

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра «Економічної інформатики»

В авторській редакції

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

**Навчально-методичні інструкції
з виконання лабораторних робіт
до вивчення дисципліни для студентів денної та заочної
форм навчання спеціальності
126 – Інформаційні системи та технології
(F6 Інформаційні системи і технології)
ОПП «Комп'ютерні технології в бізнесі»**

**Дніпро
2026**

Упорядники:

Л. І. Лозовська, К. О. Удачина

Електронний аналог

друкованого видання

Схвалено Групою забезпечення якості освітньої програми

«Комп'ютерні технології в бізнесі»

Протокол № 7 від 27 лютого 2026 р.

С 40 Системний аналіз : навчально-методичні інструкції з виконання лабораторних робіт до вивчення дисципліни для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології / упоряд. Л. І. Лозовська, К. О. Удачина ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Дніпро: УДУНТ, 2026. – 72 с.

Навчально-методичні інструкції призначені для використання студентами денної та заочної форм навчання спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології (бакалаврський рівень) під час виконання лабораторних робіт з дисципліни «Системний аналіз».

Містить методичні матеріали для вивчення основ системного аналізу. Забезпечує ознайомлення з місцем та роллю системного аналітика у вирішенні бізнес проблем, поняттями системного аналізу та системного аналітика, компетенціями та знаннями системного аналітика, особливостями застосування СА. Сприяє засвоєнню понять про екстремальні задачі, основні етапи розв'язування задач оптимізації, математичну постановку задачі оптимізації, основні означення і поняття, знань про основні класи екстремальних задач, класифікацію задач нелінійного програмування, загальні поняття теорії оптимізації, вмінню використовувати для розв'язання практичних оптимізаційних задач.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1.....	6
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2.....	15
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3.....	18
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4.....	25
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5.....	34
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6.....	37
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7.....	44
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №8.....	48
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №9.....	61
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №10.....	64
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	71

ПЕРЕДМОВА

Метою дисципліни «Системний аналіз» є засвоєння теоретичних знань з системного аналізу як методологічної основи аналізу та моделювання складних систем для розв'язування інформаційних проблем в них та розвиток навиків використання практичних методологій системного аналізу для розв'язання оптимізаційних задач.

Навчальна дисципліна забезпечує набуття таких передбачених освітньою програмою компетентностей:

ІК. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в області інформаційних систем та технологій, або в процесі навчання, що характеризуються комплексністю та невизначеністю умов, які потребують застосування теорій та методів інформаційних технологій.

ФК1. Здатність аналізувати об'єкт проектування або функціонування та його предметну область.

ФК3. Здатність до проектування, розробки, налагодження та вдосконалення системного, комунікаційного та програмно апаратного забезпечення інформаційних систем та технологій, Інтернету речей (IoT), комп'ютерно-інтегрованих систем та системної мережної структури, управління ними.

ФК11. Здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів.

ФК15. Здатність поглиблено аналізувати проблеми і явища в одній або декількох професійних сферах з врахуванням економічних ризиків та можливих соціально-економічних наслідків.

Відповідно до освітньої програми дисципліна спільно з іншими освітніми компонентами має забезпечити досягнення таких програмних результатів навчання:

ПРН1. Знати лінійну та векторну алгебру, диференціальне та інтегральне числення, теорію функцій багатьох змінних, теорію рядів, диференціальні рівняння для функції однієї та багатьох змінних, операційне числення, теорію ймовірностей та математичну статистику в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

ПРН2. Застосовувати знання фундаментальних і природничих наук, системного аналізу та технологій моделювання, стандартних алгоритмів та дискретного аналізу при розв'язанні задач проектування і використання інформаційних систем та технологій.

ПРН4. Проводити системний аналіз об'єктів проектування та обґрунтовувати вибір структури, алгоритмів та способів передачі інформації в інформаційних системах та технологіях.

Навчальна дисципліна є обов'язковою для вивчення студентами, які здобувають освітній ступінь бакалавра за освітніми програмами «Комп'ютерні технології в бізнесі».

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Системний аналіз» передбачено виконання лабораторних робіт. Дане методичне видання містить основні теоретичні положення для засвоєння матеріалу, інструкції до виконання завдань, запитання до захисту лабораторних робіт.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ТЕМА РОБОТИ: Проведення системного аналізу складного об'єкта.

МЕТА РОБОТИ: Навчитися проводити системний аналіз складного об'єкта.

ТРИВАЛІСТЬ: 1 година.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Склад системи в цілому залежить від завдання, для вирішення якого проводиться аналіз. Щоб об'єктом аналізу був обраний об'єкт, необхідно коректно сформулювати завдання, наприклад, забезпечення нормального функціонування цього об'єкту. Якщо завдання сформулювати по-іншому, наприклад, проектування або діагностування, то об'єктом аналізу буде вже інша система (система проектування, система діагностування і тому подібне).

Для даного завдання щодо технічної системи типовий набір зовнішніх систем, що становлять систему в цілому, включає: систему виконавця (оператор, користувач), систему об'єктів, пов'язаних з призначенням цієї системи (система замовника), наприклад, для автомобіля це – система вантажів, для комп'ютера – система завдань і тому подібне, систему живлення, систему забезпечення і обслуговування т.п. [14]

При визначенні функціональних підсистем слід враховувати призначення системи і її перетворювальні можливості, а також вхідні елементи системи.

За перетворювальними можливостями доцільно розрізняти три типи систем [1]:

- а) системи, в яких відсутнє перетворення вхідного елементу;
- б) системи, в яких змінюються окремі характеристики вхідного елементу (точність, форма, розміри, фізичні, техніко-економічні параметри);
- в) системи, в яких змінюється призначення вхідного елементу.

До першого типу відносяться розподільні системи, причому розподіл може бути просторовим, часовим і (чи) на елементи деякої великої кількості. Наприклад, транспортні системи (розподілені в просторі), системи розподілу енергетичних і водних ресурсів, системи соціального забезпечення тощо. До другого типу відносяться більшість технічних систем (вимірювальні і

обчислювальні системи, побутові прилади і інші). До третього типу відносяться так звані великі системи: промислові, технологічні, економічні (на вході – сировина і комплектуючі, на виході – продукт, що має нове призначення).

Склад функціональних підсистем залежить також від виду вхідного елементу. Наприклад, для систем, пов'язаних з обробкою інформації (вимірювальних, обчислювальних), склад підсистем практично однотипний: система введення інформації, система перетворення інформації, система управління, система виведення, резервна система, система забезпечення умов і тому подібне [1].

Для технічних систем, пов'язаних з матеріальними об'єктами, склад підсистем дещо інший, наприклад, система завантаження, приводна система, система управління, виконавська система, допоміжна система забезпечення тощо.

Наведемо кілька прикладів проведення системного аналізу об'єкта.

Приклад 1 [2].

Об'єкт аналізу – вимірювальний пристрій.

Задача – забезпечення його нормального функціонування.

Схема системного аналізу:

- 1. Система в цілому**, повна система і підсистеми наведені на рис. 1.1:
 - S1, S2 і так далі – зовнішні системи, що враховуються при рішенні задачі;
 - PS1, PS2 і так далі – підсистеми вимірювального пристрою;
 - S1 – система виконавця (вимірник, експериментатор);
 - S2 – система об'єктів виміру (джерела вхідної дії, вимірювані величини);
 - S3 – система живлення (акумулятор, батарея, електрична мережа);
 - S4 – система забезпечення умов експерименту (захисні екрани, заземлення, термостати, кліматична камера і тому подібне);
 - PS1 – сприймаюча система (датчик);
 - PS2 – система перетворення (перетворювач, підсилювач);
 - PS3 – система передачі (передавальний елемент: електрична лінія, світлопровід);

PS4 – система виводу (шкала, екран, цифрове табло, процесор і тому подібне).

2. **Оточуюче середовище.** До нього відносяться окрім перерахованих зовнішніх систем S1 – S4 (рис.1.1) також інші зовнішні системи, наприклад:

S5 – природне середовище;

S6 – служби ремонту і перевірки приладів;

S7 – система навчання (технікуми, ЗВО) і тому подібне, які не враховуються при рішенні нашої задачі.

Рівень 1. Система в цілому

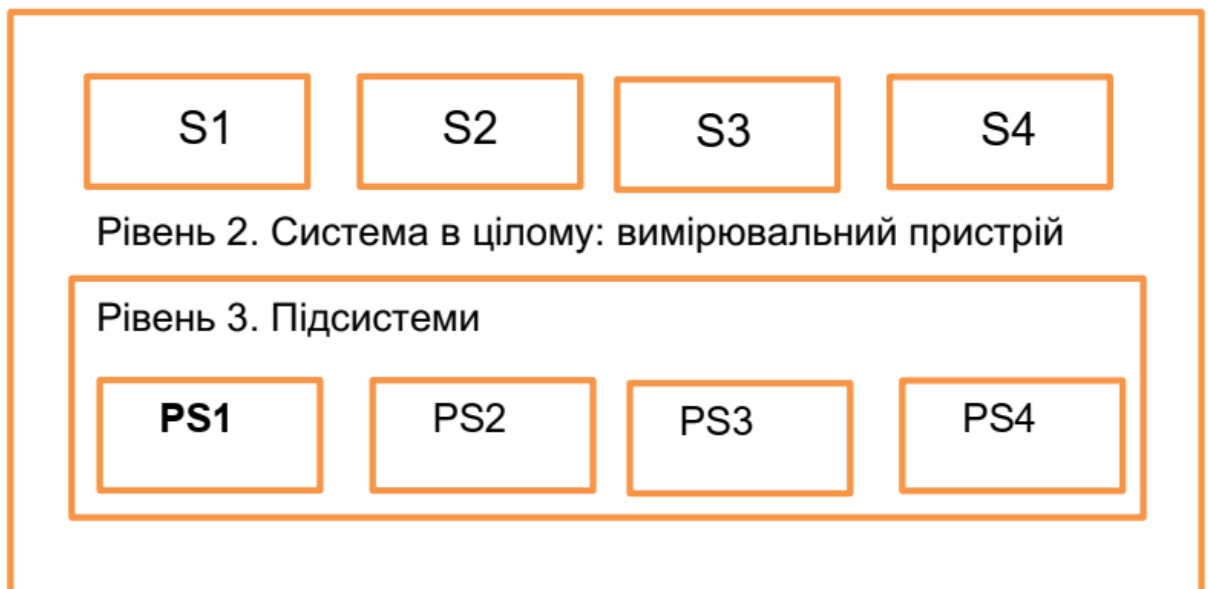


Рисунок 1.1 – Представлення рівнів системи вимірювальний пристрій

3. Цілі і призначення системи і підсистем.

Призначення системи – вимір (рішення певного класу вимірювальних завдань).

Датчик призначений для сприйняття і попереднього перетворення вхідної дії (вимірюваної величини).

Підсилювач (перетворювач) – для посилення вихідного сигналу датчика і при необхідності його перетворення в зручну форму (наприклад, в електричний сигнал).

Передавальний елемент служить для передачі сигналу на відстань.

Пристрій виводу – для обробки і зберігання отриманого сигналу, а також його індикації.

Мета визначається експериментатором у вигляді набору умов і обмежень задачі і включає наступні вимоги:

- вид вимірюваної величини (наприклад, електрична напруга постійного струму);
- діапазон вимірів (наприклад, 1-10v);
- точність вимірів (наприклад, похибка не більше 1%);
- час на один вимір (наприклад, не більше 1 хв.);
- умови вимірів: температура, вологість, тиск і тому подібне (наприклад, нормальні умови) тощо.

4. Входи, ресурси і витрати.

Входом є вхідна дія (вимірювана величина).

До ресурсів відносяться: апріорна (початкова) інформація про вимірювальне завдання, електроенергія, гроші, час і зусилля на вимір.

Витрати – це кількісна оцінка витрат ресурсів, наприклад, кількість інформації – 106 біт, добові витрати електроенергії – 1 КВт*година; витрати грошей (запчастини, обслуговування, заробітна плата) – 10 у.о.; витрати зусиль – 1000 Ккал.

5. Виходи, результати і прибуток.

Виходом є результат виміру, наприклад $(6,56 \pm 0,06v)$.

До результатів відносяться: апостеріорна (отримана виміром) інформація про вимірювану величину (значення величини і погрішність виміру), а також економія грошей, часу і зусиль за рахунок отримання потрібної вимірювальної інформації.

Прибуток – це кількісна оцінка економії, наприклад, економія грошей – 20 у.о., часу – 0,5 години, зусиль – 3000 Ккал.

Результати і прибуток оцінюються по відношенню до системи більш високого рівня (система управління, технологічний процес, виробництво, екологічна система і тому подібне); наприклад, у вигляді впливу на зменшення браку продукції, зниження трудовитрат, підвищення ефективності управління, зниження екологічного ризику тощо.

6. Виконавці, ОПР і керівники.

Виконавець – безпосередній вимірник (вимірники).

ОПР – експериментатор, постановник вимірювального завдання.

Керівник – науковий керівник проекту, науково-дослідної роботи, у рамках якої виконуються виміри (така робота може включати декілька експериментів, що виконуються на різних приладах).

7. Тип системи.

Вимірювальний пристрій – це технічна, замкнута, статична система; за перетворювальними можливостями відноситься до другого типу (змінюються окремі характеристики вхідного елементу).

8. Властивості системи.

Система є ієрархічно впорядкованою, оскільки складається з підсистем (п.1 цієї схеми). Система централізована, оскільки центром є датчик. Система є інерційною оскільки має кінцевий час встановлення показників і виміру. Система адаптивна, оскільки зберігає свої функції при зміні кваліфікації вимірника, умов вимірів (температури, вологості, тиску), при коливаннях електроживлення і інших обурюючих діях.

9. Прийняття рішення.

При прийнятті рішення про підвищення якості аналізованої системи (вимірювального пристрою) необхідно враховувати наступні зовнішні системи:

споживачів, від яких залежать вимоги до якості продукції;
постачальників, від яких залежить якість сировини і комплектуючих;
технологічну систему, яка впливає на можливість поліпшення методів виміру і елементної бази;

економічну систему, від якої залежать фінансові умови діяльності фірми і вибір стратегії (конкуренція, прибуток, ціноутворення, податки тощо).

Враховувати або не враховувати ту або іншу з перерахованих систем, залежить від того, які обмеження вона накладає на рішення, що приймається, а також від ресурсних можливостей фірми (фінансових, тимчасових, інформаційних).

Приклад 2 [8].

Об'єкт аналізу – комп'ютер.

Задача – забезпечення нормального функціонування комп'ютера.

Схема системного аналізу:

1. Система в цілому, повна система і підсистеми:

S1 – система виконавця (оператор, користувач);

S2 – система вирішуваних завдань (початкова інформація, джерела вхідної дії);

S3 – система живлення (електрична мережа);

S4 – система забезпечення і обслуговування (системне програмне забезпечення, інформаційні мережі, служби наладки і ремонту).

Повна система – комп'ютер, як сукупність функціональних підсистем.

При визначенні підсистем слід враховувати призначення комп'ютера – зберігання і обробка інформації.

Міркувати можна так:

- 1) початкову інформацію треба ввести в комп'ютер, отже має бути PS1 – система введення інформації;
- 2) інформацію треба обробити, отже має бути PS2 – система обробки інформації, наприклад, здійснює виконання арифметичних і логічних операцій;
- 3) обробкою треба управляти, отже має бути PS3 – система управління;
- 4) інформацію треба зберігати і багаторазово використовувати, тобто має бути PS4 – пам'ять;
- 5) нарешті, кінцеву інформацію треба представити в зручній формі, тобто має бути PS5 – система виводу.

2. **Оточуюче середовище** включає разом з переліченими вище зовнішніми системами S1–S4 також S5 – природне середовище, S6 – система навчання, S7 – економічна система (фірми-розробники, наприклад), S8 – технологічна система тощо.

3. Цілі і призначення системи і підсистем.

Призначення комп'ютера – зберігання і обробка інформації.

Призначення підсистем витікає з їх назв.

Мета задається набором умов і обмежень (відмітимо, що комп'ютер, як і інші технічні системи, є багатоцільовою системою) з наступного ряду:

- тип вирішуваної задачі (наприклад, редагування тексту певною мовою);
- вид тексту (наприклад, наукова стаття);
- обсяг тексту (наприклад, до 10 стор.);

- складність тексту (наявність малюнків, таблиць, формул);
- час редагування (наприклад, не більше 1 години);
- кінцева форма представлення тексту (наприклад, тип шрифту, розмір шрифту, параметри сторінки, абзацні відступи) і тощо.

4. Входи, ресурси і витрати.

Входом є початкова інформація про вирішувану задачу.

До ресурсів відносяться: електроенергія, інформація, а також гроші, час і зусилля на рішення задачі.

Витрати – це кількісна оцінка витрати ресурсів, наприклад, кількість інформації – 1 Мбайт, добова витрата електроенергії – 0,5 КВт·година, витрати грошей (обслуговування, апаратне і програмне забезпечення, заробітна плата) – 20 у.о; витрати часу – 1 година.

5. Виходи, результати і прибуток.

Виходом є результат рішення задачі (інформація про рішення), наприклад, відредагований текст, схема, результат обчислення і тому подібне.

До результатів відносяться: інформація про рішення, представлена в зручній формі, а також заощадження часу, грошей і зусиль за рахунок рішення задачі на комп'ютері.

Прибуток – це кількісна оцінка економії, наприклад, економія грошей – 30 у.о., часу – 2 години.

Результати і прибуток оцінюються по відношенню до системи більш високого рівня (система управління, фінансові служби, наукові дослідження, проектні роботи тощо), наприклад, у вигляді зниження трудовитрат, підвищення ефективності управління, скорочення часу на обробку інформації.

6. Виконавці, ОПР і керівники.

Виконавець – оператор.

ОПР – кваліфікований користувач, постановник задачі.

Керівник – начальник підрозділу, в якому використовується комп'ютер.

7. Тип системи.

Технічна, відносно-закрита, статична, за перетворювальними можливостями відноситься до другого типу.

8. Властивості системи.

Система є ієрархічно впорядкованою, нецентралізованою (розподіленою), адаптивною, інерційною.

9. Прийняття рішення.

При прийнятті рішення про підвищення якості аналізованої системи (комп'ютера) необхідно враховувати наступні зовнішні системи:

- виконавців (операторів, користувачів);
- технологічну систему, яка впливає на можливість поліпшення функціональних можливостей системи (апаратне та програмне забезпечення);
- економічну систему, від якої залежать фінансові умови обслуговування системи.

Враховувати або не враховувати ту або іншу з перерахованих систем, залежить від того, які обмеження вона накладає на рішення, що приймається, а також від ресурсних можливостей.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Необхідно обрати деякий об'єкт і провести його системний аналіз (наприклад, вимірювальний або побутовий прилад, транспортний засіб і тому подібне).

При аналізі визначити:

- 1) систему в цілому, підсистеми;
- 2) зовнішнє середовище;
- 3) мету і призначення системи і підсистем;
- 4) входи, ресурси і (чи) витрати;
- 5) виходи, результати і (чи) прибуток;
- 6) виконавців, осіб, що приймають рішення (ОПР) і керівників;
- 7) тип системи;
- 8) чи має аналізована система властивості ієрархічної впорядкованості, централізації, інерційності, адаптивності, в чому вони полягають?
- 9) виходячи з того, що фірма хоче підвищити якість аналізованого об'єкту, які інші системи, окрім аналізованої, необхідно при цьому враховувати?

Поясніть, чому на вирішення цієї проблеми впливає те, як встановлюються межі системи і зовнішнього середовища?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

№	Завдання
1.	Робота лікарні
2.	Робота супермаркету
3.	Робота фірми з продажу комп'ютерів
4.	Робота косметичного салону
5.	Функціонування аеропорту
6.	Робота кінотеатру
7.	Робота бібліотеки
8.	Робота банку
9.	Робота спортклубу
10.	Робота центра зайнятості
11.	Проведення олімпіади
12.	Функціонування ресторану
13.	Проведення міського культурно-масового заходу
14.	Будівельна фірма
15.	Робота посередницької фірми
16.	Функціонування валютної біржі
17.	Робота відділу кадрів
18.	Робота туристичної фірми
19.	Фірма з продажу побутової техніки
20.	Робота шоколадної фабрики
21.	Робота мобільних операторів
22.	Робота рекламного агентства

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Назвіть ключові особливості системного аналізу.
2. Назвіть етапи проведення системного аналізу об'єкта. Дайте коротку характеристику.
3. На які запитання треба відповісти при аналізі системи?
4. Які властивості систем ви знаєте?
5. Чим визначаються цілі і призначення системи і підсистем?
6. Поясніть, чому на результати аналізу складного об'єкта впливає те, як встановлюються межі системи і зовнішнього середовища?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ТЕМА РОБОТИ: Формалізований опис системи і аналіз її структури.

МЕТА РОБОТИ: Освоєння методів формалізованого опису системи і аналізу її структури.

ТРИВАЛІСТЬ: 1 година.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Визначимо систему [7, 14]:

$$S = \{X, R\},$$

де X – множина модулів: $X = (M1, M2, M3, M4, M5)$;

R – відношення порядку: «реалізація модуля M і передуює реалізації модуля M_j » (так – «1», ні – «0»).

Матриця інцидентій r , представлена таблицею:

Таблиця 2.1 – Матриця інцидентій

Модулі	M1	M2	M3	M4	M5
M1	0	0	0	1	0
M2	1	0	0	1	0
M3	1	1	0	1	0
M4	0	0	0	0	0
M5	1	1	0	1	0

Крок 1. Складаємо вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці r :

$$A_0 = (3 \ 2 \ 0 \ 4 \ 0).$$

Нулі в рядку A_0 дають елементи, які кращі за всіх інших за відношенням R . Ці елементи утворюють порядковий рівень N_0 .

У нашому прикладі це M_3, M_5 .

Робиться формальний запис:

$$\{M_3, M_5\} - N_0.$$

Крок 2. Перетворимо рядок A_0 , а саме:

а) нулі замінимо знаком «X»;

б) виключимо з рядка A_0 значення, що відповідають «нульовим» елементам, тобто M_3, M_5 (в таблиці жовта заливка).

У результаті отримаємо рядок:

$A_1 = (1 \ 0 \ X \ 2 \ X)$ – знов перерахували суму елементів за виключенням M_3, M_5 . Нові нулі в рядку A_1 дають елементи, які краще за інших (окрім вже виділених елементів M_3, M_5).

У нашому випадку це елемент M_2 (в таблиці блакитна заливка). Він утворює порядковий рівень N_1 , тобто $\{M_2\} - N_1$

Крок 3. Перетворимо рядок A_1 аналогічно кроку 2, у результаті отримаємо рядок:

$$A_2 = (0 \ X \ X \ 1 \ X).$$

Новий нуль, що з'явився, відповідає елементу M_1 (в таблиці зелена заливка), що утворює порядковий рівень N_2 : $\{M_1\} - N_2$.

Крок 4. Перетворимо рядок A_2 , виключаючи значення, що відповідають «нульовому» елементу:

$$A_3 = (X \ X \ X \ 0 \ X).$$

Новий нуль відповідає елементу M_4 .

Робимо запис: $\{M_4\} - N_3$.

Результати показують, що елементи множини розташовуються за рівнями порядку таким чином:

$$N_0\{M_3, M_5\}, N_1\{M_2\}, N_2\{M_1\}, N_3\{M_4\}.$$

На першому кроці виділяються модулі M_3, M_5 , що утворюють порядковий рівень N_0 . Ці модулі реалізуються раніше усіх інших (їм не передуює ніяка інша операція). На другому кроці N_1 раніш за всіх інших, окрім вже виділених, реалізується модуль M_2 . На третьому кроці – модуль $M_1 - N_2$ і на четвертому – $M_4 - N_3$.

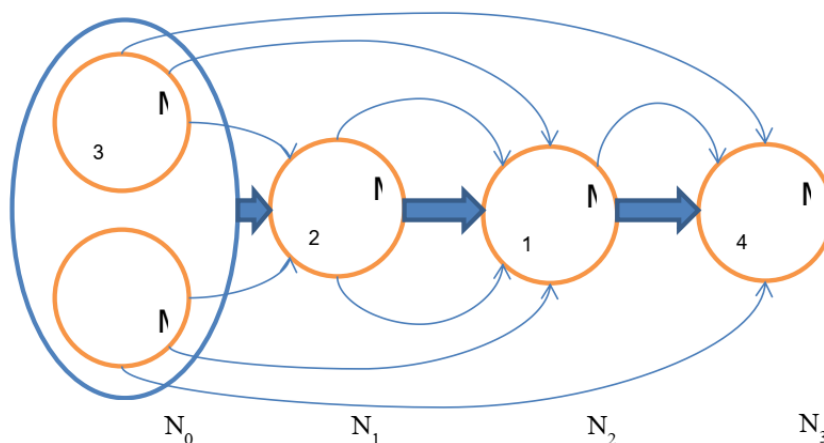


Рисунок 2.1 – Граф реалізації модулів

Висновок: система розбивається на 4 порядкові рівні. Першими реалізуються модулі рівня N_0 (M_3, M_5), а останніми – модулі рівня N_3 (M_4).

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Процес створення корпоративної інформаційної системи представлений у вигляді системи, елементами якої є окремі модулі. Їх взаємозалежність задається матрицею інциденцій. За матрицею інциденцій необхідно впорядкувати модулі послідовно за логікою їх використання користувачем при реалізації певної задачі. Кількість модулів задається таблицею 2.2.

Таблиця 2.2 – Варіанти завдання

№ варіанту	Кількість модулів
1-3	6
4-6	5
7-9	7
10-12	6
13-15	5
16-18	7
19-22	6
23-25	5
26-28	7

Елементи матриці інциденцій студент розставляє самостійно, враховуючи властивості матриці. Матрицю, ідентичну прикладу, використовувати забороняється.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Назвіть етапи формалізованого опису системи і аналізу її структури.
2. З якою метою проводиться опис системи?
3. Інтерпретуйте сенс елементів матриці інциденцій.
4. Сформулюйте кроки побудови графу реалізації системи?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

ТЕМА РОБОТИ: Ієрархічний аналіз структури складної системи.

МЕТА РОБОТИ: Освоєння методів ієрархічного аналізу структури складної системи.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Аналізована система представляється графом з циклами [9].

Для розв'язку задачі спочатку необхідно об'єднати елементи, пов'язані циклом, в групи (у класи еквівалентності).

Елементи x_i і x_j пов'язані циклом, якщо існує шлях з елементу x_i в елемент x_j і назад.

Шлях може бути прямим або опосередкованим, тобто через інші елементи.

Зокрема, при $i=j$ елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом (рис. 3.1в). У матриці інциденцій цикл між елементами x_i , x_j представляється послідовністю одиниць у відповідних осередках, які зв'язують x_i і x_j , наприклад, якщо $(i, j) = 1$ і $(j, i) = 1$, то x_i , x_j пов'язані циклом (цьому випадку відповідає рис. 3.1а), якщо $(i, j) = 1$ і $(j, k) = 1$, $(k, i) = 1$, то x_i і x_j пов'язані циклом (див. рис. 3.1б) і так далі.

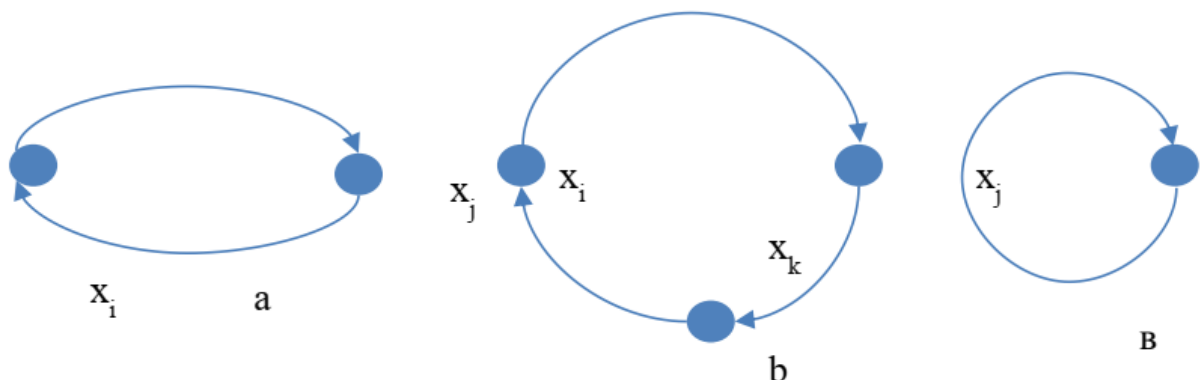


Рисунок 3.1 – Приклади зв'язків [2]

Циклічний елемент в матриці інциденцій представляється одиницею в осередку (на головній діагоналі), що відповідає йому, наприклад, якщо $(i, i) = 1$, то елемент x_i циклічний [6, 10]. Після виконання вказаної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на декілька класів еквівалентності, наприклад:

$$C_1 = (x_1, x_5, x_6), C_2 = (x_3, x_4), C_3 = (x_2, x_7, x_{10}), C_4 = (x_8) \text{ і так далі.}$$

Елементи в кожному класі пов'язані між собою циклами, тобто вважаються не відмінними.

Далі алгоритм виконання лабораторної роботи № 2 застосовується вже не до окремих елементів, а до класів C_1, C_2, C_3, C_4 , оскільки ці класи утворюють простий граф без контурів [3, 10].

Для побудови рівнів порядку на класах в початковій матриці усі одиниці в осередках матриці, що зв'язують елементи з одного класу, замінюються нулями. Після цього виділяються рівні порядку як в лабораторній роботі № 2. Підсумковий порядковий граф містить не окремі елементи, а класи.

Приклад виконання

Нехай матриця інциденцій r має вигляд :

Таблиця 3.1 – Матриця інциденцій r

Помилки	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	0	0	1	0	1	0	0	0
X2	0	1	0	0	0	1	0	1
X3	0	0	0	0	1	0	1	0
X4	0	0	0	1	1	0	0	0
X5	0	0	0	1	0	0	0	0
X6	0	0	1	0	0	0	0	0
X7	1	0	0	0	0	0	1	0
X8	0	0	0	0	0	0	0	0

Легко бачити, що вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці, не містить нулів, тобто алгоритм лабораторної роботи № 2 застосувати неможливо.

Крок 1. Проводимо аналіз початкової матриці з метою виявлення циклів. Аналіз проводиться послідовно зверху вниз, починаючи з першого рядка. Кожен елемент повинен входити в один і тільки в один клас еквівалентності. Якщо якийсь елемент, наприклад, x_1 вже проаналізований і включений в клас еквівалентності, то до нього вже не повертаються при подальшому аналізі, тобто назад повернення немає. Клас еквівалентності може містити цикл, а може складатися з окремих (ізолюваних) елементів [5].

1-й рядок: початковий елемент x_1 .

Виявляємо його зв'язки з іншими елементами: x_1 пов'язаний з x_3 і x_5 .

Розглянемо рядок x_3 .

Наша мета – встановити, чи є зворотний шлях з x_3 в x_1 .

Елемент x_3 пов'язаний з x_5 і x_7 ; x_5 пов'язаний з x_4 (повернення), тобто шляху до x_1 немає.

Розглянемо рядок x_7 : x_7 пов'язаний з x_1 (отримуємо цикл).

Відмічаємо також, що елемент x_7 – циклічний.

Повертаємося до рядка x_1 і розглядаємо другу гілку: x_1 - x_5 . Елемент x_5 пов'язаний з x_4 , тобто цей шлях до x_1 не веде.

Отже, маємо клас еквівалентності C_1 : $x_1 - x_3 - x_7$.

2-й рядок: початковий елемент x_2 .

x_2 пов'язаний з самим собою, тобто він циклічний, x_2 пов'язаний з x_6 .

Розглянемо рядок x_6 : x_6 пов'язаний з x_3 (повернення), тобто до x_2 шляху немає і це порожня гілка.

Остаточного класу еквівалентності C_2 має вигляд: x_2 .

3-й рядок: початковий елемент x_3 . Він вже увійшов до класу C_1 , тобто аналізувати його не треба.

4-й рядок: початковий елемент x_4 . Він пов'язаний з самим собою, тобто він циклічний, а також з x_5 .

Розглянемо рядок x_5 : елемент x_5 пов'язаний з x_4 , тобто маємо цикл.

Остаточного класу C_3 : $x_4 - x_5$.

5-й рядок: початковий елемент x_5 . Він вже увійшов до класу C_3 , тобто аналізувати його не треба.

6-й рядок: початковий елемент x_6 . Він пов'язаний з x_3 (повернення), тобто циклу немає. Елемент x_6 – ізолюваний і утворює окремий клас еквівалентності C_4 : x_6 .

7-й рядок: початковий елемент x_7 . Він вже включений в клас C_1 , тобто аналізувати його не треба.

8-й рядок: початковий елемент x_8 . Він не пов'язаний ні з яким іншим елементом, тому є ізольованим і утворює окремий клас еквівалентності C_5 : x_8 .

Таким чином, система містить 5 класів еквівалентності.

Крок 2. Перетворення (занулення) початкової матриці, що полягає в тому, що для елементів, які входять до одного класу (пов'язаних одним циклом), одиниці, що відповідають зв'язку між ними, замінюються нулями.

1-й рядок: x_1 і x_3 пов'язані циклом, тому в осередку (1,3) 1 замінюється на 0;

x_1 і x_5 циклом не пов'язані, тому в осередку (1,5) залишається 1.

2-й рядок: x_2 – циклічний елемент, тому в осередку (2,2) 1 замінюється на 0;

x_2 і x_6 ; x_2 і x_8 циклом не пов'язані, тому в осередках (2,6) і (2,8) залишається 1.

3-й рядок: x_3 і x_5 циклом не пов'язані – залишається 1;

x_3 і x_7 пов'язані циклом, тому 1 замінюється на 0.

4-й рядок: x_4 – циклічний елемент – в осередку (4,4) 1 замінюється на 0;

x_4 і x_5 пов'язані циклом – в осередку (4,5) 1 замінюється на 0.

5-й рядок: x_5 пов'язаний циклом з x_4 – в осередку (5,4) 1 замінюється на 0.

6-й рядок: x_6 і x_3 циклом не пов'язані – в осередку (6,3) залишається 1.

7-й рядок: x_7 пов'язаний циклом з x_1 – в осередку (7,1) 1 замінюється на 0.

x_7 – циклічний елемент – в осередку (7,7) 1 замінюється на 0.

8-й рядок порожній.

Перетворена матриця представлена в таблиці 3.2.

Відмітимо, що зануленням ми нівелювали (усунули) відмінність між елементами, пов'язаними циклом, тобто вони стали невиразні між собою і матриця тепер циклів не містить.

Таблиця 3.2 – Перетворена матриця інциденцій

ПОМИЛКИ	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1			0		1			
X2		0				1		1
X2					1		0	
X3					0			
X4				0				
X5				0				
X6			1					
X7	0						0	
X8								

Крок 3. До перетвореної матриці застосуємо алгоритм з лабораторної роботи № 2.

Утворюємо вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці:

$$A_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1).$$

«Нульові» елементи: (x_1, x_2, x_4, x_7) .

Порядковий рівень утворюють класи еквівалентності, а не окремі елементи, тобто доки не зберуться усі елементи, що входять в один клас, вони на цьому рівні не показуються.

У нашому випадку елементи x_1 і x_7 не складають класу (не вистачає x_3); аналогічно x_4 не утворює класу (не вистачає x_5); а ось елемент x_2 утворює клас еквівалентності C_2 , тому він складає порядковий рівень N_0 :

$$\{\{C_2\}\} - N_0.$$

Перетворимо рядок A_0 . Отримаємо рядок A_1 :

$$A_1 = (X \ X \ 1 \ X \ 1 \ 0 \ X \ 0).$$

«Нульові» елементи: (x_6, x_8) . Кожен з них утворює окремий клас, тому вони виділяються на цьому порядковому рівні N_1 :

$$\{\{C_4\}, \{C_5\}\} - N_1.$$

Перетворимо рядок A_1 , отримаємо рядок A_2 :

$$A_2 = (X \ X \ 0 \ X \ 1 \ X \ X \ X).$$

«Нульовий» елемент: (x_3) . Він разом з раніше виділеними елементами x_1, x_7 утворює клас еквівалентності C_1 , який і складає порядковий рівень N_2 :

$$\{\{C_1\}\} - N_2.$$

Перетворимо рядок A_2 , отримаємо рядок A_3 :

$$A_3 = (X \ X \ X \ X \ 0 \ X \ X \ X).$$

«Нульовий» елемент: (x_5). Він разом з раніше виділеним елементом x_4 утворює клас C_3 , який і складає порядковий рівень N_3 :

$\{\{C_3\}\} - N_3$.

Остаточний результат має вигляд:

$\{\{C_2\}\}, \{\{C_4\}, \{C_5\}\}, \{\{C_1\}\}, \{\{C_3\}\}$.

$N_0 \quad N_1 \quad N_2 \quad N_3$

Представимо його у вигляді порядкового графа, в якому на рівні порядку (порядкову структуру) накладаються внутрішні зв'язки елементів (рисунок 3.2).

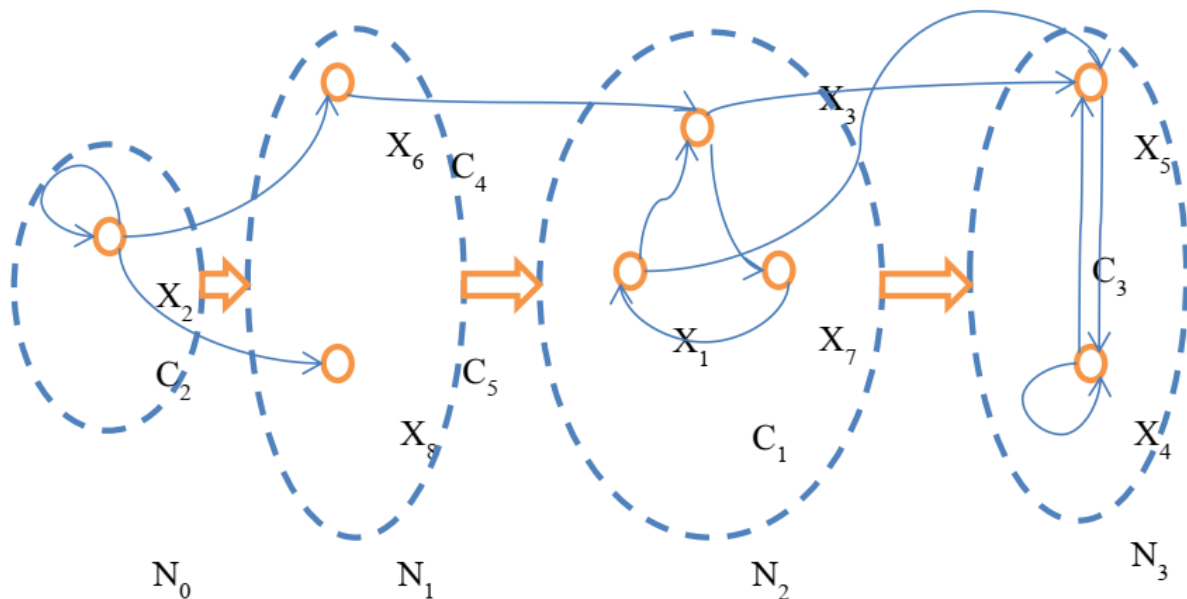


Рисунок 3.2 – Порядковий граф

Висновок: отже, система розбивається на 4 порядкові рівні. Найбільш пріоритетні класи помилок порядкового рівня N_0 (клас C_2), а найменш пріоритетні класи рівня N_3 (клас C_3).

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Враховуючи, що за результатами тестування функціоналу інформаційної системи були виявлені типові помилки і проведено їх ранжирування за рядом ознак (виставлений пріоритет), побудуйте рівні порядку на множині несправностей по відношенню переваги («не менш важливий ніж»).

Результати ранжирування представлені у вигляді матриці інцидентій. Кількість помилок вказана у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Варіанти завдання

№ варіанту	Кількість помилок
1-3	7
4-6	8
7-9	7
10-12	8
13-15	7
16-18	8
19-22	7
23-25	8
26-28	7

Елементи матриці інцидентій студент розставляє самостійно, враховуючи властивості матриці. Матрицю, ідентичну прикладу, використовувати забороняється. Підсумковий результат необхідно представити у вигляді порядкового графу.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що ви розумієте під ієрархічним аналізом структури складної системи?
2. З якою метою виконують ієрархічний аналіз структури складної системи?
3. Назвіть основні етапи ієрархічного аналізу структури складної системи?
4. Поясніть сенс елементів порядкового графу системи.
5. Яким чином можна виявити та усунути циклічність елементів системи?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ТЕМА РОБОТИ: Елементи опуклого аналізу. Класичні методи пошуку екстремуму.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з визначенням та властивостями опуклих множин та опуклих функцій, екстремальними властивостями функцій, що визначені на опуклих множинах, критеріями опуклості та оптимальності. Навчитися їх використовувати, практично застосовувати класичні методи пошуку екстремуму.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Деякі основні поняття теорії оптимізації. Загальною задачею оптимізації будемо називати наступну задачу [4]:

Надана деяка множина U і функція $J(u)$, визначена на цій множині U . Необхідно знайти мінімум функції $J(u)$ на множині U , тобто

$$J(u) \rightarrow \min, u \in U \quad (4.1)$$

При цьому $J(u)$ будемо називати цільовою функцією, U – допустимою множиною, а будь-який елемент $u \in U$ – допустимою точкою задачі (4.1).

Будемо розглядати деякі чисельні методи розв’язання кінечномірних задач оптимізації, тобто задач, допустима множина U належить n -вимірному евклідовому простору E_n .

Визначення 1. Точка u_* називається точкою глобального мінімуму функції $J(u)$ на множині U або глобальним розв’язком задачі (4.1), якщо [4]

$$J(u_*) \leq J(u), u \in U. \quad (4.2)$$

Визначення 2. Точка u_* називається точкою локального мінімуму функції $J(u)$ на U або локальним розв’язком задачі (4.1), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що [4]

$$J(u_*) \leq J(u) \text{ для всіх } u \in U \cap O(u_*) \quad (4.3)$$

де $O(u_*) = \{u \in E_n : \|u - u_*\| \leq \varepsilon\}$ – куля радіусу $\varepsilon > 0$ з центом в точці u_* .

Якщо умови (4.2) і (4.3) виконуються строго для $u \neq u_*$, то u_* – точка строгого глобального або локального мінімуму.

Зрозуміло, що глобальний мінімум є також і локальним. Зворотне твердження не справедливе.

Значення функції $J(u_*)$ будемо називати найменшим або мінімальним значенням та позначати таким чином

$$J_* = J(u_*) = \min_{u \in U} J(u).$$

Позначимо через $U_* = \{u \in U : J(u) = J(u_*)\}$ множину всіх точок мінімуму функції $J(u)$ на множині U . В залежності від властивостей множини U та функції $J(u)$ множина U_* може містити в собі одну, кілька або навіть нескінченну кількість точок. Можливо також, що множина U_* буде пустою, тобто $U_* = \emptyset$.

Аналогічно будемо розглядати також задачу максимізації функції $J(u)$ на множині U в вигляді

$$J(u) \rightarrow \max, u \in U. \quad (4.4)$$

Розв'язки задач (4.1) і (4.4), точки мінімуму та максимуму функції $J(u)$ на U називаються точками екстремуму, а самі задачі (4.1), (4.4) – екстремальними задачами.

Очевидно, що задача (4.4) еквівалентна наступній задачі

$$-J(u) \rightarrow \min, u \in U, \quad (4.5)$$

в сенсі, що множини глобальних, локальних, строгих та нестрогих розв'язків вказаних задач відповідно співпадають. Ця властивість дозволяє без додаткових зусиль переносити результати, одержані для задачі мінімізації на задачу максимізації і навпаки (рис. 4.1). В подальшому будемо розглядати лише задачі мінімізації.

Деякі поняття опуклого аналізу[4]. Опуклий аналіз – це розділ математики, в якому вивчаються опуклі множини і опуклі функції. Поняття та факти опуклого аналізу мають фундаментальне значення в теорії та чисельних методах оптимізації.

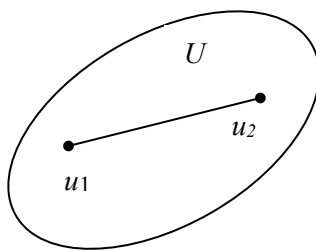


Рисунок 4.1 – Випукла множина

Визначення 3. Множина U називається випуклою, якщо для будь-яких $u_1, u_2 \in U$ точка $u_\alpha = u_1 + \alpha(u_2 - u_1) = \alpha u_2 + (1 - \alpha)u_1 \in U$ для всіх $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$. Іншими словами, множина U випукла, якщо відрізок $[u_1, u_2] = \{u_\alpha : u_\alpha = u_1 + \alpha(u_2 - u_1), 0 \leq \alpha \leq 1\}$, що поєднує будь-які дві точки $u_1, u_2 \in U$, повністю належить U (рис. 4.1) [4].

Очевидно, що весь простір E_n є випуклою множиною. Пусту множину і множину, яка складається з однієї точки, прийнято вважати випуклими множинами.

Опуклі функції [4].

Визначення 4[4]. Функція $J(u)$, визначена на випуклій множині U , називається випуклою на цій множині, якщо

$$J(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha J(u_1) + (1 - \alpha)J(u_2) \quad (4.6)$$

для всіх $u_1, u_2 \in U, 0 \leq \alpha \leq 1$.

Якщо в (4.6) рівність виконується тільки для $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$, то функція $J(u)$ називається строго випуклою на U .

Теорема 1. Множина випукла, тоді і лише тоді вона містить всі випуклі комбінації будь-якої кінцевої кількості своїх точок [4].

(без доведення).

Теорема 2. (критерій оптимальності для випуклих функцій).

Нехай U випукла множина, $J(u) \in C^1(U)$,

U_* – множина точок мінімуму $J(u)$ на U . Тоді в будь-якій точці $u_* \in U_*$ необхідно виконується умова

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0, \quad u \in U, \quad (4.7)$$

а в випадку $u_* \in \text{int } U$ нерівність (4.7) перетворюється в рівність $J'(u_*) = 0$. Якщо, крім того, $J(u)$ випукла на U , то умова (4.7) є достатньою для того, щоб $u_* \in U_*$. (без доведення) [4].

Теорема 3. (Критерій випуклості в термінах других похідних). Двічі неперервно диференційована на U функція випукла тоді і тільки тоді, коли

$$\langle J''(u)h, h \rangle \geq 0, \quad \forall u \in U, \quad h \in E_n. \quad (4.8)$$

(без доведення) [4].

Умови оптимальності [12]. Під час вивчення будь-якого типу задач оптимізації важливе місце займає питання про умови оптимальності, чи іншими словами про умови екстремуму. Слід розрізняти необхідні умови оптимальності, тобто ті умови, яким повинна задовольняти точка, яка є розв'язанням задачі, та достатні умови оптимальності тобто умови, з яких слідує, що дана точка є розв'язком задачі. Умови оптимальності є цікавими перш за все тому, що вони є основою якісних методів теорії оптимізації, тобто методів, що направлені на вивчення властивостей екстремальних задач; по-друге, вони застосовуються при побудові та обґрунтуванні чисельних методів розв'язання цих задач; по-третє, вони дозволяють в нескладних випадках явно розв'язати задачу.

Умови оптимальності для загальної задачі оптимізації. Розглянемо умови оптимальності для задачі [12]

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u \in U. \quad (4.9)$$

Геометрична умова оптимальності (необхідна умова в термінах напрямків) [11]

Вектор $g \in E_n$ задає напрям зменшення функції $J(u)$ в точці $\bar{u} \in E_n$, якщо $J(\bar{u} + \alpha g) < J(\bar{u})$ для всіх достатньо малих $\alpha > 0$. Множину всіх таких g позначимо $G(u, J)$.

Лема. (Достатня і необхідна ознака напрямку зменшення.) Нехай функція $J(u)$ диференційована в точці $u \in E_n$. Якщо вектор g задовольняє умові

$$\langle J'(u), g \rangle \leq 0, \quad (4.10)$$

то $g \in G(u, J)$.

Якщо $g \in G(u, J)$, то $\langle J'(u), g \rangle \leq 0$.

Геометрично умова (4.10) означає, що вектор g складає тупий кут з градієнтом $J'(u)$.

Вектор $g \in E_n$ задає можливий напрям відносно множини U в точці $\bar{u} \in U$, якщо $\bar{u} + \alpha g \in U$ при всіх достатньо малих $\alpha > 0$. Множину таких векторів g позначимо через $V(\bar{u}, U)$.

Наведемо необхідну умову локальної оптимальності в задачі (4.9) в термінах напрямів, яка не вимагає будь-яких припущень відносно множини U та функції $J(u)$.

Теорема 4. Якщо u_* - локальний розв'язок задачі (4.9), то

$$G(u_*, J) \cap V(u_*, U) = \emptyset \quad (4.11)$$

тобто, що з точки u_* , яка є локальним розв'язком, то жоден з напрямів зменшення (спуску) не може бути можливим. (без доведення).

Диференційна умова оптимальності на випуклій множині [4]

Теорема 5. Нехай в задачі (9) множина U випукла, функція $J(u)$ диференційована в точці $u_* \in U$. Тоді:

1. якщо u_* - локальний розв'язок задачі (4.1), то

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0, u \in U; \quad (4.12)$$

2. якщо функція $J(u)$ випукла на U і виконується умова (4.12), то u_* - глобальний розв'язок задачі (9).

3. якщо $u_* \in \text{int } U$, то умова (4.12) еквівалентна умові

$$J'(u_*) = 0 \quad (4.13)$$

(без доведення).

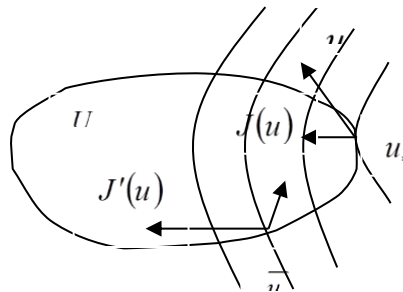


Рисунок 4.2 – Геометрична інтерпретація градієнта

Будь-яка точка $u_* \in U$, яка задовольняє умові (4.12) або (4.13) називається стаціонарною точкою.

З теореми 5 слідує відома з класичного аналізу необхідна умова локальної оптимальності для задачі безумовної оптимізації, тобто, коли $U = E_n$: $J'(u_*) = 0$, яка буде також і достатньою умовою глобальної оптимальності, якщо $J(u)$ – випукла функція на E_n .

Геометрично умова (4.12) означає, що градієнт $J(u)$, якщо він не дорівнює нулю, складає нетупий кут з вектором, який направлений з u_* в будь-яку точку $u \in U$. На рисунку 4.2 видно, що точка $\bar{u}$, яка не задовольняє умові (4.11) не може бути розв'язком: з неї не існує можливого напрямку, вздовж якого функція $J(u)$ спадає.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. За критеріями опуклості диференційованих функцій довести, що функція $J(u)$ опукла:

1. $J(u) = u^p$, якщо $u \in E_1 : u \geq 0, 1 \leq p < +\infty$
2. $J(u) = -u^p$, якщо $u \in E_1 : u \geq 0, 0 \leq p \leq 1$
3. $J(u) = u^p$, якщо $u \in E_1 : u > 0, -\infty < p \leq 0$
4. $J(u) = e^{au}$, якщо $u \in E_1, -\infty < p < +\infty$
5. $J(u) = -\ln u$, якщо $u \in E_1 : u \geq 0$
6. $J(u) = u \ln u$, якщо $u \in E_1 : u \geq 0$
7. $J(u) = 2x^2 + y^2 + \sin(x + y)$, якщо $u \in E_2$
8. $J(u) = 4x^2 + y^2 - xy + 8x - 3y - 1$, якщо $u \in E_2$
9. $J(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 2$, якщо $u \in E_2$
10. $J(u) = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + xy - 3$, якщо $u \in E_2$
11. $J(u) = e^{x^2 + y^2}$, якщо $u \in E_2$
12. $J(u) = x^2 y^2$, якщо $u \in E_2$
13. $J(u) = x^3 + 2y^3 + 3xy$, якщо $u \in E_2$
14. $J(u) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$, якщо $u \in E_2$

Завдання 2. Виберіть завдання з наведеного нижче списку (варіант функції = «номер студента в списку журналу групи»%17+1). За допомогою класичних методів та використовуючи програмні засоби Mathcad (Excel) розв'яжіть екстремальну задачу.

1. Відрізок заданої довжини переміщується так, що його кінці ковзають вздовж сторін прямого кута. При якому положенні цього відрізка площа трикутника, що відтинається, буде найбільшою? Периметр трикутника буде найменшим?

2. Посудина циліндричної форми наповнена водою. Висота шару води h . З отвору (розмірами якого можна знехтувати), розташованого на висоті x , тече вода. При якому x дальність струменя води буде найбільшою?

Примітка. Швидкість рідини, що витікає з отвору, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gy}$, де y – глибина розміщення отвору, g -прискорення вільного падіння.

3. Стадіон являє собою прямокутне поле з областями у вигляді півкруга, які приєднані до двох його протилежних сторін. Периметр стадіону повинен бути рівним P . Знайти його найбільшу можливу площу.

4. Відкриту коробку виготовляють з прямокутного листа жести розміром $a \times b$, для чого вирізають рівні квадрати в кутах і згинають вздовж ліній вирізу. Які квадрати потрібно вирізати, щоб одержати коробку найбільшого об'єму?

5. Художникові потрібно заґрунтувати прямокутне полотно під картину таким чином: зелений прямокутник оточується блакитною смугою. Потрібно, щоб площа зеленого прямокутника була рівна 12 дм^2 , а ширина смуги - 1 дм з боків і 2 дм зверху і знизу. Якими повинні бути розміри картини, щоб її загальна площа була найменшою?

6. Людина, що гуляє в лісі, знаходиться за 5 км від прямолінійної дороги, яка вважається нескінченно довгою, і за 13 км від дому, стоїть біля дороги. Людина може рухатися із швидкістю 3 км за годину лісом і 5 км за годину дорогою. Спочатку вона іде по прямій до дороги, а потім дорогою до дому. Знайти мінімальний час, за який Людина може дістатися до дому.

7. Селянин хоче розчистити поле у вигляді прямокутної ділянки, до однієї з сторін якої приєднується ділянка у вигляді півкруга. Прямокутна

ділянка буде відведена під сіно, яке дає прибуток у 5 одиниць вартості на 1 м², а ділянка у формі півкруга буде засіяна гречкою, яка дає прибуток у 6 одиниць вартості на 1 м². периметр поля повинен бути 800 м. Як селянин повинен спланувати поле, щоб одержати найбільший прибуток?

8. Потрібно виготовити конічну лійку з твірною, довжина якої 20 см. Яка повинна бути висота лійки, щоб об'єм був найбільший?

9. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ рівні відповідно 2 м і 1 м. Потрібно виготовити з колоди брус з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала б з віссю колоди і об'єм якого був би найбільшим. Якими повинні бути розміри бруса?

10. Розкласти додатне число a на тир додатних доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

11. Подати додатне число a у вигляді добутку чотирьох додатних множників так, щоб їх сума була найменшою.

12. Знайти найменше значення повної поверхні прямокутного паралелепіпеда і його лінійні розміри при заданому об'ємі V .

13. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму при заданій поверхні S .

14. (Стереометрична задача Кеплера). У кулю радіуса r вписати циліндр найбільшого об'єму.

15. Палатка має форму циліндра з конічним дахом. При яких співвідношеннях між лінійними розмірами палатки для її виготовлення знадобиться найменша кількість матеріалу, якщо задано внутрішній об'єм палатки?

16. При яких розмірах відкрита циліндрична ванна з півкруговим поперечним перерізом має найбільшу місткість, якщо її поверхня рівна 3π м².

17. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму, який можна вписати в еліпсоїд з півосями a , b , c , використовуючи необхідні і достатні умови локального мінімуму.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте критерій випуклості, строгої випуклості диференційованих функцій.
2. Сформулюйте критерій випуклості, строгої випуклості двічі диференційованих функцій
3. Сформулюйте критерій випуклості, строгої випуклості квадратичної функції
4. Яка множина називається випуклою?
5. Перелічіть властивості випуклих множин та функцій.
6. Сформулюйте класичну задачу на безумовний та умовний екстремум.
7. Яка точка називається точкою локального мінімуму (максимуму)?
8. Яка точка називається стаціонарною точкою для класичної задачі на екстремум?
9. У чому полягає загальне правило пошуку розв'язків класичної задачі на умовний екстремум?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

ТЕМА РОБОТИ: Методи нульового порядку. Метод покоординатного спуску.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з основними методами нульового порядку. Навчитися застосовувати метод покоординатного спуску для розв'язання практичних оптимізаційних задач.

ТРИВАЛІСТЬ: 4 години.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Метод покоординатного спуску [4]. В практичних задачах мінімізації часто зустрічаються випадки, коли функція, що мінімізується, або немає потрібної гладкості, а є гладкою, але обчислення її похідних з заданою точністю вимагає дуже великого об'єму машинного часу. В таких випадках можна застосовувати методи нульового порядку, тобто методи, застосування яких не вимагає обчислення похідних. Одним з таких методів являється метод покоординатного спуску.

Опишемо цей метод для задачі

$$J(u) \rightarrow \min; \quad u \in U \equiv E_n. \quad (5.1)$$

Позначимо $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ - одиничний координатний вектор, в якого i - а координата дорівнює 1, початкове наближення, а α_0 - деякий початковий кроковий множник. Припустимо, що нам вже відома точка $u_k \in E^n$ і число $\alpha_k > 0$ для будь-якого $k \geq 0$. Покладемо

$$p_k = e_{i_k}, \quad i_k = k - n \left[\frac{k}{n} \right] + 1 \quad (5.2)$$

де $\left[\frac{k}{n} \right]$ - ціла частина числа k/n . Умова (5.2) забезпечує циклічний перебір координатних векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$, тобто $p_0 = e_1, \dots, p_{n-1} = e_n, p_n = e_1, \dots, p_{2n-1} = e_n, \dots$

Обчислимо значення функції $J(u)$ в точці $u = u_k + \alpha_k p_k$ і перевіримо нерівність

$$J(u_k + \alpha_k p_k) < J(u_k). \quad (5.3)$$

Якщо умова (5.3) виконується, то приймемо

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k. \quad (5.4)$$

У випадку, коли (5.3) не виконується, то обчислюємо значення функції $J(u)$ в точці $u = u_k - \alpha_k p_k$ і перевіримо нерівність

$$J(u_k - \alpha_k p_k) < J(u_k). \quad (5.5)$$

в випадку виконання умови (5) покладемо

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k p_k, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k. \quad (5.6)$$

Будемо називати $(k+1)$ -у ітерацію вдалою, якщо є справедливою хоча б одна з нерівностей (5.3) або (5.5). Якщо $(k+1)$ -а ітерація невдала, тобто жодна з умов (5.3) або (5.5) не виконується, то покладаємо

$$u_{k+1} = u_k, \quad \alpha_{k+1} = \begin{cases} \lambda \alpha_k, & i_k = n, \quad u_k = u_{k-n} + 1 \\ \alpha_k, & i_k \neq n, \quad u_k \neq u_{k-n} + 1 \end{cases}$$

або $0 \leq k \leq n-1$; (5.7)

тут $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ фіксоване число, яке називаємо параметром методу. Умови (5.7) означають, що якщо за один цикл з n ітерацій під час перебору напрямів всіх координат векторів з кроком α_k реалізувалась хоча б одна вдала ітерація, то довжина кроку не дрібниться і зберігається в подовж хоча б наступного циклу з n ітерацій. Якщо ж серед останніх n ітерацій не виявилось жодної вдалої ітерації, то крок α_k дрібниться. Таким чином, якщо на ітерації з номером $k = k_m$ крок α_k подрібнили, то

$$\begin{aligned} J(u_{km} + \alpha_{km} e_i) &\geq J(u_{km}), \\ J(u_{km} - \alpha_{km} e_i) &\geq J(u_{km}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

для всіх $i = 1, \dots, n$. Метод по координатного спуску описаний.

Якщо функція $J(u)$ не є гладкою, то метод покоординатного спуску може не сходитись до множини розв'язків задачі (5.1).

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Завдання. Виберіть функцію з наведеної нижче таблиці (варіант функції = «номер студента в списку в журналі»%10+1), побудуйте її графік засобами MatLab'a (або Excel) в розумному діапазоні для пошуку точок її екстремумів (найбільшого й найменшого значень) із заданою точністю (порядку 5 вірних знаків). Програмне реалізуйте алгоритм методу

покоординатного спуску. Для обраної функції знайдіть оптимальне значення та точку оптимуму методом покоординатного спуску.

№	Функція $J(u)$	№	Функція $J(u)$
1	$10u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 - 2u_1 + u_2 \rightarrow \min$	6	$2u_1^2 + 3u_1u_2 + 25u_2^2 - 5u_1 + 10u_2 \rightarrow \min$
2	$u_1^2 - 2u_1u_2 + 3u_2^2 + u_1 - 4u_2 \rightarrow \min$	7	$6u_1^2 - 14u_1u_2 + 16u_2^2 + 2u_1 + 9u_2 \rightarrow \min$
3	$5u_1^2 + u_1u_2 + 25u_2^2 - 4u_1 + 6u_2 \rightarrow \min$	8	$u_1^2 - u_1u_2 + 8u_2^2 - 2u_1 + u_2 \rightarrow \min$
4	$40u_1^2 + 20u_1u_2 + 30u_2^2 - 10u_1 + u_2 \rightarrow \min$	9	$5u_1^2 + 6u_1u_2 + 7u_2^2 + 8u_1 + 17u_2 \rightarrow \min$
5	$4u_1^2 - 5u_1u_2 + 5u_2^2 + 2u_1 - u_2 \rightarrow \min$	10	$3u_1^2 - 8u_1u_2 + 13u_2^2 - u_1 + 17u_2 \rightarrow \min$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. До яких класів методів відноситься метод покоординатного спуску?
2. До яких класів методів відноситься метод Нельдера-Міда?
3. У чому полягає суть методу покоординатного спуска, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
4. У чому полягає суть методу Нельдера-Міда, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
5. Які переваги і які недоліки має метод покоординатного спуска?
6. Які переваги і які недоліки має метод Нельдера-Міда?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

ТЕМА РОБОТИ: Методи першого порядку.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з методами розв'язання екстремальних задач. Набути практичних навичок застосування градієнтних методів.

ТРИВАЛІСТЬ: 4 години.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

На теперішній час розроблена і досліджена велика кількість методів мінімізації функцій багатьох змінних. В посібнику будуть розглянуті лише найбільш відомі методи, та ті що застосовуються на практиці найчастіше. Надамо опис кожного методу, дослідимо сходимість.

Градієнтний метод [4]. Будемо розглядати задачу

$$J(u) \rightarrow \inf; \quad u \in U \equiv E_n, \quad (6.1)$$

вважаючи, що функція $J(u)$ неперервно диференційована на E_n , тобто $J(u) \in C^1(E_n)$. Це означає, що

$$J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + o(h; u), \quad (6.2),$$

$$\text{де } \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{o(h; u)}{|h|} = 0.$$

Справедлива нерівність Коші-Буняковського

$$-|J'(u)||h| \leq \langle J'(u), h \rangle \leq |J'(u)||h|,$$

причому, якщо $J'(u) \neq 0$, то права нерівність перетворюється в рівність тільки для $h = \alpha J'(u)$, а ліва нерівність – тільки при $J'(u) \neq 0$, $\alpha = \text{const} \geq 0$. Звідси зрозуміло, що для $J'(u) \neq 0$ напрям найшвидшого зростання функція $J(u)$ в точці u співпадає з напрямом градієнта $J'(u)$, а напрям найшвидшого спадання – з напрямом антиградієнта $(-J'(u))$.

Ця властивість градієнта лежить в основі багатьох ітераційних методів мінімізації функцій. Одним з таких методів є градієнтний метод. Цей метод, як і всі ітераційні методи, передбачає вибір початкового наближення – деякої точки u_0 . Загальних правил вибору точки u_0 на жаль не існує. В тих випадках, коли з геометричних, фізичних чи будь-яких інших міркувань може бути

одержана апріорна інформація про розміщення точки (точок) мінімуму, то початкове наближення u_0 намагаються вибрати поближче до цієї області.

Будемо вважати, що деяка початкова u_0 вже вибрана. Тоді градієнтний метод полягає в побудові послідовності $\{u_k\}$ за правилом

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.3)$$

Число α_k називається довжиною кроку, кроком або кроковим множником градієнтного методу.

Якщо $J'(u) \neq 0$, то кроковий множник $\alpha_k > 0$ можна вибирати так, щоб $J(u_{k+1}) < J(u_k)$. Насправді з рівності (6.2) маємо

$$J(u_{k+1}) - J(u_k) = \alpha_k \left[-|J'(u_k)|^2 + \frac{0(\alpha_k)}{\alpha_k} \right] < 0$$

для всіх достатньо малих $\alpha_k > 0$.

Якщо $J'(u_k) = 0$, то u_k - стаціонарна точка. В цьому випадку процес (6.3) завершується, і при необхідності проводяться додаткові дослідження поведінки функції в околі точки u_k .

В залежності від способу вибору α_k можна одержати різні варіанти градієнтного методу.

Перерахуємо **кілька способів вибору α_k** , які застосовуються найчастіше.

1. На промені $\{u \in E_n : u = u_k - \alpha J'(u_k), \quad \alpha \geq 0\}$

Введемо функцію однієї змінної

$$f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J'(u_k)), \quad \alpha \geq 0,$$

і визначимо α_k з умови

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha) = f_{k*}, \quad \alpha_k > 0. \quad (6.4)$$

Метод (6.3) - (6.4) називається методом найшвидшого спуску. Якщо $J'(u_k) \neq 0$, то

$$f'_k(0) = -|J'(u_k)|^2 < 0,$$

тому нижня грань може досягатися в (6.4) лише за умови $\alpha_k > 0$.

Наведемо приклад, коли значення α_k може бути визначена в явному вигляді.

Приклад [4]. Нехай задана квадратична функція

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle, \quad (6.5)$$

де A – симетрична додатньо визначена матриця порядку $n \times n$,
 b – вектор з E_n . Вище було показано, що функція сильно випукла і її похідні обчислюються за формулами

$$J'(u) = Au - b; \quad J''(u) = A.$$

Тому метод (6.3) в даному випадку виглядає так

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k (Au_k - b), k = 0, 1, \dots$$

Таким чином, градієнтний метод для функції (6.5) є добре відомим ітераційним методом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Au = b$.

Визначимо α_k з умови (6.4). Користуючись формулою $J(u+h) - J(u) = \langle Au - b, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$, маємо

$$f_k(\alpha) = J(u_k) - \alpha |J'(u_k)|^2 + \left(\alpha^2 / \alpha \right) \langle AJ'(u_k), J'(u_k) \rangle, \quad \alpha \geq 0.$$

Коли $J'(u_k) \neq 0$ умова

$$f'_k(\alpha) = -|J'(u_k)|^2 + \alpha \langle AJ'(u_k), J'(u_k) \rangle = 0$$

дає

$$\alpha_k = \frac{|J'(u_k)|^2}{\langle AJ'(u_k), J'(u_k) \rangle} = \frac{|Au_k - b|^2}{\langle A(Au_k - b), Au_k - b \rangle} > 0. \quad (6.6)$$

Оскільки $f_k(\alpha)$ випукла, то в знайденій точці α_k ця функція досягає своєї нижньої грані при $\alpha > 0$.

Але точне обчислення величини α_k з умови (6.4) не завжди можливе. Тому практично обмежуються знаходженням величини α_k , яка наближено задовольняє умовам (6.4).

2. На практиці нерідко задовольняються знаходженням деякого $\alpha_k > 0$, яке забезпечує виконання умови монотонності: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$. Цією метою вибирають деяке значення $\alpha > 0$ і в методі (3) на кожній ітерації беруть $\alpha_k = \alpha$. При цьому для кожного $k \geq 0$ перевіряють умову монотонності, і в випадку, коли вона порушується, $\alpha_k = \alpha$ ділять до тих пір, поки монотонність не поновиться. Час від часу корисно пробувати збільшити α зі збереженням монотонності.

3. Якщо функція $J(u) \in C^1(E_n)$ і градієнт $J'(u)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$|J'(u) - J'(v)| \leq L|u - v|, \quad u, v \in E_n, \quad (6.7)$$

причому константа L відома, то в (6.3) в якості α_k може бути взятє будь-яке число, яке задовольняє умовам

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(\alpha + 2\varepsilon). \quad (6.8)$$

де $\varepsilon_0, \varepsilon$ - додатні числа, які називаються параметрами методу. Зокрема, для $\varepsilon = L/2$, $\varepsilon_0 = 1/L$, маємо метод (6.3) з сталим кроком $\alpha_k = 1/L$. Звідси ясно, що якщо константа Ліпшиця L велика, або одержана за допомогою досить грубих оцінок, то кроковий множник α_k в (6.3) буде малим.

4. Можливий вибір α_k з умови

$$J(u_k) - J(u_k - \alpha_k J'(u_k)) \geq \varepsilon \alpha_k |J'(u_k)|^2, \quad \alpha > 0. \quad (6.9)$$

Для виконання умови (6.9) спочатку беруть деяке число $\alpha_k = \alpha > 0$ (одне і теж саме на всіх ітераціях; наприклад, $\alpha_k = 1$), а потім при необхідності дрібнять його, тобто змінюють за законом $\alpha_k = \lambda^i \alpha$ ($i = 0, 1, 0 < \lambda < 1$) до тих пір, поки вперше не виконається умова (6.9).

5. Можливе також і апріорне задання величин α_k з умови

$$\alpha_k > 0, k = 0, 1, \dots; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty. \quad (6.10)$$

Наприклад, в якості α_k можна взяти $\alpha_k = c(k+1)^{-\alpha}$, де $c = \text{const} > 0$, а число α таке, що $1/2 < \alpha \leq 1$. Зокрема, якщо $\alpha = 1$, $c = 1$, то одержимо $\alpha_k = (k+1)^{-1}, k = 0, 1, \dots$. Такий вибір $\{\alpha_k\}$ в (6.3) дуже простий для реалізації, але не гарантує виконання умови монотонності $J(u_{k+1}) < J(u_k)$, і взагалі, сходиться дуже повільно.

Коли деякий спосіб вибору α_k уже вибраний, то на практиці ітерації (6.3) продовжують до тих пір, поки не виконається деякий критерій закінчення обчислень.

Часто застосовуються наступні критерії:

$$|u_k - u_{k+1}| \leq \varepsilon,$$

$$|J(u_k) - J(u_{k+1})| \leq \delta,$$

$$|J'(u_k)| \leq \gamma,$$

де $\varepsilon, \delta, \gamma$ - задані, достатньо малі додатні числа. Інколи наперед задають кількість ітерацій, можливі різноманітні комбінації цих та інших критеріїв. Нажаль, надійних критеріїв завершення обчислень, які б гарантували одержання розв'язання задачі (6.1) з заданою точністю, доки не існує, оскільки ці критерії можуть виконатися і далеко від точки мінімуму.

Відзначимо, що коли досліджується сходимість метода, вважається, що процес (6.3) продовжується необмежено і приводить до побудови послідовності $\{u_k\}$. Виникає питання, чи буде послідовність $\{u_k\}$ мінімізуючою для задачі (6.1), і чи буде вона сходитися до множини точок мінімуму:

$$u_* = \left\{ u \in E_n : J(u) = J_* = \min_{E_n} J(u) \right\},$$

іншими словами, чи виконується співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, U_*) = 0, \quad (6.11)$$

Для методу найшвидшого спуска відповідь на ці питання позитивна, якщо функція $J(u)$ – сильно випукла та $J(u) \in C^1(E_n)$.

Метод найшвидшого спуска має простий геометричний сенс: виявляється, точка u_{k+1} , яка визначається умовами (6.3), (6.4), лежить на промені $L_k = \{u : u = u_k - \alpha J'(u_k), \alpha \geq 0\}$ в точці його дотику лінії рівня (при $n \geq 3$ – поверхні рівня) $\Gamma_{k+1} = \{u \in E_n : J(u) = J(u_{k+1})\}$, а сам промінь Γ_k перпендикулярний до лінії рівня $\Gamma_k = \{u \in E_n : J(u) = J(u_k)\}$ (рис. 6.1, 6.2).

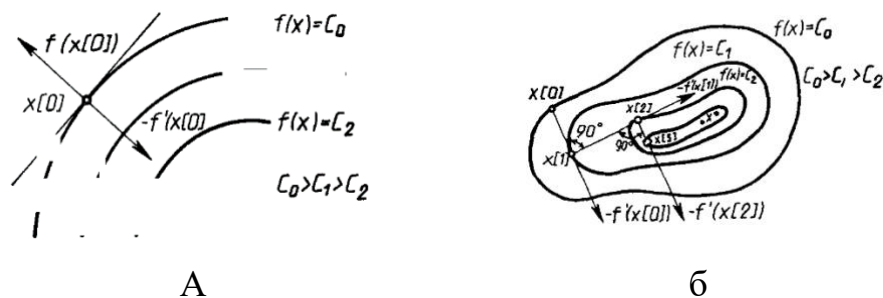


Рисунок 6.1 – Геометрична інтерпретація методу найшвидшого спуску

З рисунків 6.1 і 6.2 можна зрозуміти, що чим ближче лінії рівні $J(u) = const$ до кола, тим краще сходиться метод найшвидшого спуску.

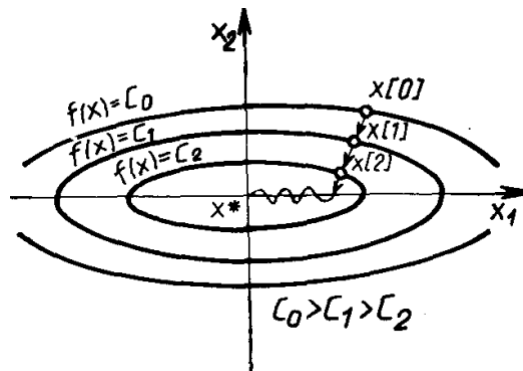


Рисунок 6.2 – Застосування методу найшвидшого спуску для яружної функції

Ці ж рисунки ілюструють, а теоретичні дослідження і чисельні експерименти підтверджують, що метод найшвидшого спуску і інші варіанти градієнтного методу повільно сходяться в тих випадках, коли поверхні рівня функції $J(u)$ дуже витягнуті і функція має „яружний” характер. Це означає, що невелика зміна деяких змінних призводить до різкої зміни значення функції – ця група змінних характеризує „схил яру”, а по іншим змінним, які задають „дно яру”, функція змінюється незначно (на рисунку 6.2 зображені лінії рівня „яружної” функції двох змінних). Якщо точка лежить на „схилі яру”, то напрям спуску з цієї точки буде майже перпендикулярним до напрямку „дна яру”, і в результаті наближення $\{u_k\}$ будуть по черзі знаходитися то на одному то на іншому „схилі яру”. Якщо „схили яру” достатньо круті, то такі скачки „зі схилу на схил” точок u_k можуть дуже сповільнити сходимость градієнтного методу.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Виберіть функцію з наведеного нижче списку, побудуйте її графік засобами MatLab'a (або Excel) в розумному діапазоні для пошуку точок її екстремумів (найбільшого й найменшого значень) із заданою точністю.
2. Для обраної функції градієнтним методом знайдіть оптимальне значення мінімуму, попередньо визначивши множину локалізації мінімуму. Спосіб вибору крокового множника обрати самостійно.
3. Перевірте отримані результати засобами MSEXEL.

Розв'язати задачі безумовної оптимізації:

1. $J(u) = x^2 + y^2 + xy \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
2. $J(u) = x^3 + y^3 - 5xy \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
3. $J(u) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2 \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
4. $J(u) = xy + \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
5. $J(u) = \sin(x + y) - \sin(x) - \sin(y) \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
6. $J(u) = e^{\frac{x}{4}}(3x + 2y) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
7. $J(u) = 10 \ln(x) + xy^2 - y^3 \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
8. $J(u) = e^{-(x-xy+y)}(x + y) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
9. $J(u) = 2x^2 + y^2 - xy - xz + 2z \rightarrow \min, \quad u \in E_3$
10. $J(u) = xy^2z^2(1 - x - 2y - 3z) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_3$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим обумовлений вибір антиградієнта в якості напрямку руху у методах спуску?
2. Які методи називаються градієнтними?
3. Який градієнтний метод називається методом найшвидшого спуску?
4. Яку властивість мають напрями руху на двох послідовних ітераціях методу найшвидшого спуску?
5. За яких умов послідовність точок, отримана за методом найшвидшого спуску, збігається до розв'язку задачі безумовної мінімізації з швидкістю геометричної прогресії?
6. Для яких функцій можна знайти кроковий множник в методі найшвидшого спуску в явному вигляді і чому він дорівнює?
7. Які правила вибору крокового множника використовуються в градієнтних методах?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

ТЕМА РОБОТИ: Методи другого порядку.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з методами другого порядку розв'язання екстремальних задач. Набути практичних навичок застосування методу Ньютона.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Всі методи, розглянуті вище, відносяться до методів першого порядку, оскільки вони використовують лише перші похідні мінімізуємої функції. В усіх цих методах для визначення напрямку зменшення функції використовується лише лінійна частина розкладення функції в ряд Тейлора. Якщо мінімізуєма функція двічі неперервно диференційована і похідні $J'(u)$, $J''(u)$ обчислюються достатньо просто, то можна застосовувати методи мінімізації другого порядку, які використовують квадратичну частину розкладення цієї функції в ряд Тейлора.

Розглянемо один з таких методів – метод Ньютона, який сходиться з квадратичною швидкістю [4].

Розглянемо метод Ньютона для задачі

$$J(u) \rightarrow \min; \quad u \in U \equiv E_n \quad (7.1)$$

де $J(u) \in C^2(E_n)$. Нехай $u_0 \in E_n$ - деяке початкове наближення. Якщо відоме наближення u_k , то прирощення функції $J(u) \in C^2(E_n)$ в точці u_k можна представити в вигляді

$$J(u) - J(u_k) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle + o(|u - u_k|^2)$$

Розглянемо квадратичну частину цього прирощення

$$J_k(u) \equiv \langle J'(u_k), u - u_k \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle \quad (7.2)$$

і відзначимо допоміжне наближення $\bar{u}_k$ з умови

$$J_k(\bar{u}_k) = \inf_{E_n} J_k(u). \quad (7.3)$$

Наступне $(k+1)$ -е наближення будемо шукати у вигляді

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k (\bar{u}_k - u_k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (7.4)$$

В залежності від способу вибору величини α_k в (7.4) можна одержати різні варіанти методу (7.2) – (7.4). Найбільш часто використовують такі:

1) покладемо

$$\alpha_k = 1, k = 0, 1, \dots \quad (7.5)$$

в цьому випадку $u_{k+1} = \bar{u}_k$ ($k = 0, 1, \dots$), тобто умова (7.3) одразу визначає $(k+1)$ -е наближення. Іншими словами,

$$J_k(u_{k+1}) = \inf_{E_n} J_k(u), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7.6)$$

Відомо, що то в точці мінімуму функції $J_k(u)$ її похідна дорівнює 0, тобто

$$J'_k(u_{k+1}) = J'_k(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k) = 0. \quad (7.7)$$

Це означає, що на кожній ітерації методу (7.2) – (7.5) або (7.6) треба розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (7.7) відносно невідомої різниці $u_{k+1} - u_k$. Якщо матриця цієї системи $J''(u_k)$ - не вироджена, то з (7.7) маємо

$$u_{k+1} = u_k - (J''(u_k))^{-1} J'(u_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.8)$$

2) в якості α_k в (7.4) можна прийняти $\alpha_k = \lambda^{i_0}$,

де i_0 - мінімальний серед $i \geq 0$ номер, для них виконується нерівність

$$J(u_k) - J(u_k + \lambda^i (\bar{u}_k - u_k)) \geq \varepsilon \lambda^i |J_k(\bar{u}_k)|, \quad (7.9)$$

де λ, ε - параметри метода, $\lambda > 0$, $\varepsilon < 1$.

3) можливий вибір α_k в (7.4) з умов

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad f_k(\alpha_k) &= \min_{0 \leq \alpha \leq 1} f_k(\alpha), \\ f_k(\alpha) &= J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Відзначимо, що метод Ньютона з вибором довжини кроку α_k за правилами (7.9), (7.10) являється аналогічним відповідним варіантам методу умовного градієнта.

Метод Ньютона для розв'язання задачі (7.1) звичайно застосовується в тих випадках, коли обчислення похідних $J'(u), J''(u)$ не викликає особливих труднощів і допоміжна задача (7.3) розв'язується достатньо просто. Достоїнством методу Ньютона являється висока швидкість сходимості. Тому хоч трудоемність кожної ітерації цього методу вище ніж в методах першого порядку, але загальний об'єм обчислювальної роботи, необхідної для

розв'язання задачі (7.1) з заданою точністю, з застосуванням методу Ньютона може виявитися меншим ніж коли будуть використовуватися більш прості методи.

Сходимість методу Ньютона встановлюється наступною теоремою.

Теорема 1. Нехай функція $J(u)$ сильно випукла на E_n , $J(u) \in C^2(E_n)$ і, крім того,

$$\begin{aligned} \|J''(u) - J''(v)\| &\leq \alpha |u - v|, \quad u, v \in E_n, \\ \alpha &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

нехай початкове наближення u_0 вибране таким, що

$$\alpha |J'(u_0)| \leq 2\mu^2 q, \quad (7.12)$$

де $\mu > 0$ – стала, така, що

$$\langle J'(u)u, u \rangle \geq \mu \|u\|^2, \quad \forall u \in E_n,$$

q – деяка стала $0 < q < 1$. Тоді послідовність $\{u_k\}$, яка визначається умовами (7.8), існує, сходиться до точки u_* мінімуму $J(u)$ на E_n , причому, справедлива оцінка

$$|u_R - u_*| \leq 2\mu L^{-1} q^{2^k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7.13)$$

(без доведення).

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Виберіть функцію з наведеного нижче списку, побудуйте її графік засобами MatLab'a (або Excel) в розумному діапазоні для пошуку точок її екстремумів (найбільшого й найменшого значень) із заданою точністю.

2. Для обраної функції методом Ньютона знайдіть оптимальне значення мінімуму, попередньо визначивши множину локалізації мінімуму. Спосіб вибору крокового множника обрати самостійно.

3. Перевірте отримані результати засобами MSEXEL.

1. $J(u) = x^2 + y^2 + xy \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
2. $J(u) = x^3 + y^3 - 5xy \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
3. $J(u) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2 \rightarrow \min, \quad u \in E_2$

4. $J(u) = xy + \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
5. $J(u) = \sin(x + y) - \sin(x) - \sin(y) \rightarrow \min, \quad u \in E_2$
6. $J(u) = e^{\frac{x}{4}}(3x + 2y) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
7. $J(u) = 10 \ln(x) + xy^2 - y^3 \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
8. $J(u) = e^{-(x-xy+y)}(x + y) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_2$
9. $J(u) = 2x^2 + y^2 - xy - xz + 2z \rightarrow \min, \quad u \in E_3$
10. $J(u) = xy^2z^2(1 - x - 2y - 3z) \rightarrow \min(\max), \quad u \in E_3$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. До яких класів методів відноситься метод Ньютона?
2. У чому полягає суть методу Ньютона?
3. Які переваги і які недоліки має метод Ньютона?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

ТЕМА РОБОТИ: Методи одновимірної оптимізації.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з методами одновимірної оптимізації.
Набути навичок їх практичного застосування.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Позначимо $R = \{u : -\infty < u < \infty\}$ – числова вісь, U – деяка множина з R , $J(u)$ – функція, визначена на множині U , яка має в кожній точці $u \in U$ кінечне значення.

Прикладами множини з R є:

відрізок $[a, b] = \{u \in R : a \leq u \leq b\}$,

інтервал $(a, b) = \{u \in R : a < u < b\}$,

де a, b – відомі задані числа.

В залежності від властивостей множини U і функції $J(u)$ множина U_* може містити одну, кілька або безкінечну кількість точок, а також можливі випадки, коли U_* є пустою [13].

Приклад. Нехай $J(u) = u^2$. На множині $U = \{u : -1 \leq u \leq 3\}$ мінімальне значення $J(u)$ дорівнює нулю, множина U_* складається з єдиної точки $u_* = 0$.

Приклад. Функція $J(u) = \ln(u)$, $U = \{u : 0 < u \leq 1\}$. В цьому випадку $U_* = \emptyset$, так як в усіх точках з U функція приймає кінечні значення, а для послідовності $u_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, маємо $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = -\infty$.

В подальшому будемо розглядати два типи задач. До першого типу будемо відносити задачі, в яких потрібно визначити величину $J_* = \inf_{u \in U} J(u)$.

Підкреслимо, що в цьому випадку неважливо, чи буде множина U_* точок мінімуму $J(u)$ на U непустою чи пустою. До другого типу задач відносимо ті задачі, у яких множина U_* є непустою і слід поряд з J_* знайти деяку точку $u_* \in U_*$.

Можлива і більш широка постановка задачі мінімізації другого типу – коли шукаються не тільки точки мінімуму в сенсі визначення 1, але і точки локального мінімуму [13].

Розглянемо функцію, графік якої зображено на рисунку 8.1. Для неї точки u_0, u_2, u_4 є точками строю локального мінімуму, а в точках $u_5 < u \leq u_6$ та $u_8 \leq u \leq u_9$ функція досягає нестрогого локального мінімуму.

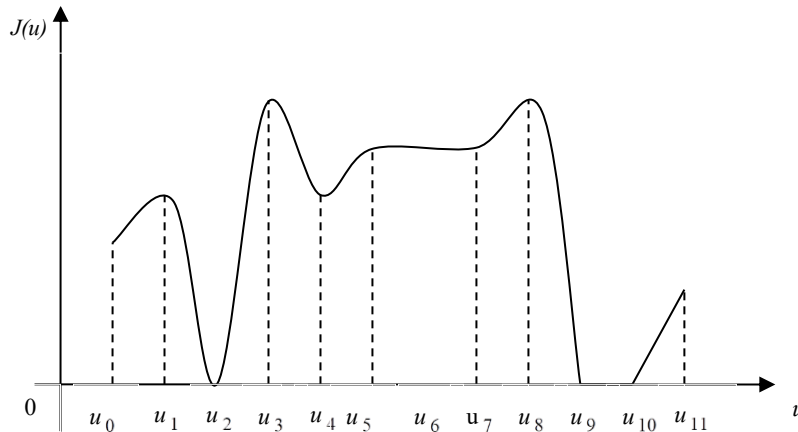


Рисунок 8.1 – Локальні та глобальний мінімуми функції

Точки локального мінімуму, в яких мінімум досягається відповідно визначення 1, називають точками глобального або абсолютного мінімуму функції $J(u)$ на множині U .

Визначимо клас функції, для яких всі точки локального мінімуму є точками глобального мінімуму [13].

Визначення. Функція $J(u)$ називається унімодальною на відрізку $U = [a, b]$, якщо вона неперервна на $[a, b]$ та існують числа α, β ($a \leq \alpha \leq \beta \leq b$) такі, що:

- 1) $J(u)$ строго монотонно спадає при $a \leq u \leq \alpha$, якщо $a < \alpha$;
- 2) $J(u)$ строго монотонно зростає при $\beta \leq u \leq b$, якщо $\beta < b$;
- 3) $J(u) = J_* = \inf_{u \in U} J(u)$ при $\alpha \leq u \leq \beta$, так що $U_* = [\alpha, \beta]$.

У випадку коли $\alpha = \beta$, функція $J(u)$ називається строго унімодальною на відрізку $[a, b]$.

Слід відзначити, що якщо функція $J(u)$ унімодальна на $[a, b]$, то вона буде унімодальною і на будь-якому відрізку $[c, d] \in [a, b]$.

Класичний метод. Класичний метод базується на диференціальному зчисленні і докладно викладений в підручниках по математичному аналізу.

Нехай функція $J(u)$ кусково неперервна та кусково гладка на відрізьку $[a, b]$. Це означає, що на $[a, b]$ може існувати лише кінечна кількість точок, в яких $J(u)$ або має розрив першого роду, або неперервна але не має похідної. В цьому випадку точками екстремуму функції $J(u)$ на $[a, b]$ можуть бути лише ті точки в яких виконується одна із наступних умов:

- $J(u)$ має розрив;
- $J(u)$ неперервна, але в цій точці не існує похідна $J'(u)$;
- похідна $J'(u)$ існує і дорівнює нулю;
- $u = a$ або $u = b$.

Такі точки називають точками, підозрілими на екстремум.

Пошук точок екстремуму функції починають зі знаходження всіх точок, підозрілих на екстремум. Потім проводять додаткові дослідження і відбирають із нас ті, які є точками локального мінімуму або максимуму. Для цього досліджують знак першої похідної $J'(u)$ в околі (або відповідному полуоколі граничних точок $u = a$, $u = b$) підозрілої точки. Для того щоб підозріла точка $u \in [a, b]$ була точкою локального мінімуму, достатньо, щоб

$$\lim_{v \rightarrow u-0} J(v) \geq J(u), \quad \lim_{v \rightarrow u+0} J(v) \geq J(u) \quad \text{та} \quad \text{при деякому } \alpha > 0 \text{ на множинах}$$

$[a, b] \cap (u, u + \alpha) = O_\alpha^+(u)$, $[a, b] \cap (u - \alpha, u) = O_\alpha^-(u)$ існувала похідна $J'(u)$, причому $J'(u) > 0$ при $u \in O_\alpha^+(u)$ та $J'(u) < 0$ при $u \in O_\alpha^-(u)$. Коли $\lim_{v \rightarrow u-0} J(v) \leq J(u)$,

$$\lim_{v \rightarrow u+0} J(v) \leq J(u) \quad \text{та} \quad J'(u) < 0 \quad \text{при} \quad u \in O_\alpha^+(u), \quad J'(u) > 0 \quad \text{при} \quad u \in O_\alpha^-(u), \quad \text{то } u \text{ - точка}$$

локального максимуму.

В тих випадках, коли можливо обчислити в підозрілій точці похідні другого та більш високих порядків, то їх також можна застосувати для дослідження поведінки функції в околі цієї точки. Нехай відомі похідні $J'(u)$, $\dots$, $J^{(n)}(u)$, причому $J^{(i)}(u) = 0, i = \overline{1, n-1}$, а $J^{(n)}(u) \neq 0, n \geq 1$. Якщо n – парне число, то у випадку $J^{(n)}(u) > 0$ в точці u функція $J(u)$ має локальний мінімум. Якщо n – непарне, то при $a < u < b$ в точці u не може бути локального мінімуму або максимуму; при $u = a$ ($u = b$) у випадку $J^{(n)}(u) > 0$ в точці u

маємо локальний мінімум (максимум), а у випадку $J^{(n)}(u) < 0$ – локальний максимум (мінімум).

Щоб знайти глобальний мінімум функції $J(u)$ на $[a, b]$ треба перебрати всі точки локального мінімуму і серед них вибрати точку з найменшим значенням функції, якщо таке існує.

Класичний метод дослідження функції на екстремум використовується в тих випадках, коли достатньо просто вдається з'ясувати всі підозрілі на екстремум точки та реалізувати описану вище схему відбору екстремальних точок. Нажаль класичний метод має дуже обмежене застосування. Справа в тому, що обчислення похідної $J'(u)$ в практичних задачах часто є непростотою задачею. Наприклад, може статися, що значення функції $J(u)$ визначаються із спостережень або фізичних експериментів і одержати інформацію про її похідні вкрай важко. Але навіть в тих випадках, коли похідну все ж вдається обчислити, розв'язання рівняння $J'(u) = 0$, та виявлення інших підозрілих точок, може бути пов'язане зі значними труднощами. Тому важливо мати також і інші методи пошуку екстремуму, які не потребують обчислення похідних, та більш зручні для реалізації на сучасних ЕОМ.

Метод половинного поділу відрізка [13]. Цей метод є найпростішим методом мінімізації функції однієї змінної, який не потребує обчислення похідної. Будемо припускати, що мінімізуєма функція $J(u)$ є унімодальною на відрізку $[a, b]$. Пошук мінімуму починається з вибору двох точок $u_1 = (a + b - \delta)/2$ та $u_2 = (a + b + \delta)/2$, де δ – константа, яка є параметром методу, $0 < \delta < (b - a)$. Величина δ вибирається самостійно і може визначитися значимою кількістю вірних десяткових знаків при заданні аргументу u . Зокрема, зрозуміло, що δ не може бути менше машинної похибки ЕОМ, яка використовується для розв'язання задачі. Точки u_1, u_2 розміщені симетрично на відрізку $[a, b]$ відносно його середини та при малих δ ділять його майже пополам (це і пояснює назву методу).

Після вибору точок u_1, u_2 обчислюють значення $J(u_1), J(u_2)$ і порівнюють між собою. Якщо $J(u_1) \leq J(u_2)$, то $a_1 = a, b_1 = u_2$; якщо ж $J(u_1) > J(u_2)$, то $a_1 = u_1, b_1 = b$. Оскільки $J(u)$ унімодальна на $[a, b]$, то

зрозуміло, що відрізок $[a_1, b_1]$ має спільну точку з множиною U_* точок мінімуму $J(u)$ на $[a, b]$ і його довжина дорівнює $b_1 - a_1 = (b - a - \delta)/2 + \delta$.

Нехай відрізок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, який має непустий перетин з U_* , вже відомий.

Тоді виберемо точки

$$u_{2k-1} = (a_{k-1} + b_{k-1} - \delta)/2,$$

$$u_{2k} = (a_{k-1} + b_{k-1} + \delta)/2,$$

які розміщені на відрізку $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ симетрично відносно його середини, і обчислюємо значення $J(u_{2k-1})$, $J(u_{2k})$. Якщо $J(u_{2k-1}) \leq J(u_{2k})$, то $a_k = a_{k-1}$, $b_k = u_{2k}$; якщо ж $J(u_{2k-1}) > J(u_{2k})$, то $a_k = u_{2k-1}$, $b_k = b_{k-1}$. Довжина відрізка $[a_k, b_k]$, який одержали, дорівнює

$$b_k - a_k = (b - a - \delta)/2^k + \delta > \delta \text{ і } [a_k, b_k] \cap U_* \neq \emptyset.$$

Якщо кількість обчислень значень функції не обмежена, то процес поділу відрізка можна продовжувати доки не отримаємо відрізок $[a_k, b_k]$ довжини $b_k - a_k < \varepsilon$, де ε - задана точність, $\varepsilon > \delta$. Звідси маємо,

$$k > \log_2((b - a - \delta)/(\varepsilon - \delta)).$$

Оскільки, кожний поділ відрізка вимагає обчислення двох значень функції, то для досягнення точності $b_k - a_k < \varepsilon$ знадобиться всього $n = 2k > 2 \log_2((b - a - \delta)/(\varepsilon - \delta))$ таких обчислень.

Після визначення відрізка $[a_k, b_k]$ в якості наближення до множини U_* можна взяти точку

$$\overline{u}_n = u_{2k-1} \text{ при } J(u_{2k-1}) \leq J(u_{2k})$$

або

$$\overline{u}_n = u_{2k} \text{ при } J(u_{2k-1}) > J(u_{2k}),$$

а значення $J(\overline{u}_n)$ може виступати в якості наближення для $J_* = \inf_{u \in [a, b]} J(u)$.

При такому виборі наближення для U_* буде допущена похибка $\rho(\overline{u}_n, U_*) \leq \max\{b_k - \overline{u}_n; \overline{u}_n - a_k\} = (b - a - \delta)/2^k$.

Якщо не вимагати того, щоб значення функції, яке є наближенням до J_* , було обчислене неодмінно в тій же точці, яка служить наближенням до U_* , то замість $\overline{u}_n$ можна взяти точку $u_n = (a_{k-1} + b_{k-1})/2$ з меншою похибкою

$$\rho(\overline{u}_n, U_*) \leq b_k - a_k = (b - a - \delta)/2^{k+1} + \delta/2,$$

тут $k = n/2$ і δ – достатньо мале.

Зрозуміло, що в цьому випадку можна провести ще одне додаткове обчислення значення функції в точці u_n і покласти $J(u_n) \approx J_*$.

Зі сказаного вище слідує, що методом половинного поділу за допомогою $n=2k$ обчислень значення функції можна визначити точку мінімуму унімодальної функції на відрізку $[a, b]$ в кращому випадку з точністю $\approx (b-a)/2^{(n/2+1)}$. Виникає питання про існування методів, які дозволяють за допомогою такої ж кількості обчислень значень функції розв'язати задачу мінімізації унімодальної функції точніше. Такі методи існують і один з них буде розглянуто в наступному пункті.

Відзначимо, що метод половинного поділу без змін можна застосовувати для мінімізації функції, які не є унімодальним. Але в цьому випадку не можливо гарантувати, що знайдений розв'язок буде достатньо точним наближенням до глобального мінімуму.

Метод золотого перетину [13]. Як відомо, золотим перетином відрізка називається поділ відрізка на дві нерівні частини, щоб відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнювало відношенню довжини більшої частини відрізка до довжини його меншої частини.

Неважко перевірити, що золотий перетин відрізка $[a, b]$ будується двома точками

$$u_1 = a + (3 - \sqrt{5})(b - a)/2$$

$$u_2 = a + (\sqrt{5} - 1)(b - a)/2,$$

які розміщені симетрично відносно середини відрізка, причому $a < u_1 < u_2 < b$.

Відзначимо також, що точка u_1 в свою чергу буде золотий перетин відрізка $[a, u_2]$, так як $\frac{u_2 - a}{u_1 - a} = \frac{u_1 - a}{u_2 - u_1}$.

Аналогічно точка u_2 буде золотий перетин відрізка $[u_1, b]$. Спираючись на цю властивість золотого перетину, опишемо відповідний метод.

Покладемо $a_1 = a$, $b_1 = b$. На відрізку $[a_1, b_1]$ візьмемо точки u_1 , u_2 , які будують золотий перетин, і обчислимо значення $J(u_1)$, $J(u_2)$. Далі, якщо $J(u_1) \leq J(u_2)$, то покладемо $a_2 = a_1$, $b_2 = u_2$, $\overline{u_2} = u_1$; якщо ж $J(u_1) > J(u_2)$, то

покладемо $a_2 = u_1$, $b_2 = b_1$, $\overline{u_2} = u_2$. Так як функція $J(u)$ унімодальна на $[a, b]$, то відрізок $[a_2, b_2]$ має хоча б одну спільну точку з множиною U_* точок мінімуму $J(u)$ на $[a, b]$. Крім того, $b_2 - a_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2}$, а також $\overline{u_2}$ належить відрізку $[a_2, b_2]$. В цій точці $\overline{u_2}$ відоме значення

$$J(\overline{u_2}) = \min\{J(u_1), J(u_2)\}$$

і вона буде золотий перетин відрізка $[a_2, b_2]$.

Припустимо, що все відомі точки $u_1, \dots, u_{n-1}$, обчислені значення $J(u_1), \dots, J(u_{n-1})$, знайдено відрізок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ такий, що

$$[a_{n-1}, b_{n-1}] \cap U_* \neq \emptyset,$$

$$b_{n-1} - a_{n-1} = ((\sqrt{5}-1)/2)^{n-1}(b-a),$$

і відома точка $\overline{u_{n-1}}$, яка буде золотий перетин відрізка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ і така що

$$J(\overline{u_{n-1}}) = \min_{1 \leq i \leq n-1} J(u_i), \quad n \geq 2.$$

Тоді в якості наступної точки візьмемо точку

$$u_n = b_{n-1} + a_{n-1} - \overline{u_{n-1}},$$

яка також буде золотий перетин відрізка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, обчислимо значення $J(u_n)$.

Нехай для визначеності $a_{n-1} < u_n < \overline{u_{n-1}} < b_{n-1}$ (випадок $\overline{u_{n-1}} < u_n$ $\overline{u_{n-1}} < u_n$ розглядається аналогічно). Якщо $J(u_n) \leq J(\overline{u_{n-1}})$, то покладемо

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = \overline{u_{n-1}}, \quad \overline{u_n} = u_n$$

якщо ж $J(u_n) > J(\overline{u_{n-1}})$, то покладемо

$$a_n = u_n, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \overline{u_n} = \overline{u_{n-1}}.$$

Новий відрізок $[a_n, b_n]$ такий, що

$$[a_n, b_n] \cap U_* \neq \emptyset,$$

$$b_n - a_n = ((\sqrt{5}-1)/2)^n(b-a)$$

точка $\overline{u_n}$ буде золотий перетин відрізка $[a_n, b_n]$ і

$$J(\overline{u_n}) = \min\{J(u_n), J(\overline{u_{n-1}})\} = \min_{1 \leq i \leq n} J(u_i).$$

Якщо кількість обчислень значень $J(u)$ наперед не обмежена, то цей процес можна продовжувати, наприклад, до тієї пори, поки не виконається

нерівність $b_n - a_n < \varepsilon$, де ε - задана точність. Якщо ж кількість обчислень значень $J(u)$ наперед чітко задана і дорівнює n , то процес на цьому закінчується і в якості розв'язку задачі другого типу можна вважати пару $J(\overline{u_n}), \overline{u_n}$, де $J(\overline{u_n})$ є наближенням для $J_* = \inf_{u \in [a,b]} J(u)$, а також $\overline{u_n}$ служить наближенням для множини U_* з похибкою

$$\rho(\overline{u_n}, U_*) \leq \max \{b_n - \overline{u_n}; \overline{u_n} - a_n\} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^n (b - a) = A_n.$$

Згадаємо, що за допомогою методу половинного поділу за $n=2k$ обчислень функції $J(u)$ в аналогічному випадку була одержана точка $\overline{u_n}$ з похибкою

$$\rho(\overline{u_n}, U_*) \leq 2^{-n/2} (b - a - \delta) < 2^{-n/2} (b - a) = B_n.$$

Звідси маємо $\frac{A_n}{B_n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 1} \right)^n$. Видно, що вже при невеликих n перевага

методу золотого перетину перед методом половинного поділу є відчутною.

Слід обговорити можливість чисельної реалізації методу золотого перетину. Відзначимо, що $\sqrt{5}$ на ЕОМ буде задатися наближено, тому вже перша точка

$$u_1 = a + (3 - \sqrt{5})(b - a)/2$$

буде знайдена з деякою похибкою. Розглянемо, як вплине ця похибка на результати наступних кроків методу золотого перетину. Позначимо

$$\Delta_n = b_n - a_n = ((\sqrt{5} - 1)/2)^{n-1} (b - a), \quad n = 1, 2, \dots$$

Неважко перевірити, що Δ_n є розв'язком кінечно-різницевого рівняння $\Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + \Delta_n$, або

$$\Delta_n = \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (8.1)$$

з початковими умовами $\Delta_1 = b - a$, $\Delta_2 = b - u_1$.

Як відомо [4, 13], лінійно незалежні частинні розв'язки цього рівняння мають вигляд τ_1^n і τ_2^n ($n = 1, 2, \dots$), де $\tau_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\tau_2 = -(\sqrt{5} + 1)/2$, - корені характеристичного рівняння $\tau^2 + \tau - 1 = 0$, а будь-яке рівняння (8.1) можна записати у вигляді

$$\Delta_n = A\tau_1^n + B\tau_2^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

де константи A і B однозначно визначаються початковими умовами з лінійної системи

$$\begin{cases} A\tau_1 + B\tau_2 = \Delta_1. \\ A\tau_1^2 + B\tau_2^2 = \Delta_2. \end{cases} \quad (8.3)$$

При $\Delta_1 = b - a, \Delta_2 = bu_1$ маємо

$$A = 2(b - a)/(\sqrt{5} - 1), \quad B = 0,$$

і зрозуміло, що формула (8.2) в цьому випадку дає відомий розв'язок $\Delta_n = \tau_1^{n-1}(b - a)$. Але точка u_1 задана з похибкою, тому в системі (8.3) в якості точного значення Δ_2 ми змушені скористатися наближеним $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 + \delta$. Тоді константи A, B з (8.3) визначаються з відповідними похибками:

$$\tilde{A} = A - \delta_1, \quad \tilde{B} = B + \delta_2,$$

і замість (8.2) з точними A, B будемо мати

$$\tilde{\Delta}_n = \tilde{A}\tau_1^n + \tilde{B}\tau_2^n \quad (n=1, 2, \dots).$$

Оскільки $0 < \tau_1 = 0,6... < 1, |\tau_2| = 1,6... > 1$, то похибка

$$|\Delta_n - \tilde{\Delta}_n| = |\delta_1\tau_1^n + \delta_2\tau_2^n|$$

з ростом n буде збільшуватися дуже швидко. А це означає, що вже при не дуже великих n відрізку $[a_n, b_n]$ і точки $\bar{u}_n, u_{n+1} = b_n + a_n - \bar{u}_n$ будуть значно відрізнятися від тих, які могли бути одержані при роботі з точними даними.

Спробуйте самостійно чисельно підтвердити, що метод золотого перетину в описаному вище вигляді практично не можливо застосувати вже при невеликих n .

Для чисельної реалізації доречніше використовувати модифікацію методу золотого перетику, яка дозволяє уникнути швидкого зростання похибок при обчисленні точок $u_n (n \geq 2)$.

В цьому випадку, на кожному відрізку $[a_n, b_n]$, який містить точку $\bar{u}_n$ з попереднього кроку, уникати при обчисленні u_{n+1} використання формули $u_{n+1} = b_n + a_n - \bar{u}_n$ а в якості u_{n+1} вибрати ту з точок $a_n + (3 - \sqrt{5})(b_n - a_n)/2$, $a_n + (\sqrt{5} - 1)(b_n - a_n)/2$, яка більш віддалена від $\bar{u}_n$. Зрозуміло, що після такої модифікації метод золотого перетику, взагалі не буде мати властивості симетричності, і може бути не таким вже виточеним, але значно точнішим в реалізації.

Відзначимо також, що цей метод може бути застосований і для функцій, які є не унімодальними, але в цьому випадку одержаний розв'язок може досить відрізнятися від глобального.

Метод Фібоначчі [13]. В тих випадках, коли обчислення значень функції пов'язані зі значними затратами, велике значення мають економічні або оптимальні методи, які дозволяють розв'язати задачу мінімізації з необхідною точністю на основі обчислення значень функції у якомога меншій кількості точок, а також тісно пов'язані з ними методи, які гарантують найкращу точність при заданій кількості обчислень значень функції.

Розглянемо послідовний метод мінімізації унімодальних функцій на $[a, b]$. Для цього нам знадобляться числа Фібоначчі, які визначаються співвідношеннями

$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1, 2, \dots;$$

Методом математичної індукції легко показати ще n -е число Фібоначчі можна записати в вигляді:

$$F_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}, n = 1, 2, \dots \quad (8.4)$$

Використовуючи числа F_n побудуємо n -точковий послідовний метод, який називається методом Фібоначчі. Цей метод відноситься до класу симетричних методів і визначається заданням на відрізку $[a, b]$ симетричних точок

$$u_1 = a + (b-a)F_{n-1}/F_{n+1},$$

$$u_2 = a + b - u_1 = a + (b-a)F_n/F_{n+1}.$$

Методом математичної індукції неважко довести, що коли проведені обчислення значень функції в точках $u_1, \dots, u_k$, то мінімум буде локалізовано на відрізку $[a_k, b_k]$, який має довжину

$$\Delta_k = b_k - a_k = (b-a)F_{n-k+2}/F_{n+1},$$

причому точка $\bar{u}_k$ ($a_k < u_k < b_k$) з обчисленим значенням $J(u_k) = \min_{l \leq i \leq k} J(u_i)$ співпадає однією з точок

$$u'_k = a_k + (b_k - a_k) \frac{F_n - k}{F_n - k + 2} = a_k + (b-a) \frac{F_{n-k}}{F_{n+1}}$$

$$u''_k = a_k + (b_k - a_k) \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} = a_k + (b-a) \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+1}} =$$

$$= a_k + b_k - u'_k,$$
(8.5)

які розміщені на відрізку $[a_k, b_k]$ симетрично відносно його середини.

Як видно з (8.5), при $k = n - 1$ точки u'_{n-1}, u''_{n-1} співпадають. Це означає, що при $k = n - 1$ перша частина процесу закінчується обчисленням значення функції в точці u_{n-1} та визначенням відрізка локалізації мінімуму $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ довжини $b_{n-1} - a_{n-1} = (b - a)F_3 / F_{n-1} = 2(b - a) / F_{n-1}$, причому точка $u'_{n-1} = u''_{n-1} = \bar{u}_{n-1}$, співпадає з серединою відрізка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$,

Наприкінці, порушуючи симетричність процесу, останнє n -е обчислення функції $J(u)$ проводиться в точці $u_n = \bar{u}_{n-1} + \varepsilon$ (або $u_n = \bar{u}_{n-1} - \varepsilon$), де $0 < \varepsilon < (b - a) / F_{n+1}$ і відрізок локалізації мінімуму визначається за формулами $a_n = a_{n-1}, b_n = \bar{u}_{n-1} + \varepsilon$, при $J(\bar{u}_{n-1}) \leq J(\bar{u}_{n-1} + \varepsilon)$ або $a_n = \bar{u}_{n-1}, b_n = b_{n-1}$ при $J(\bar{u}_{n-1}) > J(\bar{u}_{n-1} + \varepsilon)$, так що в гіршому випадку $b_n - a_n = (b - a) / F_{n+1} + \varepsilon$. Цей метод будемо позначати через Φ_n .

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Виберіть функцію з наведеної нижче таблиці, побудуйте її графік засобами MatLab'a (або Excel) в розумному діапазоні для пошуку точок її екстремумів (найбільшого й найменшого значень) із заданою точністю.

Завдання 2. Для обраної функції знайдіть оптимальне значення мінімуму, попередньо визначивши відрізок локалізації мінімуму.

Варіант 1. Методом половинного поділу.

Варіант 2. Методом золотого перетину.

Варіант 3. Методом Фібоначчі.

Для кожного методу слід визначити: N_k - кількість виконаних ітерацій, N_f - кількість обчислень значень цільової функції, u_* - наближене значення точки оптимуму, $J(u_*)$ - наближене значення оптимуму цільової функції. Одержані результати подати у вигляді таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Порівняння результатів визначення мінімуму функції

№	Назва способу визначення	$\varepsilon = 10^{-4}$				$\varepsilon = 10^{-8}$			
		N_k	N_f	u_*	$J(u_*)$	N_k	N_f	u_*	$J(u_*)$
1	Розроблена програма								
2	Засобами MSEXEL								
3	Пакет пошук рішення MSEXEL								

Завдання 3. Перевірте отримані результати засобами MSEXEL.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

№	Функція $I(u)$	№	Функція $I(u)$
1	$ u + u+1 - 1$	11	$e^{-2u} + 0,5u^4$
2	$1 + u - 2.5u^2 + 0.25u^4$	12	$2\sqrt{1+u^2} + e^{-u}$
3	$\frac{u^2}{3} + \ln(u) - 1$	13	$\frac{\cos 3u}{u}$
4	$4 + (u-2)^2$	14	$0.5 \cos u - \sqrt{10u - u^2}$
5	$\lg u + \sin u$	15	$5u \ln(u+1) - 2u^3$
6	$2u \lg(u+2) + u^3 - 6$	16	$3u^2 - 2(u+1)(\ln(u+1)+2)$
7	$\left \frac{u}{\ln u} - 2u^3 \right $	17	$u \sin 3u - \cos 2u$
8	$e^{2u} + \frac{3}{(u+2)}$	18	$3u^2 + 4u - \cos^2 u$
9	$\sin(0.2u - 1) + (0.1u - 5)^6$	19	$4(3-u)^{\frac{2}{3}} + 2x^3$
10	$u^2 - 3u + 4 \cos u$	20	$u^2 - 3u + u \ln u$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які функції називаються унімодальними (строго унімодальними) і яка їх головна особливість?
2. У чому полягає суть методів пошуку відрізка локалізації точки мінімуму для унімодальної функції?

3. У чому полягає суть методу половинного поділу відрізка, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
4. Чому дорівнює довжина поточного відрізка локалізації після n ітерацій методу половинного поділу?
5. Що називається золотим перерізом відрізка?
6. У чому полягає суть методу золотого перерізу, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
7. Що таке числа Фібоначчі?
8. Як можна обчислити наближено числа Фібоначчі?
9. У чому полягає суть методу Фібоначчі, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
10. Які методи одновимірної оптимізації називаються симетричними?
11. Що ви знаєте про оптимальні методи пошуку мінімуму?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

ТЕМА РОБОТИ: Методи багатовимірної оптимізації.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з методами багатовимірної оптимізації.
Набути навичок їх практичного застосування.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ [4]

Визначення 1. Нехай U деяка множина з E_n . Проекцією точки $u \in E_n$ називається найближча до u точка w множини U , тобто $w \in U$, яка задовольняє умові

$$|u - w| = \inf_{v \in U} |u - v|.$$

Проекцією точки u на множини U позначаємо $P_U(u) = w$.

Оскільки $\rho(u, U) = \inf_{v \in U} |u - v|$ – відстань від точки u до множини U , то зрозуміло, що

$$\rho(u, U) = |u - P_U(u)| \leq |u - v|, \quad \forall v \in U, \quad \forall u \in E_n$$

Якщо $u \in U$, то очевидно, що $P_U(u) = u$. Але проекція на множину існує не завжди.

Наприклад, якщо $U = \{u \in E^n : |u| < 1\}$ - відкрита одинична куля в E_n , то жодна точка $u \in U$ не буде мати проекції на цю множину.

Зрозуміло, що множина U замкнута, то будь-яка точка з $u \in E_n$ має проекцію на U .

Метод проекції градієнта. Розглянемо задачу

$$J(u) \rightarrow \inf ; \quad u \in U \subset E_n, \quad (9.1)$$

де множина U не обов'язково співпадає з усім простором E_n , а функція $J(u) \in C^1(U)$.

Безпосереднє застосування градієнтного методу у випадку $U \neq E_n$ може призвести до ускладнень, оскільки точка u_{k+1} при деякому k може і не належати до U . Але це ускладнення легко усувається, якщо кожну одержану точку $u_k - \alpha_k J'(u_k)$ для кожного k проектувати на множину U . В результаті одержимо метод проекції градієнта.

Нехай $u_0 \in U$ - деяке початкове наближення. Далі будемо будувати послідовність $\{u_k\}$ за правилом

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.2)$$

де α_k - додатній кроковий множник. Якщо U - випукла замкнута множина і спосіб вибору $\{\alpha_k\}$ в (9.2) заданий, то послідовність $\{u_k\}$ буде однозначно визначатися умовою (9.2). Зокрема коли $U = E^n$ метод (9.2) перетворюється в градієнтний метод.

Якщо в (9.2) на деякій ітерації виявилось $u_{k+1} = u_k$ (це може статися коли $J(u_k) = 0$), то процес (9.2) завершують. В цьому випадку точка u_k задовольняє необхідний умові оптимальності, і для з'ясування того, чи дійсно u_k є розв'язком задачі (9.1) треба провести додаткові дослідження. Зокрема, якщо $J(u)$ - випукла функція, то така точка u_k є розв'язком задачі (9.1).

Кроковий множник можна вибирати за тими ж правилами, що і у звичайному градієнтному методі. Методом проекції градієнта звичайно користуються лише в тих випадках, коли проекція точки на множину легко визначається. Наприклад, коли множина U є кулею в E_n , паралелепіпедом, гіперплощиною, на півпростором або додатнім октантом, задача проектування точки розв'язується просто і в явному вигляді, і реалізація кожної ітерації в цьому випадку не викликає особливих ускладнень. Якщо ж задача проектування для свого розв'язання в свою чергу вимагає також ітераційних методів, то ефективність методу проекції градієнта взагалі знижується.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Для функції, вибраної в наведеного нижче списку, знайдіть оптимальне значення та точку оптимуму методом проекцій градієнта (варіант функції = «номер в списку групи» (якщо «номер...» ≤ 12) або «номер в списку групи»%13+1(якщо «номер...» > 12)).

№	Функція $J(u)$ та множина U	№	Функція $J(u)$ та множина U
1	$10u_1^2 + 4u_1u_2 + 6u_2^2 + 5u_1 + 8u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \geq 3\}$	7	$(u_1 - 2)^4 + (u_2 - 1)^4 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 2u_1 + u_2 \leq 2\}$
2	$7u_1^2 + u_2^2 - 40u_1 + 2u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$	8	$u_1^2 + 4u_2^2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 4u_1 - 2u_2 \leq 3\}$
3	$u_1^2 + 9u_2^2 - 12u_1 - 36u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 0 \leq u_1 \leq 4, 0 \leq u_2 \leq 2\}$	9	$u_1^2 - 2u_1 - u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 2u_1^2 + 3u_2^2 \leq 6, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$
4	$2\sqrt{1 + u_1^2 + 2u_2^2} + u_1 + u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 5 \leq u_1 \leq 8, 1 \leq u_2 \leq 10\}$	10	$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_1 + 2u_2 + 3u_3 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_3 : u_1 + u_2 + u_3 = 3\}$
5	$u_1 + 3u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : (u_1 - 4)^2 + (u_2 - 2)^2 \leq 1\}$	11	$u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2 - 4u_1 - 5u_2 - 6u_3 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_3 : u_1 + u_3 = 2\}$
6	$u_1^2 - 8u_1 + u_2^2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1^2 + (u_2 - 4)^2 \leq 9\}$	12	$(u_1 - 1)^2 + 10(u_2 - 1)^2 + 100(u_3 - 1)^2 + 1000(u_4 - 1)^2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_4 : -4 \leq u_i \leq 4, i = \overline{1, 4}\}$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим обумовлена складність розв'язування задач умовної оптимізації?
2. Які основні підходи використовують при побудові чисельних методів умовної оптимізації?
3. У чому полягає суть методу проекції градієнта, які рекурентні співвідношення в ньому використовуються?
4. Які правила вибору крокового множника використовуються в методах проекцій градієнта?
5. Для розв'язування яких задач умовної оптимізації доцільно використовувати метод проекції градієнта?
6. За яких умов метод проекції градієнта збігається до розв'язку задачі умовної оптимізації?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10

ТЕМА РОБОТИ: Методи штрафних функцій.

МЕТА РОБОТИ: Ознайомитися з методами багатовимірної оптимізації.
Набути навичок їх практичного застосування.

ТРИВАЛІСТЬ: 2 години.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ [4]

Так як задача визначення мінімуму функції без обмежень є більш легкою, ніж задача визначення мінімуму функції з обмеженнями, то природнім є спроби зведення задач з обмеженнями до задач без обмежень.

Методи штрафних функцій дозволяють звести задачу нелінійного програмування

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u \in U, \quad (11.1)$$

$$U = \left\{ u \in E_n : g_i(u) \leq 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}, \quad (11.2)$$

де функції $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u)$ визначені на U та приймають кінцеві значення, до однієї або послідовності задач безумовної оптимізації деяких допоміжних штрафних функцій. При цьому допоміжна функція підбирається таким чином, що:

1. на більшій частині допустимої множини U задачі (11.1)-(11.2) ця штрафна функція є близькою до нуля;
2. кожна з них достатньо швидко зростає або при наближенні з середини множини U (внутрішні або бар'єрні функції), або при виході за його межі (зовнішня штрафна функція);
3. ступінь наближення штрафу до нуля та швидкість його зростання залежать від значення штрафного параметра і зростають зі збільшенням параметра.

В комбінованих методах, які необхідно застосовувати при обмеженнях-рівностях, в процесі мінімізації одні з обмежень задовольняються, а інші ні. Але коли досягається розв'язок всі умови з заданою точністю задовольняються.

Метод зовнішньої точки. Основна ідея методу зовнішньої точки полягає в такому перетворенні функції $J(u)$, при якому значення перетвореної цільової функції в допустимій області U точно або наближено дорівнюють значенням функції $J(u)$, в той час як значення поза межами множини U дуже великі в порівнянні зі значеннями функції $J(u)$. В цьому випадку мінімум функції $J(u)$ не буде суттєво відрізнятися від мінімуму перетвореної функції.

Визначення 1. Послідовність функцій $\{P(u, r_k)\}, k = 1, 2, \dots$, визначених на множині U , називають штрафною функцією множини U (зовнішньою штрафною функцією), якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(u, r_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u \in U, \\ \infty, & \text{якщо } u \notin U. \end{cases} \quad (11.3)$$

Метод штрафних функцій розв'язання задачі (11.1)-(11.2) полягає в заміні цієї задачі послідовністю задач безумовної оптимізації функцій

$$J_k(u) = J(u) + P(u, r_k). \quad (11.4)$$

При побудові допоміжної функції треба намагатись забезпечити необхідну гладкість, випуклість, зручність обчислення значень функції та її градієнта. Якщо функції $g_i(u), i = \overline{1, m}$, не випуклі, то штрафна функція не буде випуклою на множині U . Тому вона може мати локальні мінімуми, в той час як вважається, що знаходимо глобальний мінімум задачі (11.1) - (11.2). Це порушує збіжність і є суттєвим недоліком методу штрафних функцій в застосуванні до неопуклих задач. В випадку, коли задача (11.1) - (11.2) є задачею випуклого програмування, то штрафна функція теж буде випуклою. Але виникає інша трудність. Для одержання якісного наближення слід r_k вибирати достатньо великим. При цьому градієнт функції $P(u, r_k)$ по u також буде великим, бо він пропорційний r_k . Але показано, що розмір околу, в якому збіжність методу стає понадлінійною, обернено пропорційна сталій Ліпшиця, тобто в даному випадку цей окіл буде настільки малим, що навіть теоретично метод може стати неефективним.

Задача (11.4) розв'язується одним із методів безумовної оптимізації.

Штрафну функцію $P(u, r_k)$ можна будувати різними способами. Наведемо кілька з них:

$$P(u, r_k) = r_k \sum_{i=1}^m [\max \{g_i(u), 0\}]^q, \quad q > 0.$$

При $q=2$ маємо квадратичну функцію.

$$P(u, r_k) = \frac{1}{r_k} \exp \left(r_k \sum_{i=1}^m [\max \{g_i(u), 0\}] \right),$$

$$P(u, r_k) = r_k \max_{i=1, m} [\max \{g_i(u), 0\}].$$

Якщо задача (11.1)-(11.2) містить обмеження-рівності, то штрафну функцію можна вибрати в вигляді:

$$P(u, r_k) = r_k \sum_{i=1}^m (g_i(u))^q, \quad q \geq 1.$$

Алгоритм методу штрафних функцій.

Нехай функції $J(u) \in C^1(U)$ $g_i(u) \in C^1(U)$, $i = \overline{1, m}$.

Покладемо $k=1$, виберемо $\varepsilon > 0$, початкову точку $u_k \in E_n$, штрафний параметр $r_k > 0$ і число $\beta > 1$.

Крок1. При заданій початковій точці розв'яжемо наступну задачу безумовної оптимізації функції

$$J_k(u) = J(u) + P(u, r_k) \rightarrow \min.$$

Покладемо u_{k+1} рівним оптимальному значенню цієї задачі.

Крок2. Якщо $P(u_{k+1}, r_k) \leq \varepsilon$, то зупинитися, інакше $r_k = \beta r_k$, $k=k+1$ та перейти до кроку1.

Алгоритм описаний.

Метод внутрішньої точки (метод бар'єрів). Головним недоліком попереднього методу є те, що u_* апроксимується зовні, тобто різноманітні наближення $u_{1*}, \dots, u_{k*}$, одержані при коефіцієнтах $r_{1*}, \dots, r_{k*}$, не належать множині U . Саме це привело до того, що були запропоновані інші методи штрафу, в яких мінімум апроксимується в межах області U .

Визначення 1. Послідовність функцій $\{B(u, r_k)\}$, $k=1, 2, \dots$, визначених і невід'ємних в усіх внутрішніх точках множини U , називають бар'єрною функцією множини U , якщо $P(u, r_k) \rightarrow \infty$, коли u наближуються до межі множини U .

Прикладами бар'єрної функції множини U можуть бути:

$$B(u, r_k) = \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(u)},$$

$$B(u, r_k) = \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^m \frac{1}{(g_i(u))^2},$$

$$B(u, r_k) = -\frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^m \ln(-g_i(u)).$$

На відміну від методу штрафних функцій, в якості початкового наближення вибирається $u_0 \in U$. Мінімум для методу внутрішньої точки досягається в межах множини U , але не належить її межі для жодного $r_k > 0$. Суттєво для цього методу, щоб $\text{int } U \neq \emptyset$.

Алгоритм методу визначення початкового наближення для методу внутрішніх штрафних функцій.

Нехай функції $J(u) \in C^1(U)$ $g_i(u) \in C^1(U)$, $i = \overline{1, m}$.

Покладемо $k=1$, виберемо $\varepsilon > 0$, початкову точку $u_k \in U$, штрафний параметр $r_k > 0$ і число $\beta > 1$.

Крок1. Покладемо $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Якщо $I = \{i: g_i(u_k) < 0\}$, то зупиняємось, при цьому u_k задовольняє умові $g_i(u_k) < 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$.

Крок2. Використаємо метод бар'єрів для розв'язання наступної задачі при початковій точці u_k :

$$\begin{aligned} g_j(u) &\rightarrow \min, \\ g_i(u) &< 0, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Покладемо u_{k+1} рівним оптимальному значенню задачі (11.5). Якщо $g_j(u_{k+1}) \geq 0$, то зупиняємось, так як множина $\{u \in E_n: g_j(u) < 0, i = \overline{1, m}\}$ є пустою. В протилежному випадку покладемо $k=k+1$ і перейдемо до кроку 1.

Алгоритм описаний.

Алгоритм припинить свою роботу не більше ніж через m ітерацій або повернувшись до точки $u_0 \in U$, яка задовольняє нерівностям $g_j(u) < 0$, $i = \overline{1, m}$, або впевнившись, що таких точок не існує.

Метод Фіакко та Мак-Корміка. Розглянемо задачу

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u \in U, \tag{11.6}$$

$$U = \left\{ u \in E_n : \begin{aligned} &g_i(u) \leq 0, \quad i = \overline{1, s} \\ &g_i(u) = 0, \quad i = \overline{s+1, m} \end{aligned} \right\}, \tag{11.7}$$

де $g_i(u)$, $i = \overline{s+1, m}$, - лінійні функції.

В якості штрафних функцій в комбінованих методах можуть виступати, наприклад, наступні функції:

$$\Phi_k(u) = J(u) + \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^s \frac{1}{-g_i(u)} + \sqrt{r_k} \sum_{i=s+1}^m g_i^2(u),$$

$$\Phi_k(u) = J(u) - \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^m \ln(-g_i(u)) + \sqrt{r_k} \sum_{i=s+1}^m g_i^2(u).$$

Процедура мінімізації функції $\Phi_k(u)$ починається з внутрішньої точки u_0 , в якій всі обмеження в вигляді нерівностей задоволені.

Швидкість збіжності методу залежить від початкового вибору r_0 та способу зміни його значення. Існують різноманітні способи початкового вибору r_0 :

- 1) $r_0 = 1$,
- 2) $r_0 = \frac{J'(u_0)^T R'(u_0)}{\|R'(u_0)\|^2}$, де $R(u_0) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(u_0)}$,
- 3) $r_0 = \left[\frac{J'(u_0)^T [R''(u_0)]^{-1} J'(u_0)}{R'(u_0)^T [R''(u_0)]^{-1} R'(u_0)} \right]^{-1}$.

Щодо вибору подальших значень параметру r , то як показує практика, алгоритм пошуку мінімуму задачі (11.6)-(11.7) методом штрафних функцій буде достатньо ефективним, якщо послідовність $\{r_k\}$ визначається простим співвідношенням $r_{k+1} = \beta r_k$, де $\beta > 1$ є сталою (на практиці часто покладають $\beta = 4$).

Критерієм закінчення ітераційного процесу може виступати наступна умова:

$$\frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^s \frac{1}{g_i(u)} \leq \varepsilon, \text{ де } \varepsilon > 0 - \text{ задана стала величина.}$$

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Для функції, вибраної в наведеного нижче списку, знайдіть оптимальне значення та точку оптимуму одним із методів штрафних функцій (варіант

функції = «номер в списку групи» (якщо «номер...» ≤ 14) або «номер в списку групи»%15+1(якщо «номер...» > 14)).

№	Функція $J(u)$ та множина U	№	Функція $J(u)$ та множина U
1	$u_1 + u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1^2 - u_2 \leq 0, -u_1 \leq 0\}$	8	$-2u_1 + u_1^2 - u_2 + 2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 2u_1 + 3u_2^2 - 6 \leq 0\}$
2	$-u_1 u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 + u_2^2 - 1 \leq 0\}$	9	$4u_1^2 + u_2^2 - 8u_1 - 4u_2 + 1 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1^2 + 5u_2^2 - 2 \leq 0\}$
3	$u_1 - u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 + \sin u_1 - \frac{u_2}{2} \leq 0\}$	10	$u_1^2 + 4u_2^2 - 3u_1 + 1 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1^2 - 2u_2 \leq 0, -2u_1 + u_2 \leq 0\}$
4	$u_2 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : -u_1 \leq 0, u_1^2 - u_2 \leq 0\}$	11	$-u_1 - 3u_1^2 - 1 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 + u_2^2 - 1 \leq 0, -u_1 + 2u_2 \leq 0\}$
5	$\max(u_1, u_2) \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1^2 + u_2^2 - 1 \leq 0\}$	12	$4(u_1 - 4)^2 + (u_2 - 4)^2 \rightarrow \min$ $U = \left\{ u \in E_2 : \begin{array}{l} u_1^2 - 2u_1 - u_2 \leq 0, -u_1 + u_2 - 1 \leq 0, \\ u_1 - u_2 \leq 0 \end{array} \right\}$
6	$u_2^2 - 2u - u_1 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : 10u_1^2 + u_2^2 - 4 \leq 0\}$	13	$u_1^2 + (u_2 + 1)^3 \rightarrow \min$ $U = \left\{ u \in E_2 : \begin{array}{l} -u_1 + u_2 \leq 0, -u_1 - u_2 - 1 \leq 0, \\ u_1 - 3 \leq 0 \end{array} \right\}$
7	$u_1^2 + u_2^2 - 10u_1 - 8u_2 + 3 \rightarrow \min$ $U = \{u \in E_2 : u_1 + 2u_2 - 2 \leq 0, 2u_1 + u_2 - 2 \leq 0\}$	14	$4(u_1 - 1)^3 + (u_2 + 1)^2 \rightarrow \min$ $U = \left\{ u \in E_2 : \begin{array}{l} u_1^2 - 2u_1 - u_2 + 2 \leq 0, -u_1 + u_2 - 2 \leq 0, \\ u_1 - u_2 \leq 0 \end{array} \right\}$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. В чому полягає основна ідея методів штрафних функцій?
2. В чому полягає сутність методу бар'єрних функцій і які бар'єрні функції найчастіше при цьому використовуються?
3. За яких умов послідовні наближення за методом бар'єрних функцій збігаються до розв'язку задачі умовної оптимізації?
4. В чому полягає сутність методу зовнішніх штрафних функцій і які функції штрафу найчастіше при цьому використовуються?

5. За яких умов послідовні наближення за методом зовнішніх штрафних функцій збігаються до розв'язку задачі умовної оптимізації?
6. В чому полягає сутність методу Фіакко та Мак-Корміка і які функції штрафу найчастіше при цьому використовуються?
7. За яких умов послідовні наближення за методом Фіакко та Мак-Корміка збігаються до розв'язку задачі умовної оптимізації?
8. Який зв'язок існує між коефіцієнтами штрафу і множниками Лагранжа для задачі нелінійного програмування?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Згуровський Н. М., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. Київ : Видавнича група ВНУ, 2007, 544 с.
2. Міца О. В., Лавер В. О. Системний аналіз : навч.-метод. посіб. Ужгород : вид-во ПП «АУТДОР - ШАРК», 2021. 63 с.
3. Панкратова Н. Д. Системний аналіз. Теорія та застосування. Київ : Наукова думка, 2018, 347 с.
4. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації. Черкаси: Брама Україна. 2005. 608 с.
5. Пукас А.В. Опорний конспект лекцій з курсу «Системний аналіз». Тернопіль: ТНЕУ, 2020. 108 с.
6. Роїк О. М., Шиян А. А., Нікіфорова Л. О. Системний аналіз. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2015. 83 с.
7. Навчальний посібник з дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів спеціальності 122 – Комп'ютерні науки / Укл.: В. М. Тонконогий, В.О. Вайсман, Л. В. Бовнегра, К. Г. Кіркопуло. Одеса: Нац. ун-т «Одеська політехніка», 2022. 84 с.
8. Прокопенко Т. О. Теорія систем і системний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]; Мво освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси : ЧДТУ, 2019. 139 с.
9. Угрин Д. І., Галочкін О. В., Яцько О. М. Системний аналіз. Навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2022. 242 с.
10. Лавров Є. А., Перхун Л. П., Шендрик В. В. та ін. Математичні методи дослідження операцій : підручник. Суми : Сумський державний університет, 2017. 212 с. ISBN 978-966-657-730-9
11. Григорків В. С., Григорків М. В. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. 400 с.
12. Лук'яненко С. О. Числові методи в інформатиці: Навч. посіб. Київ : Видавництво “Політехнік”, 2007. 140с.
13. Зінов'єва О. Г., Малкіна В. М. Системний аналіз: конспект лекцій. Запоріжжя, 2023. 150 с. URL : <https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0058596.pdf>.(дата звернення 01.09.2025 р.)

Навчально-методичне видання

Лозовська Людмила Іванівна,
Удачина Катерина Олександрівна

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

**Навчально-методичні інструкції
з виконання лабораторних робіт
до вивчення дисципліни для студентів
денної та заочної форм навчання спеціальності
126 – Інформаційні системи та технології**

Експертний висновок склав к. е. н., доцент Л. М. Савчук

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 88 від 16.03.2026)

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка Л. І. Лозовська

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Ум. друк. арк. 4,18. Обл.-вид. арк. 4,24.

Зам. № 19.

Видавець: Український державний університет науки і
технологій вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010