

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Український державний університет  
науки і технологій**

Кафедра «Електрорухомий склад залізниць»

В авторській редакції

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Навчально-методичні рекомендації  
до виконання курсової роботи

Електронне видання

Дніпро

2026

УДК 629.423:62-5(07)

ТЗЗ

Укладачі

*Афанасов Андрій Михайлович*

*Білухін Дмитро Сергійович*

*Арпуль Сергій Вікторович*

Електронне видання

Схалено Групою забезпечення якості освітньої програми

Управління енергетичними та економічними процесами

Протокол № 4 від 24.12.2025

ТЗЗ Теорія автоматичного керування: Навчально-методичні рекомендації до виконання курсової роботи/ уклад.: А. М. Афанасов, Д.С. Білухін, С.В. Арпуль ; Укр. держ. Ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро: УДУНТ, 2025. - 27с.

Курсову роботу присвячено розрахунку характеристик системи автоматичного керування та дослідженню її стійкості.

Методичні вказівки містять вихідні дані до курсової роботи, завдання та рекомендації з виконання всіх розділів роботи.

Іл. 6. Табл. 6. Бібліогр.: 2 назв.

© Афанасов А. М., Білухін Д.С.,  
Арпуль С.В., укладання, 2026

© Український державний університет науки і технологій. ННІ «Дніпровський інститут інфраструктури і транспорту»

## ЗМІСТ

	Стор.
ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ .....	4
Завдання на курсову роботу .....	6
Вихідні дані на курсову роботу .....	7
Порядок виконання курсової роботи .....	8
1 СТРУКТУРНА СХЕМА СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ...	8
2 ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК САК .....	8
2.1 Ланка № 1 .....	8
2.2 Ланка № 2 .....	14
2.3 Ланка № 3 .....	17
3 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ САК .....	18
3.1 Передавальна функція САК у розімкненому стані.....	18
3.2 Частотна передавальна функція розімкненої САК.....	18
3.3 Передавальна функція замкненої САК .....	19
3.4 Частотна передавальна функція замкненої САК .....	19
4 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК.....	20
4.1 Стійкість замкненої САК за критерієм Гурвіца.....	20
4.2 Стійкість замкненої САК за критерієм Михайлова.....	20
4.3 Стійкість замкненої САК за критерієм Найквіста .....	22
4.4 Визначення критичного коефіцієнту передачі САК.....	24
Питання для самоконтролю .....	25
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК .....	26

## ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ

Метою курсової роботи є дослідження системи автоматичного керування (САК) заданої структури шляхом визначення характеристик окремих ланок САК, визначення характеристик САК в розімкненому та замкненому стані, дослідження стійкості САК. Система автоматичного керування складається з трьох типових ланок, робота кожної з яких описується заданим диференціальним рівнянням.

Курсова робота складається з чотирьох частин і виконується за індивідуальними вихідними даними, які визначаються за двоохзначним номером завдання. Номер завдання для студентів денної форми навчання задається викладачем. Номер завдання для студентів безвідривної форми навчання відповідає двом останнім цифрам їхнього навчального шифру.

Курсова робота має на меті закріпити такі очікувані результати навчання: використовувати математичні методи опису САК, визначати часові та частотні характеристики ланок САК, перетворювати функціональні схеми САК, відрізнити типові ланки САК за їхніми характеристиками, визначати сталість САК в замкненому та розімкненому стані, оцінювати якість автоматичного керування, здійснювати синтез систем автоматичного керування.

Пояснювальна записка до курсової роботи має бути надрукована на одній стороні листа паперу формату А4 (210X297). Розміри полів: лівого — 25, правого — 10, верхнього і нижнього — 25 мм. Креслення виконуються олівцем на міліметровій або в надрукованому вигляді з дотриманням існуючих стандартів до позначення елементів електричних схем.

Розрахунки виконуються в послідовності, наведеної в методичних вказівках. На кожному етапі розрахунку вказують його порядковий номер і найменування величини, що розраховується. Потім записується розрахункова формула або, якщо вимагається, дається її вивід. У формулах розшифровуються тільки ті символи і числові коефіцієнти, які не були пояснені на попередніх етапах розрахунку або в початкових даних. Після цього у формулу підставляються числові значення змінних і, опускаючи проміжні обчислення, наводиться результат розрахунку. Розрахунки виконуються з точністю до трьох значущих цифр. У розрахунках використовується міжнародна система одиниць СІ.

Відзначені рецензентом помилки повинні бути виправлені акуратно. Для виправлень потрібно використовувати зворотню (чисту) сторону попереднього листа. Не можна заклеювати або виривати листи з помилковими розрахунками.

Порядок захисту та критерії оцінювання курсової роботи.

Захист курсової роботи відбувається відповідно до встановленого графіку захисту в присутності трьох (двох) членів комісії, що створюється із викладачів кафедри «Електрорухомий склад залізниць» усним розпорядженням завідувача кафедри.

Під час захисту курсової роботи студент відповідає на запитання членів

комісії, що стосуються теоретичної та практичної частини курсу «Теорія автоматичного керування», зокрема й методів та порядку розрахунків курсової роботи. Доповіді повинні бути чіткими та змістовними.

Під час захисту курсової роботи оцінюються: якість виконання курсової роботи, рівень знань і набутих навичок, вміння аналізувати результати розрахунків, логічність і аргументованість викладання думки, вміння відповідати на запитання та обґрунтовувати власну точку зору.

Шкала ЕКТС	Очікуванні результати
А	Здобувач освіти бездоганно виконав та оформив курсову роботу, правильно відповідає на всі запитання, може чітко пояснити та обґрунтувати методику та порядок розрахунків всіх параметрів системи автоматичного керування.
В	Здобувач освіти правильно виконав та оформив курсову роботу, але припускає незначні помилки при відповідях на запитання, що стосуються методики та порядку розрахунків параметрів системи автоматичного керування.
С	Здобувач освіти правильно виконав курсову роботу, але не може правильно відповісти на запитання, що стосуються обґрунтування методики та порядку розрахунків параметрів системи автоматичного керування.
D	Здобувач освіти правильно виконав курсову роботу, але не може чітко розкрити сутність та порядок розрахунків параметрів системи автоматичного керування.
Е	Здобувач освіти правильно виконав курсову роботу, але припускає значні помилки під час відповіді на запитання, що стосуються теоретичного курсу дисципліни.
FX	Здобувач освіти неправильно виконав курсову роботу, та припускає значні помилки під час відповіді на складні запитання, що стосуються теоретичного курсу дисципліни.
F	Здобувач освіти неправильно виконав та оформив курсову роботу та не може відповісти на прості запитання, що стосуються методики виконання курсової роботи.

## ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ

- 1 Скласти структурну схему САК.
- 2 Визначити характеристики ланок САК:
  - передавальні функції;
  - перехідні характеристики;
  - імпульсні характеристики;
  - частотні характеристики.
- 3 Визначити передавальні функції САК у розімкненому та замкненому стані:
  - передавальну функцію розімкненої САК;
  - частотну передавальну функцію розімкненої САК;
  - передавальну функцію замкненої САК;
  - частотну передавальну функцію замкненої САК.
- 4 Провести дослідження замкненої САК на стійкість:
  - за критерієм Гурвіца;
  - за критерієм Михайлова;
  - за критерієм Найквіста.
- 5 Перелік графічних робіт:
  - структурна схема САК;
  - перехідні характеристики ланок 1 та 2;
  - імпульсні характеристики ланок 1 та 2;
  - амплітудні частотні характеристики ланок 1 та 2;
  - фазові частотні характеристики ланок 1 та 2;
  - амплітудно-фазові частотні характеристики ланок 1 та 2;
  - годограф Михайлова для замкненої САК;
  - амплітудно-фазова частотна характеристика розімкненої САК.

# ВИХІДНІ ДАНІ НА КУРСОВУ РОБОТУ

## ЗАГАЛЬНІ ВИХІДНІ ДАНІ

Структурна схема САК наведена на рис. 1.

Загальний вид диференційних рівнянь, що описують стан окремих ланок системи автоматичного керування:

$$T_0^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + T_1 \frac{dz}{dt} + z = k_1 y; \quad (\text{ланка 1})$$

$$T_2 \frac{du}{dt} + u = k_2 z; \quad (\text{ланка 2})$$

$$x = k_3 u. \quad (\text{ланка 3})$$

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ВИХІДНІ ДАНІ

Коефіцієнти передачі ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ) та постійні часу ( $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ) для окремих ланок САК обираються за двозначним номером завдання з таблиць, які наведено нижче.

Параметр	Передостання цифра номеру завдання									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$T_0$ , мс	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$k_1$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$k_2$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9

Параметр	Остання цифра номеру завдання									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$T_1$ , мс	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$T_2$ , мс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_3$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8

# ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

## 1 СТРУКТУРНА СХЕМА СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Структурна схема системи автоматичного керування (САК) наведена на рис. 1. Дана система – замкнена, з негативним зворотнім зв'язком, має три ланки з передаточними функціями:  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$ ,  $W_3(p)$ .

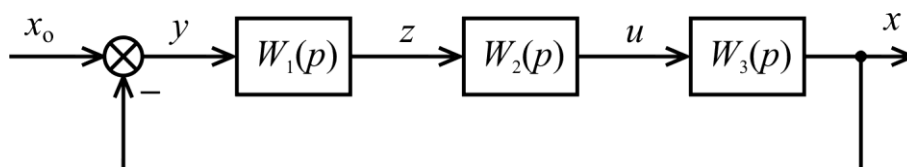


Рис. 1. Структурна схема САК

Управляючою координатою є  $x_0$ , той, що управляється –  $x$ . Проміжні сигнали пов'язані між собою рівняннями:

$$y = x_0 - x;$$

$$z(p) = W_1(p) \cdot y(p);$$

$$u(p) = W_2(p) \cdot z(p);$$

$$x(p) = W_3(p) \cdot u(p).$$

САК здійснює автоматичне регулювання за відхиленням. Величина  $y$  є помилкою регулювання (відхиленням).

## 2 ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК САК

### 2.1 Ланка № 1

Дана ланка описується диференціальним рівнянням [1]

$$T_0^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + T_1 \frac{dz}{dt} + z = k_1 y,$$

де  $y$  і  $z$  – вхідний та вихідний сигнали відповідно;

$T_0$ ,  $T_1$  – постійні часу;

$k_1$  – коефіцієнт передачі.

Запишемо дане рівняння в операторній формі

$$T_0^2 \cdot p^2 \cdot z(p) + T_1 \cdot p \cdot z(p) + z(p) = k_1 \cdot y(p).$$

Знайдемо передавальну функцію ланки у вигляді:

$$W_1(p) = \frac{z(p)}{y(p)};$$

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_0^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

Дана ланка є інерційною ланкою другого порядку.

Характеристичний поліном ланки має вигляд

$$d_1(p) = T_0^2 p^2 + T_1 p + 1.$$

Характеристичне рівняння

$$T_0^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0.$$

Знайдемо корні характеристичного рівняння:

$$p_1 = \frac{-T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_0^2}}{2T_0^2};$$

$$p_2 = \frac{-T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_0^2}}{2T_0^2}.$$

Якщо корні  $p_1$  і  $p_2$  характеристичного рівняння дійсні, то дана ланка є аперіодичною, якщо корні  $p_1$  і  $p_2$  комплексні, дана ланка є коливальною. Для коливальної ланки корні  $p_1$  і  $p_2$  мають вигляд

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta.$$

Знаходимо перехідну функцію ланки  $h_1(t)$ , підставивши у рівняння її стану значення вхідного сигналу  $y = 1$ .

$$T_0^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + T_1 \frac{dz}{dt} + z = k_1.$$

Для аперіодичної ланки другого порядку перехідна функція має вигляд

$$h_1(t) = k_1 \left[ \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} + 1 \right].$$

Імпульсна функція аперіодичної ланки другого порядку

$$v_1(t) = \frac{dh_1}{dt} = \frac{k_1 p_1 p_2}{p_1 - p_2} [e^{p_1 t} - e^{p_2 t}].$$

Для коливальної ланки перехідна функція має вигляд:

$$h_1(t) = k_1 \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \varphi_0) \right];$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

Імпульсна функція коливальної ланки

$$v_1(t) = \frac{dh_1}{dt} = \frac{k_1 (\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t.$$

Коефіцієнт демпфірування ланки

$$n = \frac{T_1}{2T_0}.$$

Задаючись значенням  $t$ , розраховуємо величини  $h_1(t)$  і  $v_1(t)$ . Результати розрахунку зводимо в таблицю 1.

Таблиця 1

$t, c$							
$h_1$							
$v_1$							

За даними таблиці 1 будуюмо характеристики  $h_1(t)$  і  $v_1(t)$ .

Частотну передавальну функцію ланки  $W_1(j\omega)$  отримаємо, виконавши у виразі для  $W_1(p)$  заміну  $p = j\omega$ , підставивши у вираз для її передавальної функції  $p = j\omega$ .

$$W_1(j\omega) = \frac{k_1}{-T_0^2 \omega^2 + jT_1 \omega + 1}.$$

Дійсна частотна функція ланки

$$U_1(\omega) = \frac{k_1 (1 - T_0^2 \omega^2)}{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Уявна частотна функція ланки

$$V_1(\omega) = -\frac{k_1 T_1 \omega}{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Амплітудна частотна функція ланки

$$A_1(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Логарифмічна амплітудна частотна функція ланки

$$L_1(\omega) = 20 \lg A_1(\omega).$$

Фазова частотна функція ланки

$$\varphi_1(\omega) = -\arccos \frac{1 - T_0^2 \omega^2}{\sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Задаючись значенням  $\omega$ , розраховуємо величини  $U_1(\omega)$ ,  $V_1(\omega)$ ,  $A_1(\omega)$ ,  $L_1(\omega)$ ,  $\varphi_1(\omega)$ . Результати розрахунку зводимо в таблицю 2. За даними таблиці 2 будемо амплітудну, фазову та амплітудно-фазову частотні характеристики ланки 1.

Таблиця 2

$\omega, 1/c$								
$U_1$								
$V_1$								
$A_1$								
$L_1$								
$\varphi_1, ^\circ$								

Загальний вигляд характеристик аперіодичної ланки другого порядку наведено на рис. 2, а коливальної ланки – на рис. 3.

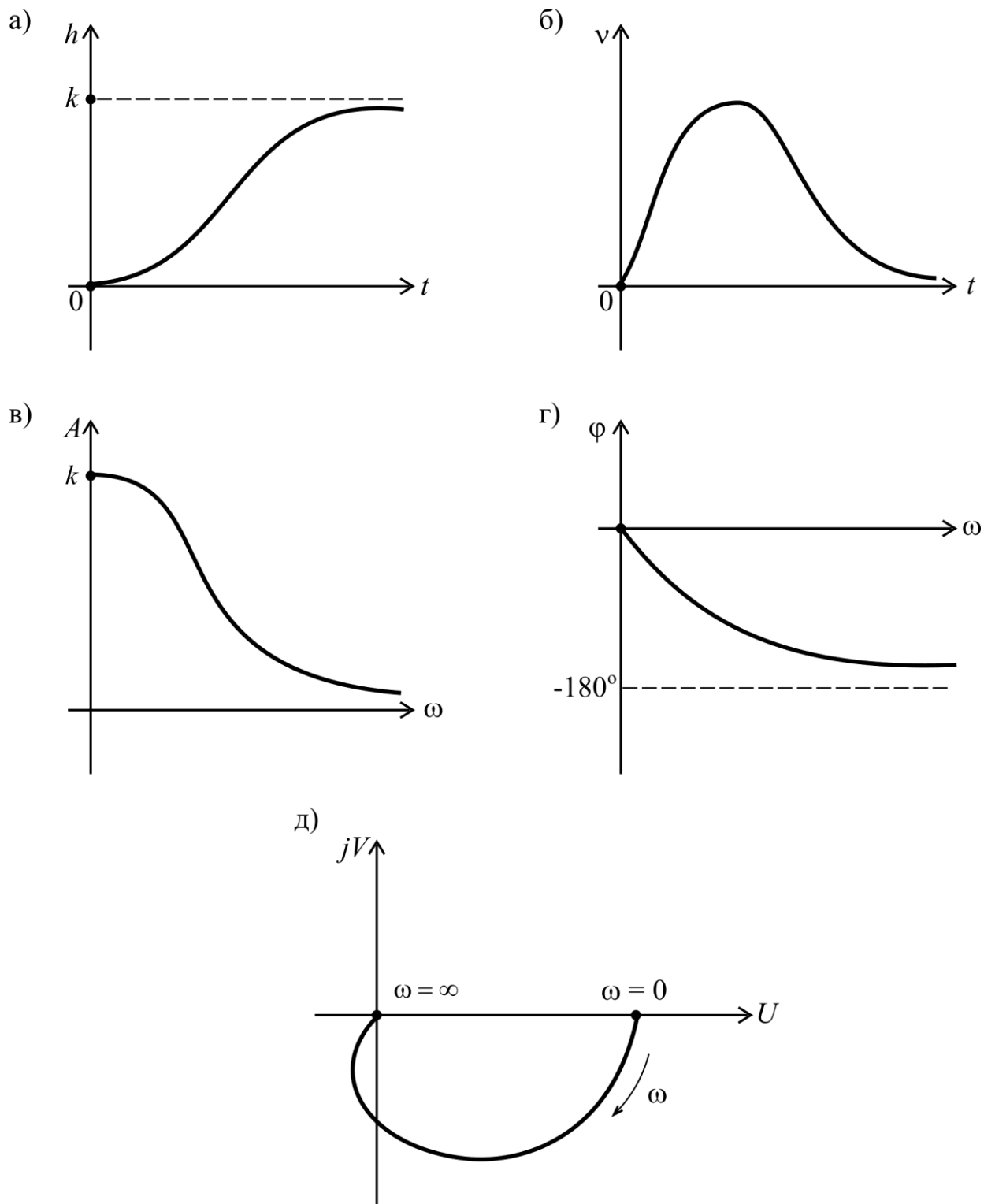


Рис. 2. Характеристики аперіодичної ланки другого порядку:  
 а) перехідна характеристика; б) імпульсна характеристика;  
 в) амплітудна частотна характеристика; г) фазова частотна характеристика;  
 д) амплітудно-фазова частотна характеристика [1]

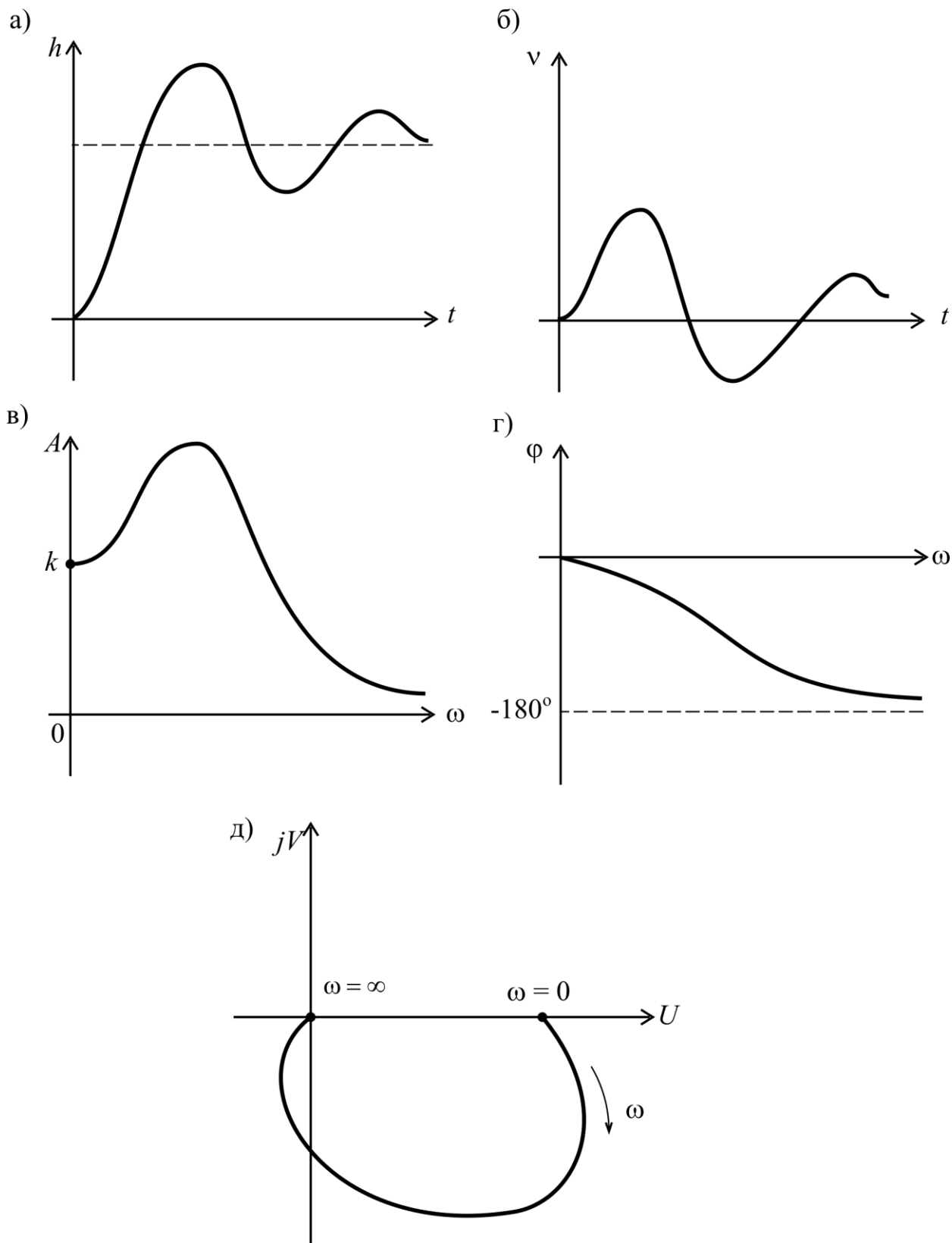


Рис. 3. Характеристики коливальної ланки:  
 а) перехідна характеристика; б) імпульсна характеристика;  
 в) амплітудна частотна характеристика; г) фазова частотна характеристика;  
 д) амплітудно-фазова частотна характеристика [1]

## 2.2 Ланка № 2

Дана ланка описується диференціальним рівнянням [1]

$$T_2 \frac{du}{dt} + u = k_2 z,$$

де  $z$  і  $u$  – вхідний та вихідний сигнали відповідно;

$T_2$  – постійна часу;

$k_2$  – коефіцієнт передачі.

Запишемо дане рівняння в операторній формі

$$T_2 p u(p) + u(p) = k_2 z(p).$$

Знайдемо передавальну функцію ланки у вигляді

$$W_2(p) = \frac{u(p)}{z(p)} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

Дана ланка є аперіодичною ланкою першого порядку.

Знайдемо перехідну функцію ланки  $h_2(t)$ , підставивши у рівняння її стану значення вхідного сигналу  $z = 1$ .

$$T_2 \frac{du}{dt} + u = k_2.$$

Перехідна функція аперіодичної ланки першого порядку має вигляд

$$h_2(t) = k_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Імпульсна функція аперіодичної ланки першого порядку

$$v_2(t) = \frac{dh_2}{dt} = \frac{k_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Задаючись значеннями  $t$ , розраховуємо величини  $h_2(t)$  і  $v_2(t)$ . Результати розрахунку зводимо в таблицю 3.

Таблиця 3

$t, \text{с}$							
$h_2$							
$v_2$							

За даними таблиці 3 будемо характеристики  $h_2(t)$  і  $v_2(t)$ .

Частотну передавальну функцію ланки  $W_2(j\omega)$  отримаємо, виконавши у виразі для  $W_2(p)$  заміну  $p = j\omega$ .

$$W_2(j\omega) = \frac{k_2}{1 + j\omega T_2}.$$

Дійсна частотна функція ланки

$$U_2(\omega) = \frac{k_2}{1 + T_2^2 \omega^2}.$$

Уявна частотна функція ланки

$$V_2(\omega) = -\frac{k_2 T_2 \omega}{1 + T_2^2 \omega^2}.$$

Амплітудна частотна функція ланки

$$A_2(\omega) = \frac{k_2}{\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}.$$

Логарифмічна амплітудна частотна функція ланки

$$L_2(\omega) = 20 \lg A_2(\omega).$$

Фазова частотна функція ланки

$$\varphi_2(\omega) = -\arctg T_2 \omega.$$

Задаючись значенням  $\omega$ , розраховуємо величини  $U_2(\omega)$ ,  $V_2(\omega)$ ,  $A_2(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $\varphi_2(\omega)$ . Результати розрахунку зводимо в таблицю 4. За даними таблиці 4 будуємо амплітудну, фазову та амплітудно-фазову частотні характеристики ланки 2.

Таблиця 4

$\omega, 1/c$								
$U_2$								
$V_2$								
$A_2$								
$L_2$								
$\varphi_2, ^\circ$								

Загальний вигляд характеристик аперіодичної ланки першого порядку наведено на рис. 4.

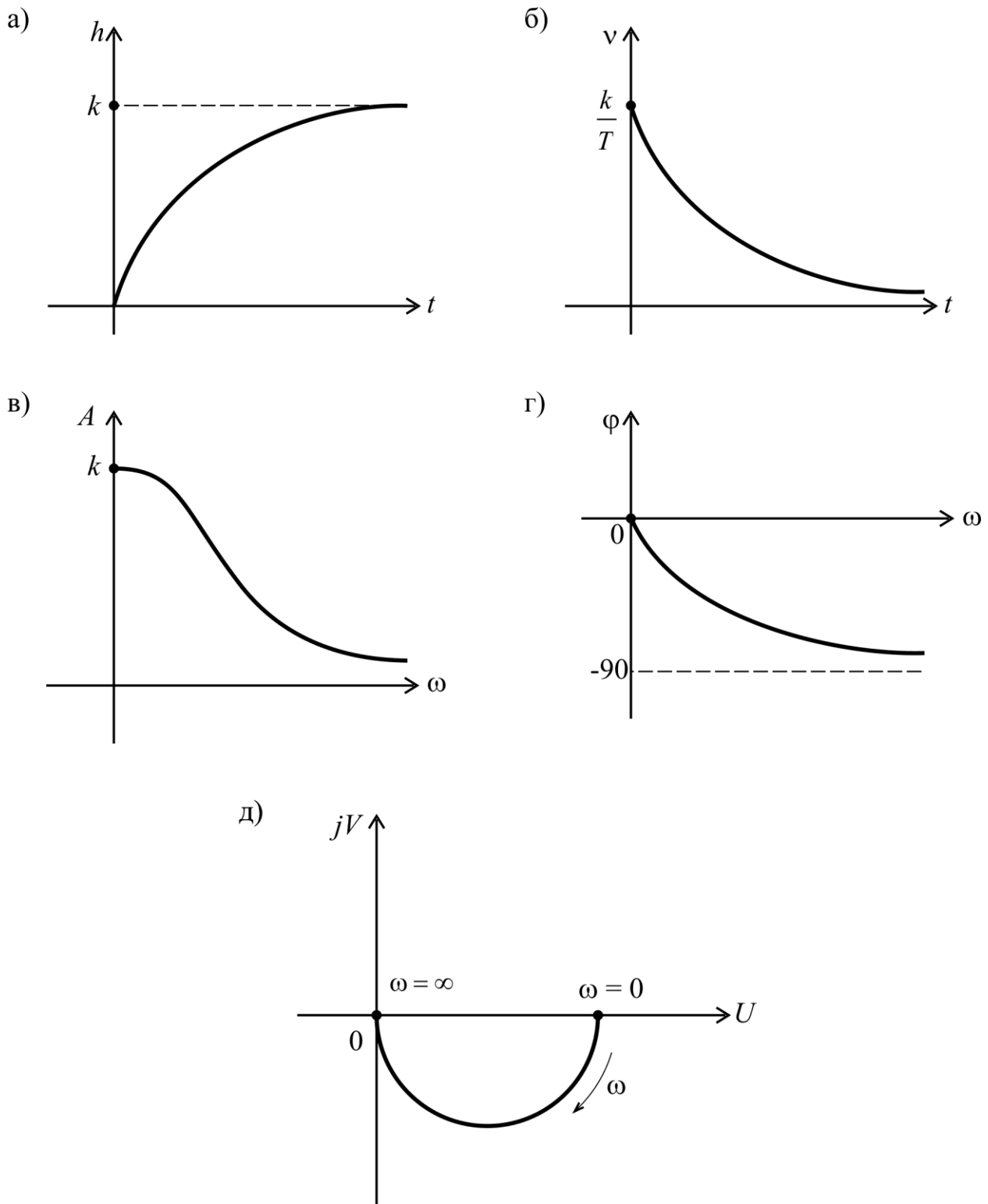


Рис. 4. Характеристики аперіодичної ланки першого порядку:  
а) перехідна характеристика; б) імпульсна характеристика;  
в) амплітудна частотна характеристика; г) фазова частотна характеристика;  
д) амплітудно-фазова частотна характеристика [1]

### 2.3 Ланка № 3

Дана ланка описується рівнянням [1]

$$x = k_3 u,$$

де  $u$  і  $x$  – вхідний та вихідний сигнали відповідно;  
 $k_3$  – коефіцієнт передачі.

Передавальна функція ланки

$$W_3(p) = \frac{x(p)}{u(p)} = k_3.$$

Дана ланка є пропорційною.

Знайдемо перехідну функцію ланки  $h_3(t)$ , підставивши у рівняння її стану значення вхідного сигналу  $u = 1$ .

$$x = k_3.$$

Перехідна функція пропорційної ланки має вигляд

$$h_3(t) = k_3.$$

Імпульсна функція пропорційної ланки

$$v_3(t) = k_3 \cdot \delta(t),$$

де  $\delta(t)$  – дельта-функція.

Частотні характеристики пропорційної ланки знайдемо у вигляді:

$$W_3(j\omega) = k_3;$$

$$U_3(\omega) = k_3;$$

$$V_3(\omega) = 0;$$

$$A_3(\omega) = k_3;$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg k_3;$$

$$\varphi_3(\omega) = 0.$$

### 3 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ САК

#### 3.1 Передавальна функція САК у розімкненому стані

Задана система автоматичного керування є замкненою із негативним зворотним зв'язком. Якщо розірвати зворотний зв'язок, отримаємо розімкнену систему з трьома послідовно з'єднаними ланками. Передавальна функція САК у розімкненому стані [1]

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p).$$

Підставивши у дане рівняння вирази для передавальних функцій окремих ланок, отримаємо

$$W(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}.$$

Після ряду перетворювань та замін отримаємо

$$W(p) = \frac{k}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1},$$

де  $k$  – загальний коефіцієнт передачі;

$a_0, a_1, a_2$  – коефіцієнти характеристичного полінома.

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3;$$

$$a_0 = T_0^2 \cdot T_2;$$

$$a_1 = T_0^2 + T_1 \cdot T_2;$$

$$a_2 = T_1 + T_2.$$

Підставимо значення  $k, a_0, a_1$  і  $a_2$  у вираз для  $W(p)$ , це і буде передавальна функція розімкненої САК.

#### 3.2 Частотна передавальна функція розімкненої САК

Частотну передавальну функцію САК у розімкненому стані отримаємо, виконавши у виразі для  $W(p)$  заміну  $p = j\omega$ .

$$W(j\omega) = \frac{k}{a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 \cdot j\omega + 1}.$$

Виконаємо перетворення та отримаємо цей вираз у вигляді

$$W(j\omega) = \frac{k}{N(\omega) + jM(\omega)},$$

де  $N(\omega) = 1 - a_1\omega^2$ ;

$$M(\omega) = -a_0\omega^3 + a_2\omega.$$

Підставимо значення  $k$  та вирази для  $N(\omega)$ ,  $M(\omega)$  у формулу для  $W(j\omega)$ , це і буде частотна передавальна функція розімкненої САК.

### 3.3 Передавальна функція замкненої САК

Передавальна функція замкненої САК може бути знайдена за формулою

$$\bar{W}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

Підставивши у дану формулу вираз для  $W(p)$ , отримаємо у загальному вигляді

$$\bar{W}(p) = \frac{k}{a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3},$$

де  $a_3 = k + 1$ .

Підставимо значення  $k$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$  у вираз для  $\bar{W}(p)$ , це і буде передавальна функція замкненої САК.

### 3.4 Частотна передавальна функція замкненої САК

Частотну передавальну функцію САК у замкнутому стані отримаємо, виконавши у виразі для  $\bar{W}(p)$  заміну  $p = j\omega$ .

Частотна передавальна функція замкненої САК має вигляд

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{k}{\bar{N}(\omega) + j\bar{M}(\omega)},$$

де  $\bar{N}(\omega) = -a_1\omega^2 + a_3$ ;

$$\bar{M}(\omega) = M(\omega).$$

Підставимо значення  $k$  та вирази для  $\bar{N}(\omega)$ ,  $\bar{M}(\omega)$  у формулу для  $\bar{W}(j\omega)$ , це і буде частотна передавальна функція замкненої САК.

## 4 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК

### 4.1 Стійкість замкненої САК за критерієм Гурвіца

Характеристичний поліном замкненої САК має вигляд [1,2]

$$\bar{D}(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3.$$

Характеристичне рівняння

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для характеристичного рівняння третього порядку умови стійкості:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Так як  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$  позитивні, стійкість САК визначається нерівністю

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

При дотриманні даної умови САК стійка, якщо умова не виконується, САК нестійка.

### 4.2 Стійкість замкненої САК за критерієм Михайлова

Комплексний характеристичний поліном замкненої САК [1,2]

$$\bar{D}(j\omega) = \bar{N}(\omega) + j\bar{M}(\omega),$$

де

$$\bar{N}(\omega) = -a_1 \omega^2 + a_3;$$

$$\bar{M}(\omega) = -a_0 \omega^3 + a_2 \omega.$$

Для спрощення побудови кривої Михайлова знайдемо точки її перетину з дійсною і уявною осями. Для цього вирішимо рівняння:

$$\bar{M}(\omega) = 0;$$

$$\bar{N}(\omega) = 0.$$

Знайдемо точки перетину кривої Михайлова з дійсною віссю

$$-a_0 \omega^3 + a_2 \omega = 0.$$

Маємо два кореня:

$$\omega_0 = 0;$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}.$$

Знайдемо точки перетину кривої Михайлова з уявною віссю

$$-a_1\omega^2 + a_3 = 0.$$

Маємо один корінь

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

Задамося рядом значень  $\omega$  (у тому числі  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ ) і визначимо дійсну і уявну частини  $\bar{D}(j\omega)$ . Результати розрахунку  $\bar{N}(\omega)$  і  $\bar{M}(\omega)$  заносимо в таблицю 5.

Таблиця 5

$\omega, 1/\text{с}$							
$\bar{N}(\omega)$							
$\bar{M}(\omega)$							

За даними таблиці будуємо годограф Михайлова. Якщо крива Михайлова при змінні частоти  $\omega$  від нуля до  $\infty$ , починаючись при  $\omega = 0$  на дійсній позитивній осі, обходить проти годинникової стрілки послідовно  $n$  квадрантів координатної площини, де  $n$  – порядок характеристичного поліному, то САК стійка.

Загальний вигляд кривої Михайлова для стійкої САК з характеристичним поліномом третього порядку наведено на рис. 5.

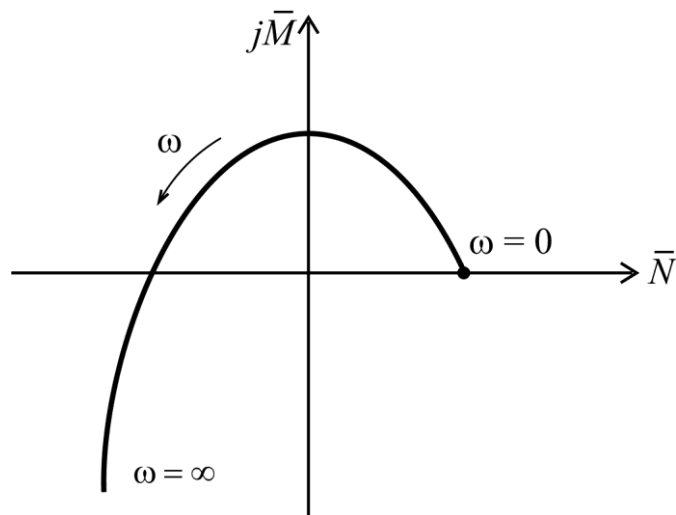


Рис. 5. Годограф Михайлова

### 4.3 Стійкість замкненої САК за критерієм Найквіста

Попередньо визначимо стійкість розімкненої САК за критерієм Гурвіца. Характеристичне рівняння для розімкненої САК має вигляд [1,2]

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1 = 0.$$

Для характеристичного рівняння третього порядку умови стійкості:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 a_2 - a_0 > 0.$$

Так як  $a_0$ ,  $a_1$  і  $a_2$  позитивні, стійкість розімкненої САК визначається нерівністю

$$a_1 a_2 - a_0 > 0.$$

При дотриманні даної умови САК стійка.

Знайдемо амплітудно-фазну частотну характеристику (АФЧХ) розімкненої САК. Помноживши чисельник і знаменник виразу для  $W(j\omega)$  на сполучений множник  $N(\omega) - jM(\omega)$  та розділивши дійсну і уявну частини, отримаємо

$$W(j\omega) = \frac{kN(\omega)}{N^2(\omega) + M^2(\omega)} + j \frac{-kM(\omega)}{N^2(\omega) + M^2(\omega)}.$$

Для зручності введемо нові позначення

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де  $P(\omega)$  та  $Q(\omega)$  – дійсна і уявна частини АФЧХ відповідно.

$$P(\omega) = \frac{kN(\omega)}{N^2(\omega) + M^2(\omega)} = \frac{k(1 - a_1\omega^2)}{(1 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2};$$

$$Q(\omega) = -\frac{kM(\omega)}{N^2(\omega) + M^2(\omega)} = -\frac{k(a_2\omega - a_0\omega^3)}{(1 - a_1\omega^2)^2 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2}.$$

Визначимо частоти, при яких АФЧХ перетинає дійсну та уявну вісі з умов:  $Q(\omega) = 0$ ;  $P(\omega) = 0$ .

Знайдемо точки перетину АФЧХ з дійсною віссю

$$a_2\omega - a_0\omega^3 = 0.$$

Маємо два кореня:

$$\omega_0 = 0;$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}.$$

Знайдемо точки перетину АФЧХ з уявною віссю

$$1 - a_1\omega^2 = 0.$$

Маємо один корінь

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{a_1}}.$$

Задамося рядом значень  $\omega$  (у тому числі  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) і визначимо дійсну і уявну частини  $W(j\omega)$ . Результати розрахунку  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$  заносимо в таблицю 6. За даними таблиці 6 будемо АФЧХ розімкненої САК та за критерієм Найквіста визначаємо її стійкість.

Таблиця 6

$\omega, 1/c$							
$P(\omega)$							
$Q(\omega)$							

Якщо САК в розімкненому стані стійка, то замкнена САК буде стійка при умові, що годограф АФЧХ розімкненої САК не охоплює точку  $(-1; 0)$ .

На рис. 6 наведено загальний вигляд АФЧХ стійкої розімкненої САК, яка буде стійка і у замкнутому стані.

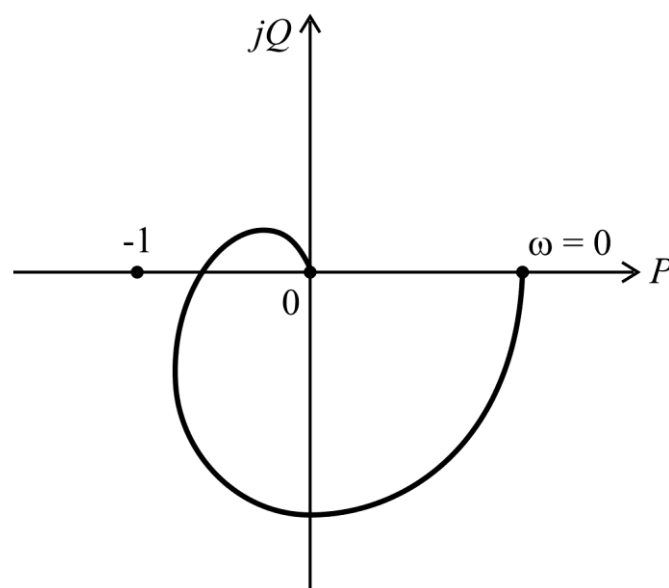


Рис. 6. АФЧХ розімкненої САК

#### 4.4 Визначення критичного коефіцієнту передачі САК

Значення критичного коефіцієнту передачі САК знайдемо, використовуючи критерій стійкості Гурвіца, з умови [1,2]

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$$

або

$$a_1 a_2 = a_0 a_3.$$

Підставивши у дану рівність вирази для  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_0$  та  $a_3$ , отримаємо рівняння

$$(T_0^2 + T_1 \cdot T_2) \cdot (T_1 + T_2) = T_0^2 \cdot T_2 (k_{кр} + 1).$$

Вирішивши дане рівняння відносно  $k_{кр}$ , остаточно отримаємо вираз

$$k_{кр} = \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1^2}{T_0^2} + \frac{T_1 \cdot T_2}{T_0^2}.$$

При  $k < k_{кр}$ , САК стійка. При  $k > k_{кр}$ , САК нестійка.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке передаточна функція ланки?
2. Назвіть основні типові ланки САК.
3. Напишіть вирази передаточних функцій основних типових ланок.
4. Назвіть часові характеристики ланок САК.
5. Викладіть методику побудови перехідної характеристики ланки.
6. Викладіть методику побудови імпульсної характеристики ланки.
7. Наведіть приклади часових характеристик типових ланок.
8. Назвіть частотні характеристики ланок САК.
9. Що таке амплітудна частотна характеристика ланки?
10. Викладіть методику побудови амплітудної частотної характеристики ланки.
11. Що таке фазова частотна характеристика ланки?
12. Викладіть методику побудови фазової частотної характеристики ланки.
13. Що таке амплітудно-фазова частотна характеристика ланки?
14. Викладіть методику побудови амплітудно-фазової частотної характеристики ланки.
15. Від чого залежать динамічні властивості ланок другого порядку?
16. Наведіть приклади частотних характеристик типових ланок.
17. Сформулюйте поняття стійкості САК.
18. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.
19. Викладіть методику побудови годографа Михайлова.
20. Як визначити стійкість САК за критерієм Михайлова?
21. Сформулюйте загальну умову стійкості за методом Найквіста.
22. Сформулюйте умови знаходження САК на межі стійкості.
23. Що таке критичний коефіцієнт передачі САК?
24. Як визначити критичний коефіцієнт передачі САК?

## **БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК**

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 2007. – 655 с.\*
2. Гоголюк П.Ф. Теорія автоматичного керування: навч. посіб. / П.Ф. Гоголюк, Т.М. Гречин. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2009. – 280 с.\*

Примітка: \* остання редакція видання

Навчально-методичне видання

*Афанасов Андрій Михайлович*

*Білухін Дмитро Сергійович*

*Арпуль Сергій Вікторович*

## **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Навчально-методичні рекомендації до виконання курсової роботи  
для студентів денної та заочної форми навчання

Електронне видання

Експертний висновок склав доц. каф. канд. тех. наук Олексій Куроп'ятник

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.852 від 24.12.2025)

В авторській редакції  
Комп'ютерна верстка С. О. Афанасов

Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Ум. друк. арк.1,58. Обл.-вид. арк.1,56.  
Зам. № 2

Видавець: Український державний університет науки і технологій  
вул. Лазаряна, 2, ауд. 1201, м. Дніпро, 49010.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

Адреса видавця та дільниці оперативної поліграфії:  
вул. Лазаряна, 2, Дніпро, 49010