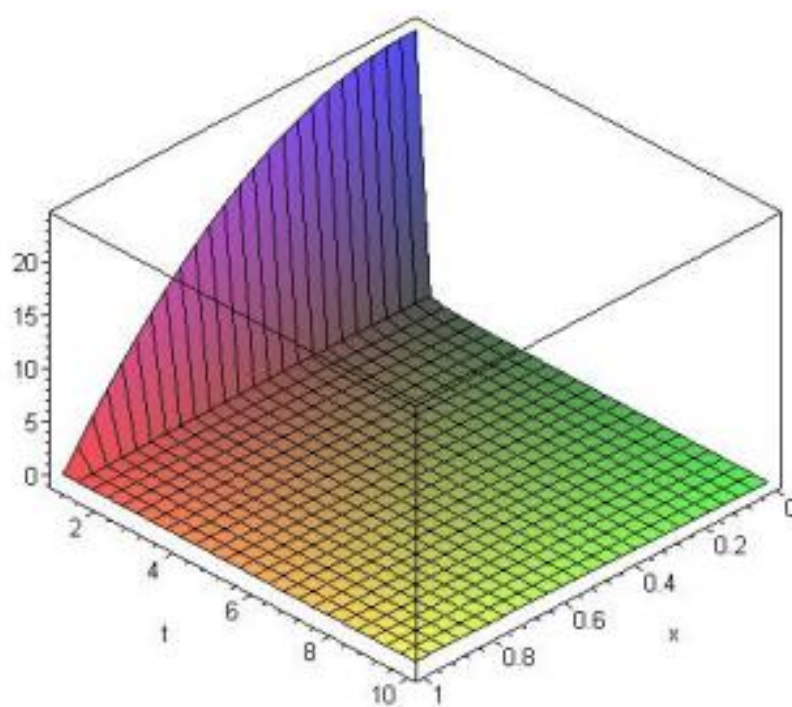


Рис2. Вигляд поверхні $u(x, t)$ при $x \in [0, 1]$; $t \in (1, 10)$

Підставив (8) в функціонали та виконав інтегрування, отримуємо наступне представлення даних функціоналів, як функцій $t \geq 0$.

$$F_1 = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{t}{1-t} - \frac{t}{4-4t} - 1 \right)^3 (1-t)}{t} - \frac{1}{3} \frac{\left(-1 - \frac{t}{4-4t} \right)^3 (1-t)}{t}$$

$$F_2 = \frac{1}{5} \left(-\frac{t}{4-4t} + \frac{4t^2}{(4-4t)^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{4t}{4-4t} \right) \left(-\frac{t}{4-4t} + \frac{4t^2}{(4-4t)^2} \right) + \\ + \frac{2}{3} \left(2 + \frac{t}{4-4t} \right) \left(-\frac{t}{4-4t} + \frac{4t^2}{(4-4t)^2} \right) + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{4t}{4-4t} \right)^2 + \left(2 + \frac{t}{4-4t} \right) \left(-1 + \frac{4t}{4-4t} \right) + \left(2 + \frac{t}{4-4t} \right)^2$$

Графіки цих функцій представлено на рисунках 3, 4.

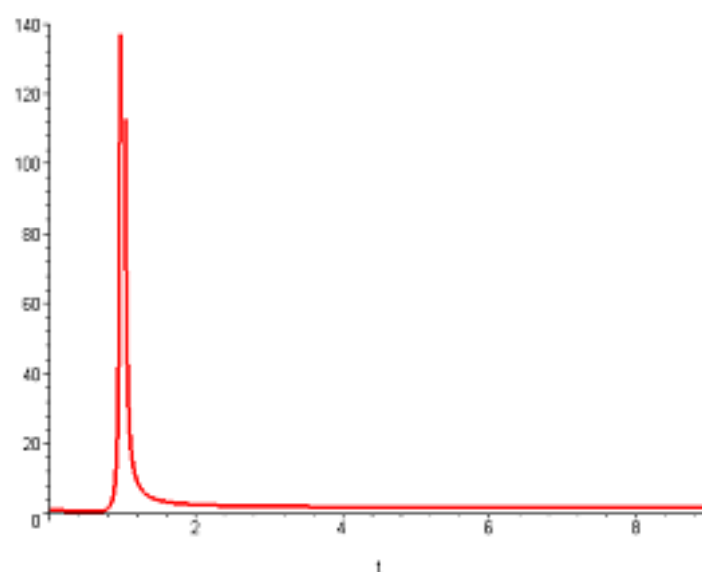


Рис. 3. Графік функції $F_1 = F_1(t)$

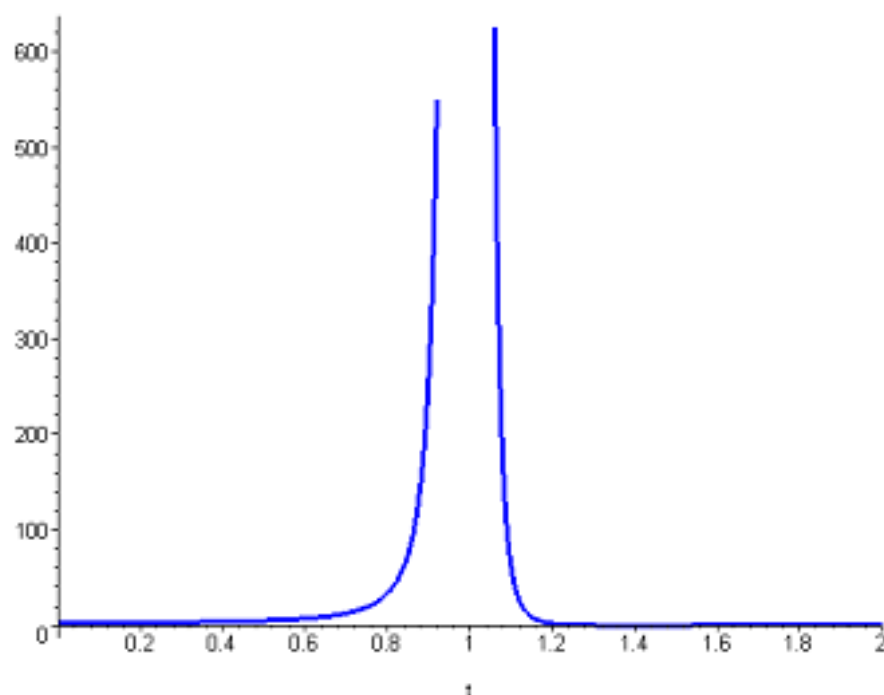


Рис. 4. Графік функції $F_2 = F_2(t)$

Виключаючи параметр t будемо взаємозв'язок між F_1 та F_2 (рис. 5)

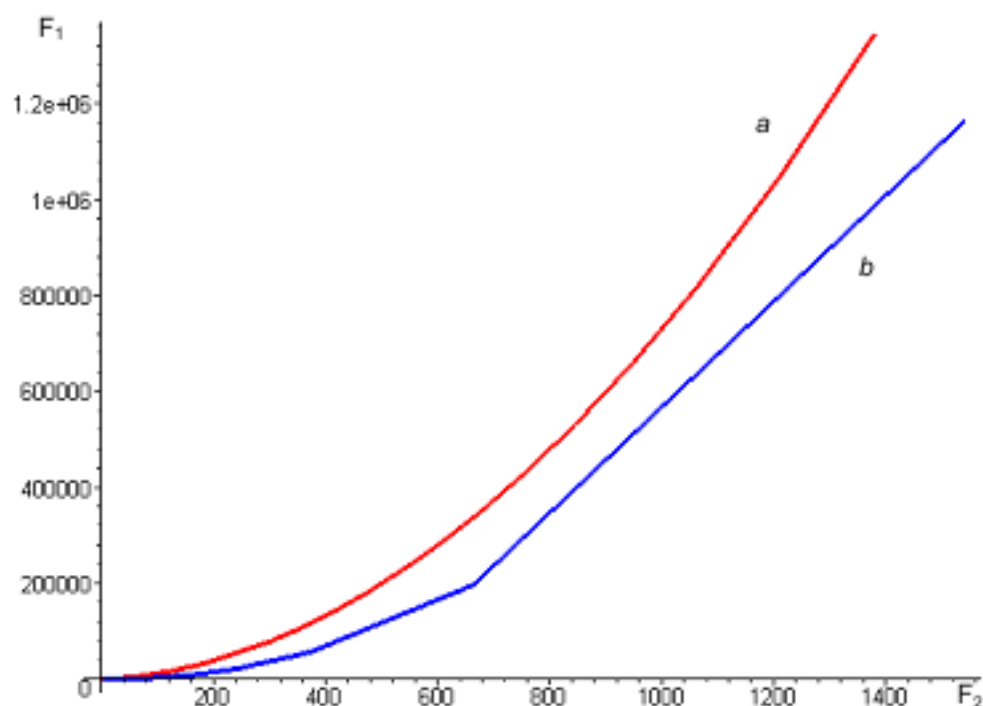


Рис. 5 Взаємозв'язок між F_1 та F_2 при $t \in [0,1)$ крива a ; та при $t \in (1,10]$ крива b

Як слідує з рис. 5 крива a розміщена вище кривої b , тому значення $t \in [0,1)$ виключаємо з рішення, а залишаємо значення $t \in (1, \infty)$.

Таким чином в просторі функціоналів рішення задачі векторної оптимізації розглядуваного прикладу 1 представлено на рисунку 6.

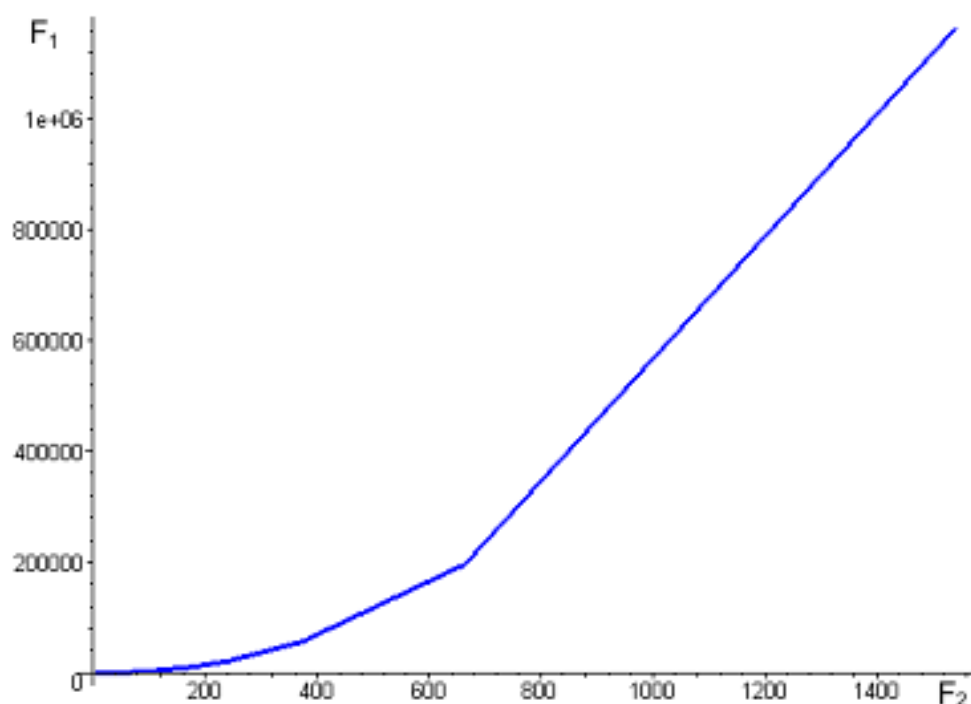


Рис. 6 Розв'язок задачі векторної оптимізації прикладу 1 в просторі функціоналів

Приклад 2. В цьому прикладі розглянемо задачу, пов'язану з технологічними процесами відновлення деталей шаруватими покриттями, які дозволяють в достатньо широкому діапазоні регулювати властивості покриттів по товщині і визначати раціональні режими відновлення.

Під раціональністю режимів відновлення будемо розуміти такі режими, коли вартість їх відновлення як можна менша, а строк служби якомога більший.

Нехай $Z(r, u)$ - вартість відновлення циліндричної деталі одичної довжини від розміру радіусу r до розміру радіусу $r + dr$, тоді відновлення циліндру від розміру r_0 до $r_0 + H$ складе

$$F_1[u] = \int_{r_0}^{r_0+H} Z(r, u) 2\pi r dr, \quad (9)$$

де u - вектор, що характеризує режим відновлення.

Якщо $\xi(r)$ - швидкість зносу товщини dr , то

$$\frac{dr}{\xi(r)}$$

буде характеризувати строк експлуатації за зносом цієї товщини.

Оскільки $\xi(r)$ - випадкова величина з щільністю розподілення ймовірностей $f(v, r)$, то середній строк експлуатації за зносом складе

$$M\left[\frac{1}{\xi(r)}\right] dr = \int_a^b \frac{f(v, r)}{v} dv dr,$$

а середній строк експлуатації за зносом товщини H буде дорівнювати

$$F_2[u] = \int_{r_0}^{r_0+H} \left(\int_a^b \frac{f(v, r)}{v} dv \right) dr. \quad (10)$$

В цьому представленні середнього строку експлуатації за зносом величини a і b залежать від радіусу та режимів відновлення, тобто

$$a = a(r, u);$$

$$b = b(r, u).$$

Таким чином приходимо до задачі векторної оптимізації

$$\begin{pmatrix} F_1[u] \\ -F_2[u] \end{pmatrix} \rightarrow \min$$

за умови, що режим відновлення $u(r)$ належить області допустимих по технології режимів U .

Полагаючи

$$f_1 = Z(r, u) \cdot 2\pi r;$$

$$f_2 = - \int_{a(r, u)}^{b(r, u)} \frac{f(v, r)}{v} dv,$$

$$\text{та ввівши } f = f_1 + t \cdot f_2,$$

отримуємо можливість застосування необхідної умови (6).

З певною ступеню точності приймаємо $Z(r, u) = c \cdot u^2$, а швидкість зносу моделюємо випадковою величиною, що розподілена за рівномірним законом, межі зміни якої представляють собою

$$a = \frac{a_0 r}{u}; \quad b = \frac{b_0 r}{u}; \quad 0 < a_0 < b_0.$$

В цьому випадку f_2 буде дорівнювати

$$f_2 = \frac{u \cdot \ln \frac{b_0}{a_0}}{(b_0 - a_0) \cdot r}.$$

Умова (6) в даному випадку буде наступною

$$4\pi c \cdot r \cdot u - t \frac{\ln \frac{b_0}{a_0}}{(b_0 - a_0) \cdot r} = 0,$$

звідки маємо

$$u = t \frac{\ln \frac{b_0}{a_0}}{4\pi c (b_0 - a_0) \cdot r^2}.$$

Дане u підставив в (9) і (10) отримаємо

$$F_1(t) = \frac{1}{8\pi c} \cdot \left(\frac{\ln \frac{b_0}{a_0}}{b_0 - a_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(r_0 + H)^2} \right) \cdot t^2;$$

$$F_2(t) = \frac{1}{8\pi c} \cdot \left(\frac{\ln \frac{b_0}{a_0}}{b_0 - a_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(r_0 + H)^2} \right) \cdot t.$$

Поклавши

$$A = \frac{1}{8\pi c} \cdot \left(\frac{\ln \frac{b_0}{a_0}}{b_0 - a_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(r_0 + H)^2} \right),$$

знайдемо зв'язок між F_1 та F_2

$$F_1 = \frac{F_2^2}{A}.$$

Висновки.

З наведених матеріалів витікає, що збільшення середнього строку експлуатації за зносом відновленої деталі потребує квадратичних витрат коштів на відновлення. Тому для будь-якої відновлювальної технології важливим є визначення розрахункового раціонального строку експлуатації (пробігу) деталей і під визначений термін (пробіг) проведення регулювання параметрів технологічного процесу. Такий підхід дозволяє отримувати певний (визначений) ресурс відновлених деталей без зайвих витрат на ремонтно-відновлювальні роботи.

Література

1. Артемчук В.В. Моделювання зносу багатошарового покриття. Міжнародний науковий журнал «Проблеми трибології». №2, 2011. - С. 59-65
2. Артемчук В.В. Побудова математичної моделі зносу з уточненими параметрами. Міжнародний науковий журнал "Проблеми трибології". № 4, 2011. - С. 121-131
3. Артемчук В.В. Теоретичні аспекти моделювання зносу багатошарових покриттів. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. - Дніпропетровськ, Україна, 2011 / Випуск 40. - С. 37-45
4. Артемчук В.В. Визначення раціональних параметрів шаруватого покриття при відновленні зношених деталей. Східно-Європейський журнал передових технологій. № 2/13(56), 2012. - С. 3-8
5. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: ГИФ-МЛ, 1961. – с. 228