МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

ДНІПРО
2022

УДК 512.8
А 64

Автори:
Бусарова Тетяна Миколаївна
Гришечкіна Тетяна Сергіївна
Звонарьова Ольга Віталіївна
Семенець Галина Іванівна

Рецензенти:
В. І. Олевський – д-р техн. наук, проф.
(Український державний хіміко-технологічний університет);
С. О. Пічугов – д-р фіз.-мат. наук, проф. (УДУНТ)

Рекомендовано
вченою радою університету як навчальний посібник
(протокол № 3 від 02.11.2020).
Зареєстровано НМВ ДНУЗТ (реєстр. № 473 від 10.11.2020)

А 64 **Аналітична** геометрія [Текст] : навч. посіб. / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро, 2022. – 118 с.
ISBN 978-617-7440-29-0

Посібник містить теоретичний матеріал і велику кількість розв’язаних прикладів за темою «Аналітична геометрія».
Для студентів денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей.
. Іл. 99. Табл. 1. Бібліогр.: 3 назви.

УДК 512.8

© Т. М. Бусарова та ін., 2022
© Укр. держ. ун-т науки і технологій, оригінал-макет, 2022

ISBN 978-617-7440-29-0

ЗМІСТ

ВСТУП 4

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ 5
1.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині 5
1.2. Рівняння прямої лінії на площині 15
1.2.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 15
1.2.2. Загальне рівняння прямої та його дослідження 18
1.2.3. Рівняння прямої у відрізках на осях 21
1.2.4. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі 22
1.2.5. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки 24
1.2.6. Кут між прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих 26
1.2.7. Нормальне рівняння прямої 27
1.3. Криві другого порядку 48
1.3.1. Коло 48
1.3.2. Еліпс 49
1.3.3. Гіпербола 60
1.3.4. Парабола 68
1.3.5. Приведення кривих до канонічного вигляду 76

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ 82
2.1. Площина, її рівняння 82
2.1.1. Рівняння площини, яка проходить через задану точку 82
2.1.2. Загальне рівняння площини, його дослідження 83
2.1.3. Рівняння площини у відрізках на осях 85
2.1.4. Рівняння площини, що проходить через три точки, які не лежать на одній прямій 86
2.1.5. Нормальне рівняння площини 88
2.2. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин 89
2.3. Пряма у просторі, її рівняння 99
2.3.1. Канонічні рівняння прямої 99
2.3.2. Параметричні рівняння прямої 100
2.3.3. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки 101
2.3.4. Пряма як лінія перетину двох площин 102
2.4. Кут між прямими. Умови паралельності й перпендикулярності прямих 103

2.5. Взаємне розташування прямої і площини 108
2.5.1. Кут між прямою і площиною 108
2.5.2. Умова паралельності прямої і площини 109
2.5.3. Умова перпендикулярності прямої і площини 109

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК 118

ВСТУП

Мета викладання дисципліни «Вища математика» – допомогти студентам оволодіти математичним апаратом, достатнім для опрацювання математичних моделей, пов'язаних з їхньою подальшою практичною діяльністю.

Навчальний посібник «Аналітична геометрія» сприятиме засвоєнню студентами методів розв'язання задач із цього розділу вищої математики. Переваги видання: з одного боку – невеликий формат,
з іншого – містить усе, що потрібно студенту для підготовки до відповідного модуля.

Кожен розділ посібника починається з теоретичного матеріалу, у якому наведено важливі означення та формули. Потім розглядається достатня кількість розв'язаних прикладів, які поділені на дві
групи: найпростіші та приклади середньої важкості. Автори свідомо не розглядали прикладів підвищеної складності, тому що ставили за мету навчити студентів розв'язувати основні приклади, надати їм деякий мінімум, необхідний для засвоєння цього розділу вищої математики.

Посібник буде добрим помічником студентам І курсу всіх факультетів у вивченні вказаного розділу вищої математики.

Навчальний посібник «Аналітична геометрія» може бути застосований як доповнення до аудиторних занять, так і для самостійної роботи студентів. У результаті вивчення наданого

матеріалу студенти повинні знати основні поняття та формули, а також вміти застосовувати їх під час розв’язання прикладних задач.

РОЗДІЛ 1

Аналітична геометрія на площині

1.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині

Розглянемо деякі найпростіші задачі аналітичної геометрії. До них зазвичай відносять три задачі:

1. Обчислення відстані між двома точками.
2. Обчислення координат точки, яка ділить відрізок у співвідношенні λ.
3. Обчислення площі трикутника (за відомими координатами вершин трикутника).

1. Обчислення відстані між двома точками. Нехай задано точки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$. Знайдемо відстань між ними.

Легко помітити, що визначення відстані між точками d_{MN} аналогічно визначенню довжини вектора $\overline{MN}$ (або $\overline{NM}$) (рис. 1). Тому

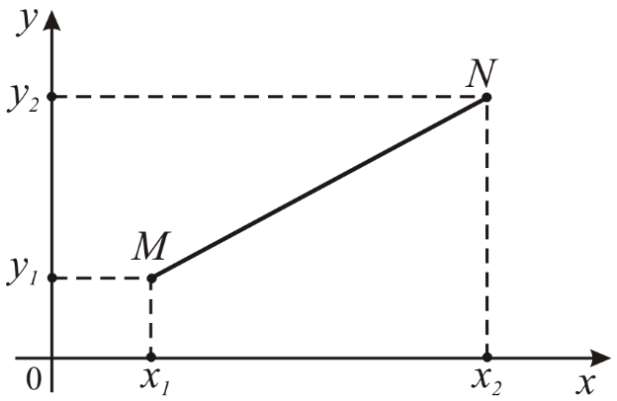

Рис. 1

$$d_{MN} = \left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Приклад. Знайти відстань між точками $M(3; -2)$ і $N(4; 5)$.

Розв'язання. Зауважимо, що не має значення, яка точка буде мати координати $(x_1; y_1)$, а яка $(x_2; y_2)$. Тому:

$$d_{MN} = \left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(4-3)^2 + \left[5-(-2)\right]^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,.$$

2. Обчислення координат точки, яка ділить відрізок у співвідношенні λ. Нехай задано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Розглянемо відрізок *AB* і встановимо на ньому додатний напрям (наприклад, від *A* до *B*; іншими словами, утворимо вектор $\overline{AB}$). Нехай т. $M(x; y)$ належить відрізку *AB*. Де б не була розташована т. *M* – всередині від-різка *AB* або на його продовженні в той чи інший бік – будемо казати, що вона ділить відрізок *AB*. Причому, якщо т. *M* лежить між точками *A* і *B*, то будемо казати, що вона <u>ділить *AB* внутрішнім чином</u>. Якщо ж т. *M* лежить на продовженні *AB*, то будемо казати, що вона <u>ділить *AB* зовнішнім чином</u>.

Розглянемо випадок, коли т. *M* лежить всередині відрізку *AB* (ділить *AB* внутрішнім чином). З випадком, коли т. *M* ділить *AB* зовнішнім чином, можна ознайомитися, наприклад, у [1; 3; 6, с. 19–22]. Позначимо відношення, у якому т. *M* ділить відрізок *AB*, через λ, тобто $\lambda = \frac{AM}{MB}$. У цьому випадку $\lambda > 0$. Зауважимо, що коли т. *M* збігається з т. *A*, то $\lambda = 0$. Коли т. *M* збігається з т. *B*, кажуть, що λ не існує. Відкинемо ці випадки й будемо вважати, що т. *M* не збігається ні з т. *A*, ні з т. *B*.

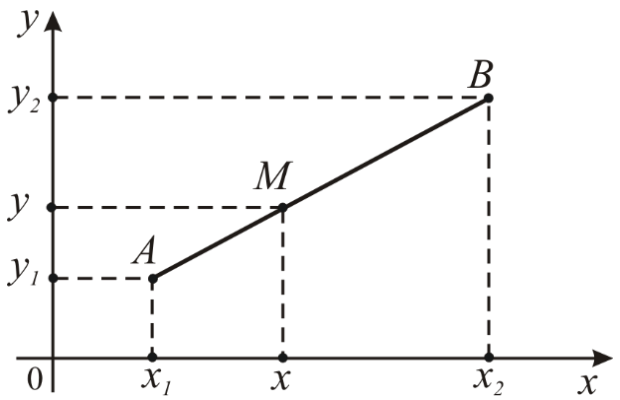

Рис. 2

А тепер сформулюємо цю задачу коротко: задано точки *A*, *B* і відношення λ. Потрібно знайти координати точки *M*.

Дивимось на рис. 2. і записуємо:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x - x_1 =$$

$$= \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогічно будемо мати $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Отже, координати точки *M* знаходять за формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

У цих формулах обов'язково потрібно правильно встановити, де буде перша точка (з координатами $(x_1; y_1)$), а де друга (з координатами $(x_2; y_2)$). Зробити це просто: якщо $\lambda = \frac{AM}{MB}$, то *A* – перша точка, а *B* – друга. Якщо $\lambda = \frac{BM}{MA}$, то $B(x_1; y_1)$ і $A(x_2; y_2)$.

Зауваження. Якщо <u>точка *M* ділить відрізок *AB* навпіл</u>, то $\lambda = 1$ (тут вже не має значення, яка точка перша, яка друга) і формули (2) спрощуються:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Приклад. Задано дві точки: $A(-3;1)$ і $B(7;9)$. Знайти координати середини відрізка *AB*.

Розв'язання. Позначимо середину відрізка точкою $M(x; y)$. Скористаємося формулами (3):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5.$$

Отже, середина відрізка *AB* – точка *M*, має координати: $M(2; 5)$.

3. Обчислення площі трикутника. Нехай задано вершини трикутника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Без доведення запишемо формулу обчислення площі трикутника *ABC*

$$S_{\Delta} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Зрозуміло, що площа трикутника завжди додатна, тому: знак «+» обирається у випадку, коли визначник додатний, знак «–» – коли визначник від'ємний.

Приклад. Обчислити площу трикутника *ABC* за відомими координатами його вершин: $A(-2;3)$, $B(1;-4)$, $C(-8;10)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4):

$$S_{\Delta} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -8 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(8-24+10-32+20-3) = \frac{21}{2}.$$

Зауваження. Можна довести, що координати точки перетину медіан $(M(x_0;y_0))$ трикутника визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \\ y_0 &= \frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

До речі, точка $M(x_0;y_0)$ є, крім того, центром тяжіння цього трикутника.

Приклад. Задано вершини трикутника: $A(-2;0)$, $B(-3;6)$, $C(5;-4)$. Знайти координати центра тяжіння цього трикутника.

Розв'язання. За формулами (5):

$$x_0 = \frac{-2-3+5}{3} = 0,\ y_0 = \frac{0+6-4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тобто координати центра тяжіння трикутника *ABC*: $M\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Основні формули розділу

Опис	Формула
Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$	$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Координати точки $M(x; y)$, яка ділить відрізок AB $(A(x_1; y_1), B(x_2; y_2))$ у відношенні $\lambda = \frac{AM}{MB}$	$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$
Координати точки $M(x; y)$, яка ділить відрізок AB навпіл $(\lambda = 1)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Площа трикутника з вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$	$S_\Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
Координати точки $M(x_0; y_0)$, яка є точкою перетину медіан і водночас центром тяжіння трикутника	$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. За якою формулою обчислюють відстань між двома точками?
2. Що таке λ? Як визначити, яка точка буде мати координати $(x_1; y_1)$, а яка координати $(x_2; y_2)$?
3. За якими формулами обчислюють координати точки, яка ділить відрізок у певному відношенні?
4. Чому дорівнює λ, коли точка ділить відрізок навпіл?
5. За якою формулою обчислюють площу трикутника?
6. Нехай задано вершини трикутника. Що можна обчислити за допомогою формул: $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$?

Розглянемо приклади.

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти відстань між точками:

1) $A(1;-3)$, $B(4;2)$;

2) $M(0;2)$, $N(-7;3)$.

Розв'язання.

1. Відстань між точками обчислюємо за формулою (1): $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Не має значення, яка точка буде мати координати $(x_1;y_1)$, а яка $(x_2;y_2)$. Нехай точка A буде мати координати: $x_1=1$, $y_1=-3$, а точка B – координати $x_2=4$, $y_2=2$. Тоді

$$d_{AB}=\sqrt{(4-1)^2+[2-(-3)]^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}.$$

2. Аналогічно розв'яжемо й цей приклад:

$$d_{MN}=\sqrt{(-7-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Приклад 2. Знайти координати середини відрізка PQ, якщо $P(6;-2)$, $Q(1;-4)$.

Розв'язання. Координати середини відрізка PQ, тобто точку $M(x;y)$, знайдемо за формулами (3):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2-4}{2}=-3.$$

Отже, координати середини відрізка PQ: $M\left(\frac{7}{2};-3\right)$.

Приклад 3. Знайти площу трикутника MNP, якщо $M(0;-1)$, $N(2;4)$, $P(5;-6)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4):

$$S_{\Delta}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left(-5-12-20+2\right)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left(-35\right)=\frac{35}{2}.$$

Площа не може бути від'ємною.

Приклад 4. Задано вершини трикутника: $A\left(-7;0\right)$, $B\left(2;1\right)$, $C\left(-4;5\right)$. Знайти координати центра тяжіння трикутника.

Розв'язання. Застосуємо формули (5) і знайдемо координати точки $M\left(x_0;y_0\right)$:

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{-7+2-4}{3}=-3,\quad y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{0+1+5}{3}=2.$$

Тобто координати центра тяжіння $M\left(-3;2\right)$.

До речі, якби в прикладі потрібно було знайти координати точки перетину медіан трикутника, то розв'язання було б таким самим.

Приклад 5. Задано дві суміжні вершини квадрата: $A\left(-8;1\right)$, $B\left(-3;5\right)$. Знайти площу квадрата.

Розв'язання. Відомо, що площа квадрата дорівнює квадрату його сторони: $S=a^2$. Тому спочатку знайдемо довжину сторони квадрата $AB=a$ за формулою (1):

$$d_{AB}=\sqrt{\left(-8+3\right)^2+\left(1-5\right)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}.$$

Тоді площа квадрата буде дорівнювати:

$$S=a^2=\left(d_{AB}\right)^2=41.$$

Приклад 6. Задано точку $M\left(5;-2\right)$. Знайти координати точки M_1, яка: 1) симетрична точці *M* відносно осі *OX*; 2) симетрична точці *M* відносно осі *OY*.

Розв'язання.

1. Цей приклад розв'язується дуже просто, якщо зробити рисунок. З рис. 3 зрозуміло, що координати симетричної відносно осі *OX* точки $M_1(5;2)$.

2. А в цьому випадку (рис. 4) $M_1(-5;-2)$.

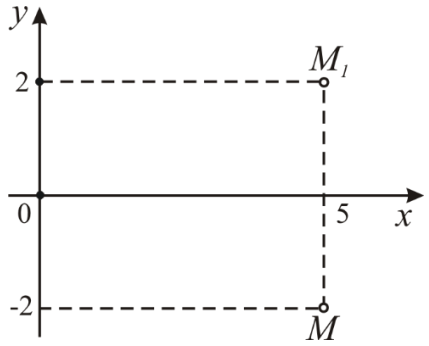

Рис. 3

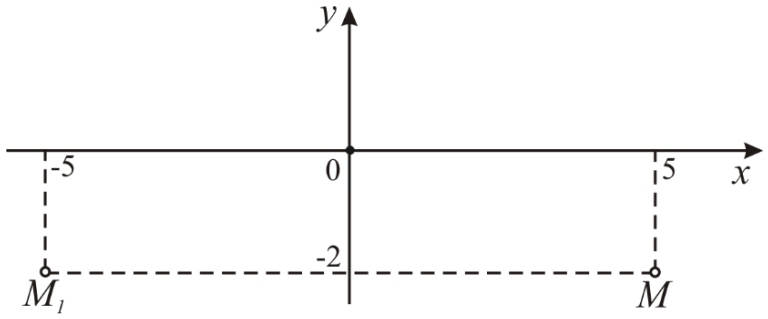

Рис. 4

Розділ II

Приклад 1. Відстань між точками *M* і *N* дорівнює $\sqrt{53}$. Знайти ординату точки $N(2;y_0)$, якщо $M(4;-2)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (1):

$$d_{MN}=\sqrt{53}=\sqrt{(2-4)^2+(y_0+2)^2}\,.$$

Піднесемо до квадрата одержану рівність і спростимо її:

$$53=4+(y_0+2)^2\Rightarrow 53=4+y_0{}^2+4y_0+4\Rightarrow y_0{}^2+4y_0-45=0\,.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння й одержимо $y_{0_1}=-9$, $y_{0_2}=5$.

Отже, маємо дві відповіді: $N_1(2;-9)$, $N_2(2;5)$.

Зауважимо, що розв'язання можна виконати дещо інакше:

$$53=4+(y_0+2)^2\Rightarrow 49=(y_0+2)^2\Rightarrow y_0+2=\pm 7\Rightarrow y_{0_1}=-9;\;\; y_{0_2}=5\,.$$

Приклад 2. На осі *OX* знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки $P(-3;4)$.

Розв'язання. Позначимо шукану точку $M(x;0)$. За умовою прикладу $d_{MP}=d_{M0}$ (рис. 5).

Знайдемо за формулою (1) довжини відрізків *MP*, *MO* і прирівняємо їх

$$d_{MP}=\sqrt{(-3-x)^2+(4-0)^2},\ \ d_{MO}=x.$$

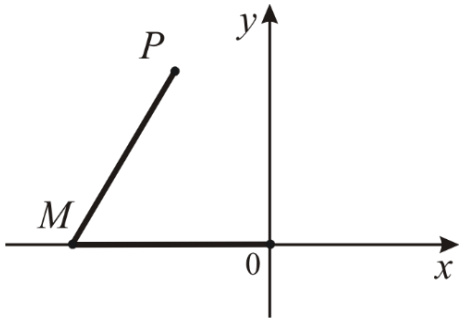

Рис. 5

Тоді

$$\sqrt{(-3-x)^2+(4-0)^2}=x\Rightarrow 9+6x+x^2+16=x^2\Rightarrow 6x=-25\Rightarrow x=-\frac{25}{6}.$$

Отже, точка *M* буде мати координати $\left(-\frac{25}{6};0\right)$.

Приклад 3. Відстань між точками $(x;5)$ і $(-2;y)$ ділиться навпіл у точці $(1;1)$. Знайти *x* і *y*.

Розв'язання. Скористаємося формулами (3):

$$1=\frac{x-2}{2},\quad 1=\frac{5+y}{2}.$$

Розв'яжемо одержані рівняння:

$$x-2=2\Rightarrow x=4,\ \ 5+y=2\Rightarrow y=-3.$$

Отже, $x=4$, $y=-3$.

Приклад 4. Відрізок *AB* поділений на три рівні частини точками *M* і *N*. Знайти координати цих точок, якщо $A(1;3)$, $B(7;11)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати точки *M*. За умовою прикладу відрізок *AB* поділений на три рівні частини, тому $\lambda=\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$ (рис. 6). У цьому випадку в разі застосування формул (2) точка *A* буде мати координати $(x_1;y_1)$, а точка *B* – координати

$(x_2; y_2)$. До речі, якщо $\lambda = \frac{BM}{MA} = \frac{2}{1} = 2$, то навпаки: $B(x_1; y_1)$, $A(x_2; y_2)$. Оберемо другий варіант:

$$x_M = \frac{x_B + \lambda x_A}{1+\lambda} = \frac{7+2\cdot 1}{1+2} = 3,\ y_M = \frac{y_B + \lambda y_A}{1+\lambda} = \frac{11+2\cdot 3}{3} = \frac{17}{3}.$$

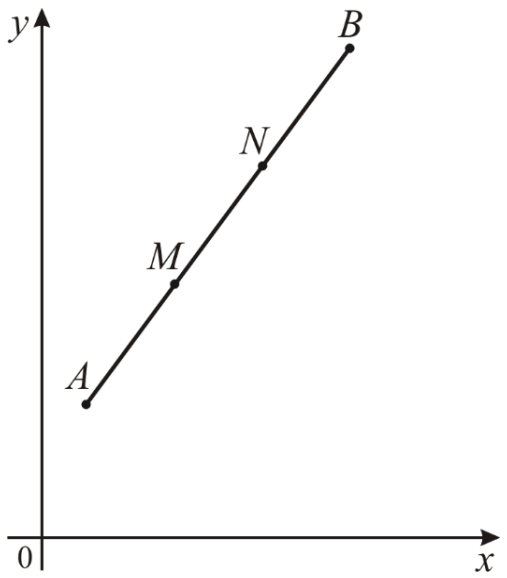

Рис. 6

Тобто координати точки $M\left(3; \frac{17}{3}\right)$.

Аналогічно знайдемо координати точки N:

$$\lambda = \frac{AN}{NB} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 7}{1+2} = 5,\ y_N = \frac{25}{3}.$$

Отже, точка N має координати $N\left(5; \frac{25}{3}\right)$.

Приклад 5. Перевірити, чи належать точки $(-2; -1)$, $(1; -3)$, $(4; 4)$ одній прямій.

Розв'язання. Якщо ці точки належать одній прямій, то площа трикутника з вершинами в цих точках буде дорівнювати нулю. Тому застосуємо формулу (4) (причому тут можна просто обчислити визначник)

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 + 12 + 8 + 1 = 27 \neq 0.$$

Тобто точки не належать одній прямій.

1.2. Рівняння прямої лінії на площині

Означення. Рівняння $F(x;y)=0$ називається *рівнянням лінії* у прямокутній системі координат, якщо координати x і y точки площини задовольняють це рівняння, коли точка належить цій лінії, і не задовольняють, коли точка не належить лінії.

Зауважимо, що в рівнянні $F(x;y)=0$ x і y можуть мати різні степені. До речі, нагадаємо, що x і y називають *поточними координатами*.

Спочатку розглянемо рівняння ліній, які містять x і y у першому степені. Такі лінії називають *прямими на площині*.

1.2.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Розглянемо пряму, яка утворює з додатним напрямом осі OX кут φ (рис. 7).

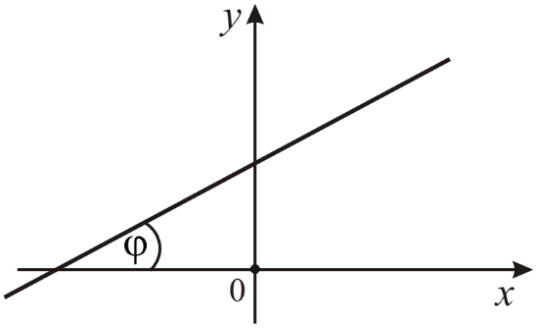

Рис. 7

Означення. Кут φ, на який потрібно повернути <u>додатний напрям</u> осі OX <u>проти годинникової стрілки</u> до суміщення з прямою, називають *кутом нахилу* прямої до осі OX.

Тангенс кута φ називається *кутовим коефіцієнтом* k цієї прямої, тобто $\mathrm{tg}\varphi = k$. Кутовий коефіцієнт може бути додатним, від'ємним, а може дорівнювати нулю (у деяких випадках k не існує).

Якщо $\varphi = 0$, то $\mathrm{tg}\varphi = 0$, а тому $k = 0$. У цьому випадку пряма горизонтальна (рис. 8).

Якщо $\varphi > 0$, то $\mathrm{tg}\varphi > 0$, а тому $k > 0$. Можна навпаки: якщо $k > 0$, то кут φ – гострий (рис. 9).

Якщо $\varphi < 0$, то $\mathrm{tg}\varphi < 0$, а тому $k < 0$. Можна навпаки: якщо $k < 0$, то кут φ – тупий (рис. 10).

Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\mathrm{tg}\varphi = \infty$. У цьому випадку кажуть, що кутовий коефіцієнт не існує. Тобто вертикальна пряма його не має (рис. 11).

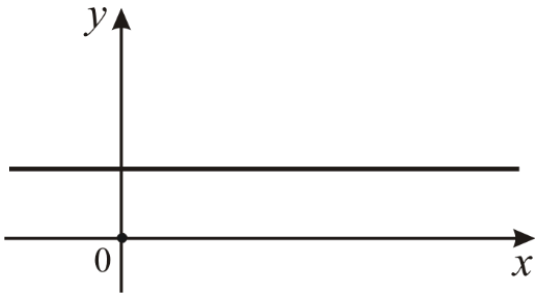

Рис. 8

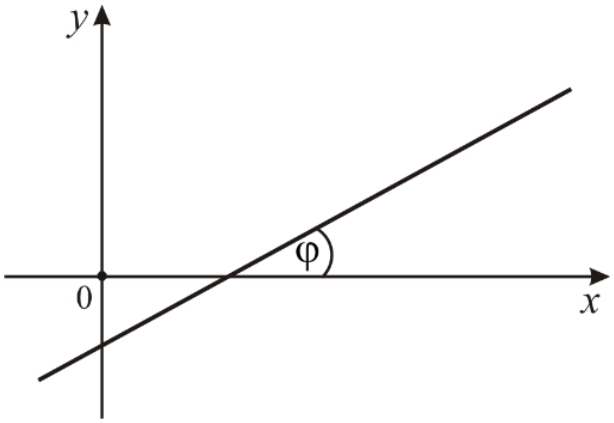

Рис. 9

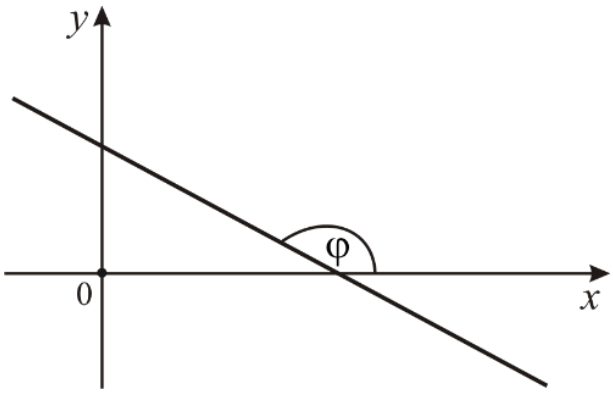

Рис. 10

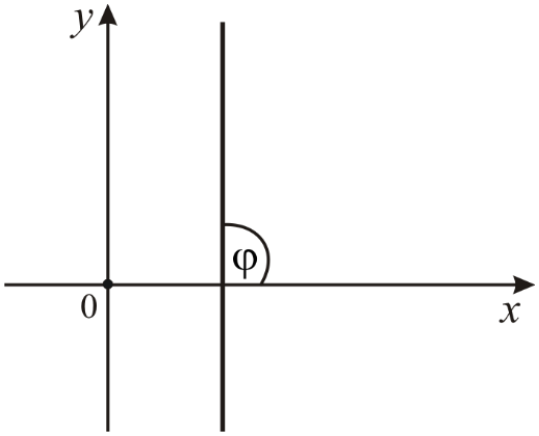

Рис. 11

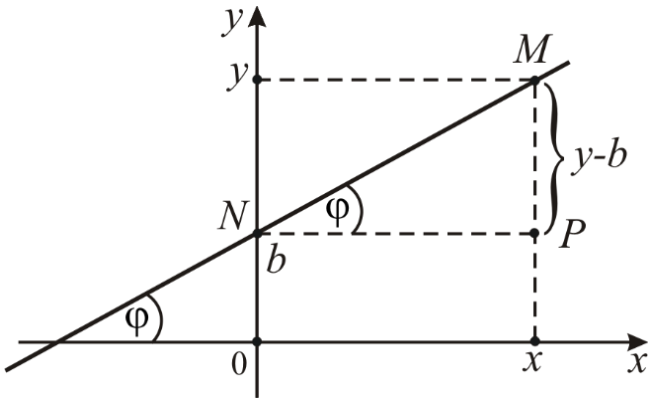

Рис. 12

Розглянемо пряму, яка утворює з додатним напрямом осі OX кут φ і перетинає вісь OY в точці $N(0;b)$. Тобто задано кут нахилу φ прямої і ві-дрізок b, який пряма відтинає на осі OY. Потрібно за цими даними скласти рівняння прямої (рис. 12).

Нехай точка $M(x;y)$ належить прямій. Розглянемо трикутник NMP і знайдемо $\mathrm{tg}\varphi$:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{PM}{NP} = \frac{y-b}{x}$$

або

$$k = \frac{y-b}{x}, \quad x \neq 0.$$

З рівняння знайдемо y:

$$kx = y - b,$$

$$y = kx + b. \qquad (6)$$

Рівняння (6) називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Зауваження. Кожна пряма, не перпендикулярна до осі OX, може бути записана рівнянням (6). Якщо в цьому рівнянні $b = 0$, то $y = kx$, одержуємо *рівняння прямої, яка проходить через початок координат*.

Коли $k = 1$ $\left(k = \mathrm{tg}\varphi = 1,\ \text{звідси}\ \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$, то $y = x$ – *рівняння бісектриси I і III* координатних кутів (рис. 13).

Коли $k = -1$ $\left(k = \mathrm{tg}\varphi = -1,\ \text{звідси}\ \varphi = \frac{3}{4}\pi\right)$, то $y = -x$ – *рівняння бісектриси II і IV* координатних кутів (рис. 14).

Якщо в рівнянні (6) $k = 0$, то одержимо рівняння $y = b$. Це *рівняння прямої, яка паралельна осі OX* $(\varphi = 0)$ і відтинає на осі OY відрі-зок b (рис. 15).

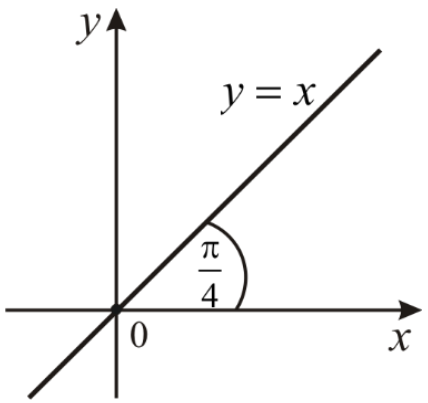

Рис. 13

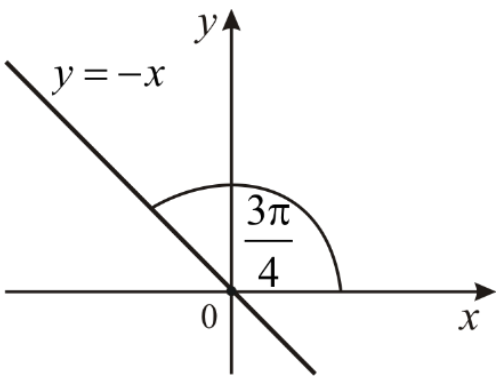

Рис. 14

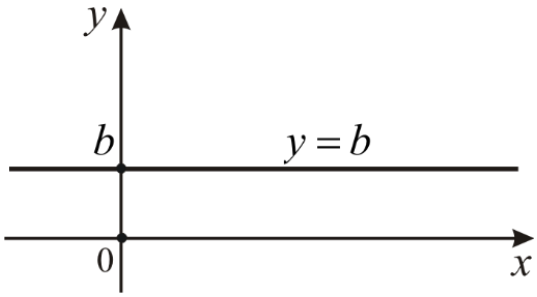

Рис. 15

Приклад. Знайти рівняння прямої, якщо кут нахилу $\varphi = \frac{\pi}{3}$, а відрізок, який пряма відтинає на осі *OY*, дорівнює 2.

Розв'язання. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{3}$, то $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Тому $k = \sqrt{3}$. Крім того, за умовою прикладу $b = 2$. Тоді за формулою (6) рівняння прямої буде мати вигляд $y = \sqrt{3}x + 2$.

1.2.2. Загальне рівняння прямої та його дослідження

Рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$

де A, B, C – числа (коефіцієнти), називається *загальним рівнянням прямої*.

З'ясуємо, яке положення займає пряма лінія відносно координатних осей, якщо один або два коефіцієнти рівняння (7) дорівнюють нулю.

1. Нехай $\boldsymbol{C = 0}$.

Тоді $Ax + By = 0$ – це *рівняння прямої, яка проходить через початок координат*. Наприклад: $2x + 5y = 0$, $x - 7y = 0$.

Зауважимо, що раніше рівняння прямої, яка проходить через початок координат, ми записували у вигляді $y = kx$, а тепер стверджуємо, що $Ax + By = 0$ – це теж рівняння прямої, яка проходить через початок координат. Помилки немає, тому що рівняння $y = kx$ можна записати у вигляді $kx - y = 0$ (дійсно, наприклад, $y = 3x \Rightarrow 3x - y = 0$).

А можна навпаки: рівняння $Ax + By = 0$ записати у вигляді $y = -\frac{A}{B}x$ (дійсно: $2x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x$).

2. Нехай $\boldsymbol{A = 0}$.

Тоді $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$. Якщо позначимо $-\frac{C}{B} = b$, то одержимо *рівняння прямої, паралельної осі OX*: $y = b$. Ця пряма відтинає на осі *OY* відрізок, який дорівнює *b*. Зауважимо, що таке рівняння ми отримували в попередньому розділі. Наприклад: $3y - 7 = 0$, або $y = \frac{7}{3}$; $y + 5 = 0$, або $y = -5$ (рис. 16).

3. Нехай $\boldsymbol{B = 0}$.

Тоді $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$. Якщо позначимо $-\frac{C}{A} = a$, то одержимо *рівняння прямої, паралельної осі OY*: $x = a$. Ця пряма відтинає на осі *OX* відрізок, який дорівнює *a*. Наприклад: $3x + 7 = 0$, або $x = -\frac{7}{3}$; $\frac{x}{4} - 2 = 0$, або $x = 8$ (рис. 17).

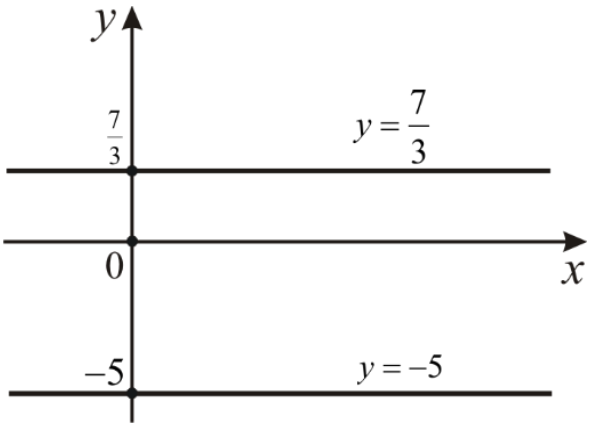

Рис. 16

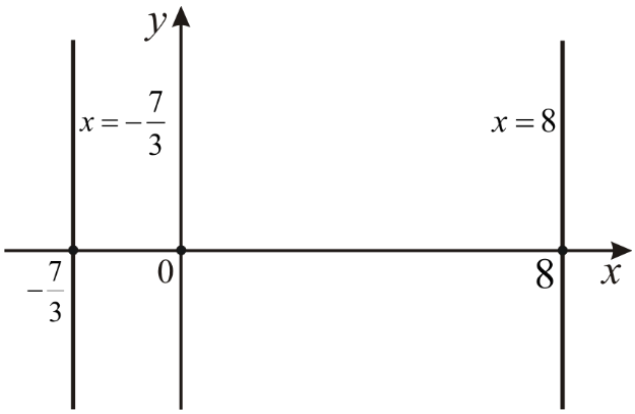

Рис. 17

4. Нехай $\boldsymbol{A = C = 0}$. Тоді $By = 0$ або $y = 0$ – це *рівняння осі OX*.

5. Нехай $\boldsymbol{B = C = 0}$. Тоді $Ax = 0$ або $x = 0$ – це *рівняння осі OY* (рис. 18).

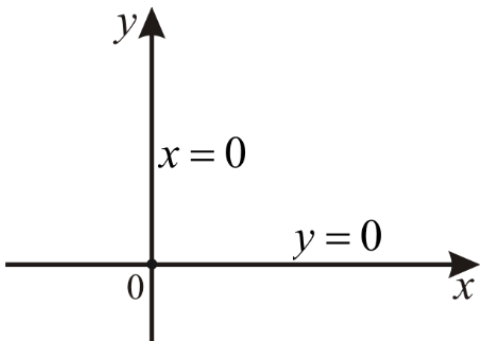

Рис. 18

Побудова прямої лінії за її рівнянням

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ $\left(A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0\right)$, то для її побудови найпростіше знайти точки перетину прямої з осями координат.

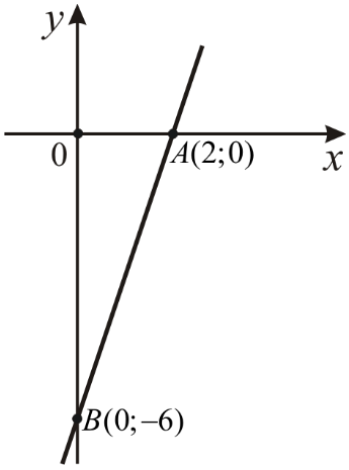

Рис. 19

Приклад. Побудувати пряму $3x - y - 6 = 0$.

Розв'язання. Нехай у цьому рівнянні $y = 0$, тоді $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$. Отже, пряма проходить через точку $A\left(2; 0\right)$ (перетинає вісь OX у точці A). А тепер приймемо в рівнянні $x = 0$, тоді $-y - 6 = 0 \Rightarrow y = -6$. Отже, пряма проходить через точку $B\left(0; -6\right)$ (перетинає вісь OY у точці B). Будуємо пряму, яка проходить через точки A і B (рис. 19).

Якщо пряма задана рівнянням $Ax + By = 0$ ($A \neq 0, B \neq 0$), то вона проходить через початок координат (див. дослідження загального рівняння прямої). Другу точку можна визначити, прийнявши, наприклад, $x = 1$.

Приклад. Побудувати пряму $3x - 4y = 0$.

Розв'язання. Ця пряма проходить через початок координат (можна перевірити, підставивши в рівняння точку $O\left(0; 0\right)$). Знайдемо координати другої точки. Для цього візьмемо, наприклад, значення $x = 1$

і підставимо його в рівняння: $3-4y=0 \Rightarrow 4y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{4}$. Отже, пряма проходить через точку $A\left(1;\frac{3}{4}\right)$. Будуємо пряму (рис. 20).

Якщо пряму задано рівнянням $y=kx+b$, то із цього рівняння відома величина відрізка b. І для побудови прямої достатньо визначити координати однієї точки.

Приклад. Побудувати пряму $y=-2x+4$.

Розв'язання. Із рівняння видно, що $b=4$. Тобто пряма на осі OY відтинає відрізок, величина якого $b=4$. Інакше кажучи, пряма перетинає вісь OY в точці $B(0;4)$. Найпростіше буде визначити точку перетину прямої з віссю OX. Нехай $y=0$, тоді $0=-2x+4$, звідси $x=2$. Точка перетину прямої з віссю OX має координати $A(2;4)$. Будуємо пряму (рис. 21).

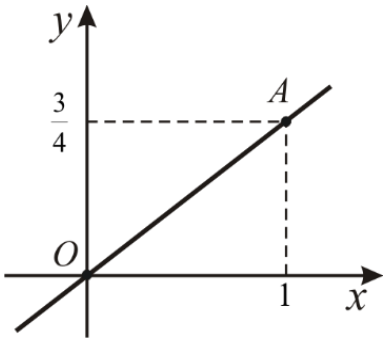

Рис. 20

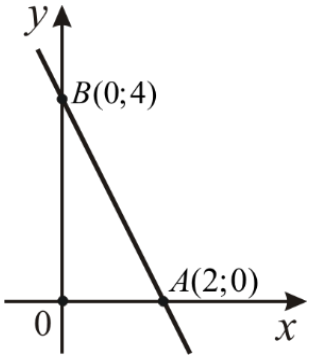

Рис. 21

1.2.3. Рівняння прямої у відрізках на осях

Розглянемо пряму, яка не проходить через початок координат і перетинає осі координат у двох точках. Спочатку запишемо її рівняння в загальному вигляді $Ax+By+C=0$. За умовою $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Перетворимо це рівняння:

$$Ax+By=-C \Rightarrow \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1.$$

Позначимо $\frac{-C}{A}=a$, $\frac{-C}{B}=b$. Тоді рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8)$$

Рівняння (8) називають рівнянням прямої у відрізках на осях. Визначимо геометричний зміст чисел a і b і водночас зрозуміємо, чому пряма називається «у відрізках на осях» (або просто «у відрізках»).

Нехай у рівнянні (8) $y=0$, тоді $\frac{x}{a}=1$, або $x=a$. Маємо точку $(a;0)$. Тепер нехай у рівнянні (8) $x=0$, тоді $\frac{y}{b}=1$, або $y=b$. Маємо точку $(0;b)$. Ці точки належать прямій і в цих точках пряма перетинає осі координат. Тобто a – відрізок, який пряма відтинає на осі OX, b – відрізок, який пряма відтинає на осі OY. Рівняння прямої у вигляді (8) дає змогу швидко побудувати цю пряму.

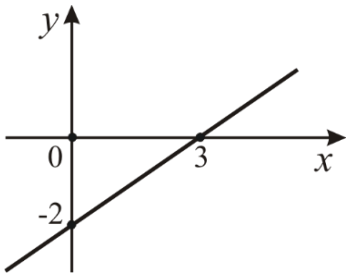

Рис. 22

Приклад. Побудувати пряму $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$.

Розв'язання. Спочатку запишемо рівняння прямої у вигляді (8): $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$. Звідси $a=3, b=-2$. Будуємо пряму (рис. 22).

1.2.4. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

Знайдемо рівняння прямої, якщо відомі кутовий коефіцієнт і точка $M(x_0;y_0)$, через яку проходить пряма.

Застосуємо рівняння (6): $y=kx+b$. Відомо, що коли пряма проходить через точку $M(x_0;y_0)$, то ми можемо в рівнянні прямої замість поточних координат підставити координати точки M:

$y_0 = kx_0 + b$.

А тепер розглянемо таку «систему»:

$$\begin{cases} y = kx + b; \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases}$$

Знайдемо різницю: $y - y_0 = kx + b - (kx_0 + b) \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)$.

Так легко ми одержали *рівняння прямої, яка проходить через задану точку* (іноді доповнюють – «у заданому напрямку»):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (9)$$

Зауваження 1. За допомогою рівняння (9) можна записати рівняння кожної прямої, не перпендикулярної осі *OX*.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (9) кутовий коефіцієнт *k* буде набувати всіляких числових значень, то таке рівняння буде визначати сукупність прямих, які проходять через точку $M(x_0; y_0)$, тобто пучок прямих з центром в точці *M*.

Приклад. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3; 2)$і має кутовий коефіцієнт $k = 4$. Привести одержане рівняння до загального вигляду. Побудувати пряму.

Розв'язання. Застосуємо рівняння (9): $y - y_0 = k(x - x_0)$. За умовою $x_0 = -3,$, $y_0 = 2$, $k = 4$. Отже, будемо мати: $y - 2 = 4(x + 3)$.

Приведемо одержане рівняння до загального вигляду $(Ax + By + C = 0)$:

$$y - 2 = 4(x + 3) \Rightarrow y - 2 = 4x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + y - 14 = 0 \Rightarrow 4x - y + 14 = 0.$$

Побудуємо пряму: $y = 0$, тоді $x = -\frac{7}{2}$, $A\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. $x = 0$, тоді $y = 14$, $B(0; 14)$ (рис. 23).

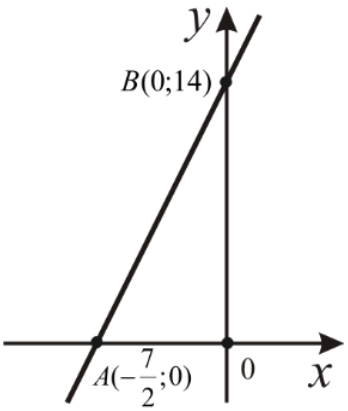

Рис. 23

1.2.5. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, які належать прямій. Потрібно записати рівняння прямої, яка проходить через ці точки (рис. 24).

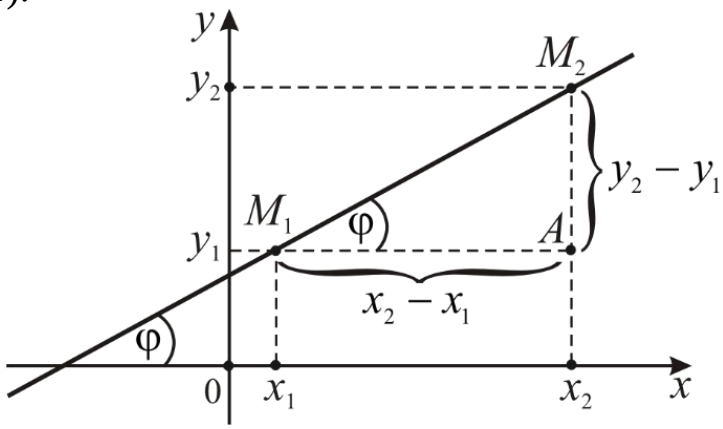

Рис. 24

Нехай $\varphi \neq 0$ і $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Із $\Delta M_1 M_2 A$ знайдемо: $\mathrm{tg}\varphi = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

До речі, одержали ще одну формулу для обчислення *кутового коефіцієнта k*:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{10}$$

Далі підставимо значення k в рівняння прямої (9): $y - y_1 = k(x - x_1)$ – тут пряма проходить через точку (x_1, y_1):

$$y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Розділимо обидві частини одержаного рівняння на $y_2 - y_1$ $(y_2 \neq y_1)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{11}$$

Рівняння (11) називають *рівнянням прямої, яка проходить через дві точки*.

Зауваження. За допомогою рівняння (11) можна записати рівняння кожної прямої, не перпендикулярної осям *OX* і *OY*. Але, нагадуємо, що для прямих, перпендикулярних осям, існують інші рівняння: $y = y_1$ або $y = b$ – рівняння прямої, перпендикулярної осі *OY*; $x = x_1$ або $x = a$ – рівняння прямої, перпендикулярної осі *OX*.

Приклад. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-2;1)$ і $M_2(3;5)$.

Розв'язання. Застосуємо рівняння (11):

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)} \Rightarrow \frac{y-1}{4} = \frac{x+2}{5}.$$

Приведемо одержане рівняння до загального вигляду:

$$5(y-1) = 4(x+2) \Rightarrow 5y-5 = 4x+8 \Rightarrow -4x+5y-13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-5y+13 = 0.$$

Зауваження. За допомогою рівняння (11) можна одержати умову того, що три точки належать одній прямій. Дійсно, рівняння (11) – це рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$. Нехай на цій прямій лежить ще одна точка $M_3(x_3; y_3)$. Тоді ми маємо право підставити в рівняння (11) замість поточних координат координати точки M_3. Тобто

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (12)$$

Вираз (12) – це *умова* того, що *три точки належать одній прямій*.

1.2.6. Кут між прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Нехай задано дві прямі L_1 і L_2, які не перпендикулярні осі OX і мають рівняння: $y = k_1x + b_1$ (L_1), $y = k_2x + b_2$ (L_2) (рис. 25). Тоді, якщо $k_1 = \text{tg}\varphi_1$ і $k_2 = \text{tg}\varphi_2$, то кут нахилу прямої L_1 буде φ_1, а L_2 – φ_2.

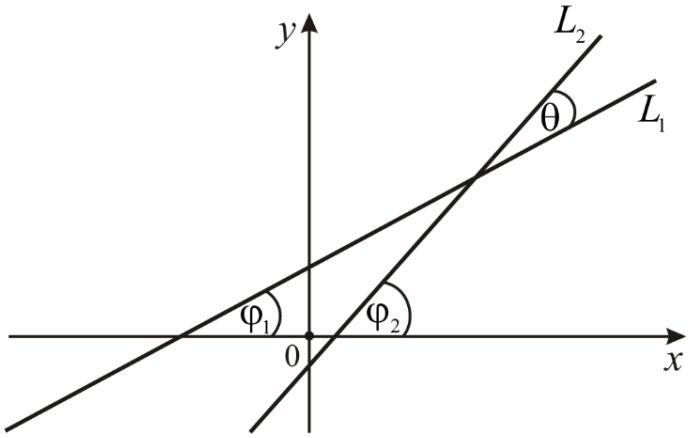

Рис. 25

Означення. Кутом Θ між прямими L_1 і L_2 називається кут, на який потрібно повернути пряму L_1 проти годинникової стрілки, щоб вона збіглась (або стала паралельною) з прямою L_2.

Зауважимо, що кут Θ визначається неоднозначно (з точністю до π).

Зверніть увагу, що $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Тоді за тригонометричною формулою $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$ маємо:

$$\text{tg}\Theta = \text{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\text{tg}\varphi_2 - \text{tg}\varphi_1}{1 + \text{tg}\varphi_1 \cdot \text{tg}\varphi_2} = \left\{ \begin{matrix} \text{tg}\varphi_1 = k_1 \\ \text{tg}\varphi_2 = k_2 \end{matrix} \right\} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Отже, <u>тангенс кута між прямими обчислюють за формулою</u>

$$\text{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (13)$$

Зазвичай в умові прикладу не вказується порядок прямих (тобто невідомо, яка пряма перша, яка друга). Тоді цей порядок обирають виходячи з рисунка цих прямих, причому так, щоб $\Theta \le \frac{\pi}{2}$.

З формули (13) можна дістати умови паралельності й перпендикулярності прямих.

Якщо $L_1 \parallel L_2$, то $\Theta = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\Theta = 0$. У цьому випадку чисельник дробу (13) повинен дорівнювати нулю: $k_2 - k_1 = 0$, або $k_1 = k_2$.

Якщо $L_1 \perp L_2$, то $\Theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\Theta$ – не існує. У цьому випадку знаменник дробу (13) повинен дорівнювати нулю: $1 + k_1 k_2 = 0$, або $k_1 k_2 = -1$, або $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Отже:

$k_1 = k_2$ – *умова паралельності прямих*;

$k_1 k_2 = -1$, або $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, – *умова перпендикулярності прямих*.

Приклад. Обчислити кут між прямими $y = -4x + 4$, $y = 3x - 1$.

Розв'язання. З рис. 26 видно, що пряма $y = 3x - 1$ буде першою прямою (L_1), а $y = -4x + 4$ – другою (L_2). Тоді $k_1 = 3$, $k_2 = -4$. Користуємося формулою (13):

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{-4-3}{1+3(-4)} = \frac{7}{11}.$$

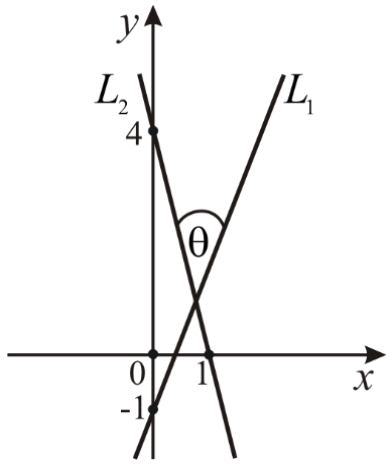

Рис. 26

Звідси $\Theta = \mathrm{arctg}\frac{7}{11}$.

1.2.7. Нормальне рівняння прямої

Розглянемо пряму, яка не проходить через початок координат (рис. 27). З початку координат проведемо перпендикуляр до прямої, довжину якого позначимо так: $OM = p$. Кут між додатним напрямом

осі OX і перпендикуляром позначимо через α (не плутати цей кут з кутом нахилу прямої φ). Тобто для того щоб записати рівняння прямої в так званому нормальному вигляді, потрібно знати p і α:

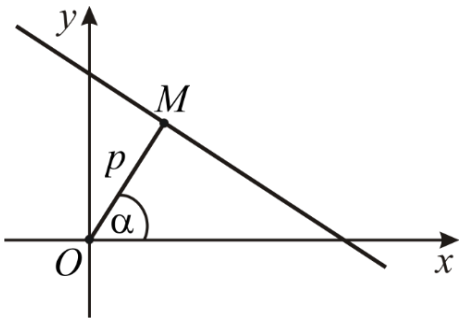

Рис. 27

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (14)$$

Нормальне рівняння прямої (14) має достатньо незвичний вигляд. Його доведення можна знайти в [2; 4; 6, с. 64, 65].

Необхідно запам'ятати, що в нормальному рівнянні:

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах повинна дорівнювати одиниці;

2. $p \ge 0$ (або $-p \le 0$).

Приклад. Чи буде рівняння $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$ рівнянням прямої в нормальному вигляді?

Розв'язання. Перевіримо виконання пунктів 1 і 2:

1. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$

2. $p = 2 \ge 0$ (або $-p = -2 \le 0$).

Отже, це рівняння є рівнянням прямої в нормальному вигляді. До речі, відстань цієї прямої до початку координат дорівнює $p = 2$.

Приведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Нехай пряма задана в загальному вигляді: $Ax + By + C = 0$. Приведемо це рівняння до нормального вигляду:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ .$$

Ці рівняння є двома різними формами рівняння однієї прямої. Тому коефіцієнти цих рівнянь мають бути пропорційними:

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C}=M,$$

тут M – деяке, поки невідоме число.

Або: $\cos\alpha = A\cdot M$; $\sin\alpha = B\cdot M$; $-p = C\cdot M$.

З двох перших рівнянь знайдемо M. Піднесемо рівняння до квадрата й додамо їх:

$$\cos^2\alpha = A^2M^2,$$

$$\sin^2\alpha = B^2M^2 \Rightarrow \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 = A^2M^2+B^2M^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2\left(A^2+B^2\right)=1 \Rightarrow M^2=\frac{1}{A^2+B^2} \Rightarrow M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Для вибору знака в M скористаємося рівнянням $-p = C\cdot M$. За умовою 2. $-p \le 0$. Тобто знаки C і M повинні бути протилежні.

Число M називають *нормуючим множником*.

Отже, для того щоб привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду, потрібно:

1. Знайти нормуючий множник.
2. Обидві частини рівняння помножити на M.

Приклад. Привести загальне рівняння прямої $6x-8y+3=0$ до нормального вигляду.

Розв'язання. Спочатку знайдемо нормуючий множник M:

$$A=6;\quad B=-8;\quad M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{1}{10}.$$

Визначимо знак M: оскільки $C=3\ge 0$, то M беремо зі знаком «–». Тобто $M=-\frac{1}{10}$. А тепер помножимо обидві частини заданого рівняння на $M=-\frac{1}{10}$ і одержимо:

$$-\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{3}{10}=0,\quad \text{або}\quad -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{3}{10}=0.$$

До речі, відстань p від прямої до початку координат дорівнює $\frac{3}{10}$.

Відстань від точки до прямої

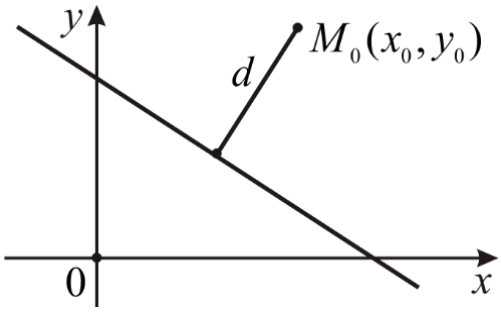

Рис. 28

Розглянемо пряму, яка записана в нормальному вигляді:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

і точку $M_0(x_0; y_0)$. Тоді відстань d від точки M_0 до прямої (рис. 28) буде обчислюватися за формулою

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|. \qquad (15)$$

Доведення цієї формули можна знайти в [1; 5; 6, с. 66, 67].

Тобто для того, щоб знайти відстань d, потрібно в ліву частину рівняння (14) замість поточних координат x і y підставити координати точки M_0 і знайти модуль цього числа (відстань завжди невід'ємна: $d \geq 0$).

Наголосимо, що основою формули (15) є нормальне рівняння прямої, а не загальне рівняння прямої (поширена помилка!).

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(2; 3)$ до прямої $3x - 4y - 10 = 0$.

Розв'язання. Рівняння прямої задано в загальному вигляді. Тому спочатку приведемо його до нормального вигляду. Для цього знайдемо нормуючий множник

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$$

і одержимо $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$. А тепер застосуємо формулу (15):

$$d = \left|\frac{3}{5}2 - \frac{4}{5}3 - 2\right| = \frac{16}{5}.$$

До речі, формулу (15) записують ще й у такому вигляді:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$