

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З НЕНАДІЙНИМИ ОБСЛУГОВУЮЧИМИ ПРИЛАДАМИ В ПЕРЕХІДНОМУ РЕЖИМІ

Розглядається система масового обслуговування з необмеженою чергою і ненадійними обслуговуючими приладами. Запропонована методика розрахунку ймовірностей станів такої системи.

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченной очередью и ненадежными обслуживающими приборами. Предложена методика расчета вероятностей состояний такой системы.

A queuing system with unlimited line and unreliable service devices is considered. A computational technique of probabilities of stats of the system has been proposed.

Математичні моделі масового обслуговування широко використовуються при дослідженні багатьох технічних систем, зокрема, транспортних систем, для підвищення їх ефективності.

Є величезна кількість публікацій на цю тему. Найбільш вивченими є математичні моделі систем масового обслуговування, які описуються в рамках одновимірних марковських процесів. Це так звані класичні системи масового обслуговування (з відмовами, з обмеженою та необмеженою чергою, замкнені, з пріоритетами та інші).

Так, добре вивчена в перехідному та стаціонарному режимах система масового обслуговування з необмеженою чергою, в яку надходить найпростіший потік заявок, а час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом. Інтенсивність вхідного потоку та інтенсивність обслуговування в такій системі не залежать від часу, заявки в систему надходять по одній (найпростіший потік заявок є ординарним) [1].

Математична модель цієї системи потім узагальнювалась в різних напрямках. Була запропонована і досліджена модель з неординарним пуассонівським потоком, модель, що неоднорідна за часом, тобто інтенсивність вхідного потоку та обслуговування є функціями часу та інші узагальнення. Причому, як правило, в математичних моделях цієї системи можливий вихід з ладу обслуговуючих приладів протягом роботи системи не враховувався. Врахування надійності обслуговуючих приладів та їх відновлення у разі виходу з ладу суттєво ускладнює математичні моделі. Для системи масового обслуговування з необмеженою чергою і дисципліною черги «першим прийшов – перший об-

служений» врахування перелічених факторів вперше було здійснено в роботі [2]. Процес обслуговування був представлений як двохвимірний марковський процес, одна компонента якого в кожен момент часу співпадає з числом вимог в системі (в черзі та на обслуговування), а друга – з числом приладів, що вийшли з ладу. На основі результатів цієї роботи в даній статті пропонується методика чисельного розрахунку ймовірностей станів системи масового обслуговування в перехідному режимі. Розроблена методика дозволяє наближено розраховувати час, через який в системі встановлюється стаціонарний режим роботи, якщо такий режим для досліджуваної системи з заданими певними значеннями параметрів існує.

Розглянемо процес $\{\eta_t, \xi_t\}, t \geq 0$, де η_t – число несправних приладів в момент часу t , ξ_t – число заявок, які знаходяться в системі в момент часу t ,

$$\eta_t \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \xi_t \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

де n – загальна кількість обслуговуючих приладів в системі обслуговування.

Припускається, що в систему масового обслуговування надходить неординарний пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ ,

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty,$$

де λ_k – інтенсивність надходження групи з k заявок.

Ймовірності переходу процесу $\{\eta_t, \xi_t\}$ за час $\Delta (\Delta \rightarrow 0)$ задаються наступним чином:

$$(m, r) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} (m, r) : 1 - (\lambda + \min(r, n - m) \times \\ \times (\mu + \nu) + m\varepsilon)\Delta + o(\Delta), \\ (m, r + k) : \lambda_k \Delta + o(\Delta), \\ \quad k \geq 1, \\ (m, r - 1) : \min(r, n - m) \times \\ \times \mu \Delta + o(\Delta), \\ (m + 1, r) : \min(r, n - m) \times \\ \times \nu \Delta + o(\Delta), \\ (m - 1, r) : m\varepsilon \Delta + o(\Delta), \end{cases}$$

де $m = 0, 1, \dots, n; r = 0, 1, 2, \dots$, – ймовірності інших переходів порядку $o(\Delta)$

$$\left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = o \right).$$

Тут ν – інтенсивність виходу з ладу одного приладу, μ – інтенсивність обслуговування однієї заявки одним приладом, ε – інтенсивність відновлення одного приладу у разі його виходу з ладу.

Процес $\{\eta_t, \xi_t\}$ – двовимірний марковський процес.

Якщо ймовірності станів такого процесу позначити

$$P_{m,r}(t) = P\{\eta_t = m, \xi_t = r\},$$

то можна показати, що система диференціальних рівнянь Колмогорова для такої системи має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{m,r}(t)}{dt} = & -[\lambda + m\varepsilon + \min(r, n - m)\mu + \\ & + \min(r, n - m)\nu]P_{m,r}(t) + \min(r, n - m) \times \\ & \times \nu P_{m-1,r}(t) + (m + 1)\varepsilon P_{m+1,r}(t) + \\ & + \min(r + 1, n - m)P_{m,r+1}(t) + \sum_{i=1}^r P_{m,r-i}(t)\lambda_i, \\ (m = 0, 1, \dots, n - 1; \quad r = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dP_{n,0}(t)}{dt} = -(\lambda + n\varepsilon)P_{n,0}(t), \\ \dots \\ \frac{dP_{n,r}(t)}{dt} = -(\lambda + n\varepsilon)P_{n,r}(t) + \sum_{i=1}^r P_{n,r-i}(t)\lambda_i, \\ r = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь нескінченна. Щоб скористатись теорією звичай-

них диференціальних рівнянь, цю нескінченну систему диференціальних рівнянь можна за допомогою твірних функцій звести до скінченної системи диференціальних рівнянь:

$$\varphi_m(t, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{m,r}(t)\theta^r, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$\frac{\partial \varphi_0(t, \theta)}{\partial t} = q_0(\theta)\varphi_0(t, \theta) + \varepsilon\varphi_1(t, \theta) + f_0(t, \theta),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(t, \theta)}{\partial \theta} = n\nu\varphi_0(t, \theta) + q_1(\theta)\varphi_1(\theta) +$$

$$+ 2\varepsilon\varphi_2(t, \theta) + f_1(t, \theta),$$

...

$$\frac{\partial \varphi_n(t, \theta)}{\partial t} = \nu\varphi_{n-1}(t, \theta) + q_n(\theta)\varphi_n(t, \theta) + f_n(t, \theta) \quad (1)$$

де

$$q_m(\theta) = \lambda(\theta) + \frac{\mu}{\theta}(n - m) - (\lambda + m\varepsilon) - (n - m)(\nu + \mu),$$

$$f_m(t, \theta) = \left(\frac{\mu}{\theta} - \mu - \nu \right) \sum_{r=0}^{n-m-1} (r - n + m) \times$$

$$\times P_{m,r}(t)\theta^r + \nu \sum_{r=0}^{n-m} (r - n + m - 1) \times P_{m-1,r}(t)\theta^r,$$

$$m = 0, 1, \dots, n, \quad \lambda(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \theta^r.$$

$$\text{Покладаємо } \sum_{r=0}^{-1} r P_{m,r}(t)\theta^r \equiv 0.$$

У векторно-матричному вигляді остання система запишеться наступним чином:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(t, \theta)}{\partial t} = Q(\theta)\bar{\varphi}(t, \theta) + \bar{f}(t, \theta) \quad (1')$$

$$\text{де } \bar{\varphi}(t, \theta) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t, \theta) \\ \varphi_1(t, \theta) \\ \dots \\ \varphi_n(t, \theta) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(t, \theta) = \begin{pmatrix} f_0(t, \theta) \\ f_1(t, \theta) \\ \dots \\ f_n(t, \theta) \end{pmatrix},$$

$$Q(t, \theta) = \begin{pmatrix} q_0(\theta) & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n\nu & q_1(\theta) & 2\varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1}(\theta) & n\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu & q_n(\theta) \end{pmatrix}.$$

В системі (1) крім твірних функцій $\varphi_m(t, \theta)$ фігурують вирази $f_m(t, \theta)$, які містять частину шуканих ймовірностей, а саме ймовірність $P_{m,r}(t)$, $0 \leq r \leq n-1$.

Для розв'язування системи (1) використаний допоміжний двохвимірний марковський процес, однорідний за другою компонентою $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$. Такі процеси були запропоновані і досліджені Єжовим І. І. та Скороходом А. В. [3, 4] і широко використовуються при дослідженні різноманітних систем масового обслуговування.

Допоміжний процес тісно пов'язаний з процесом $\{\eta_t, \xi_t\}$ і задається так:

$$\eta_t^* \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \xi_t^* \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

ймовірності переходів $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$ із стану в стан за час $\Delta (\Delta \rightarrow 0)$ мають вигляд:

$$(m, r) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} (m, r) : 1 - (\lambda + m\varepsilon + (n-m) \times \\ \times (\mu + \nu)\Delta + o(\Delta)), \\ (m, r+k) : \lambda_k \Delta + o(\Delta), \\ (m, r-1) : (n-m)\mu\Delta + o(\Delta), \\ (m-1, r) : m\varepsilon\Delta + o(\Delta), \\ (m+1, r) : (n-m)\nu\Delta + o(\Delta), \end{cases}$$

$$m = 0, 1, \dots, n; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ймовірності інших переходів порядку $o(\Delta)$.

Нехай

$$P_{lm}^*(t, r) = P \left\{ \begin{array}{l} \eta_t^* = m, \xi_t^* = r / \eta_0^* = l, \\ \xi_0^* = 0, \end{array} \right\},$$

$$(l, m = 0, 1, \dots, n; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ймовірності станів допоміжного процесу (η_t^*, ξ_t^*) в припущенні, що в початковий момент часу $t = 0, \eta_0^* = l, \xi_0^* = 0$.

Із задання процесу $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$ видно, що він є марковським процесом, однорідним за другою компонентою.

В термінах твірних функцій

$$\Phi_{lm}^*(t, \theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} P_{lm}^*(t, r) \theta^r, \quad |\theta| \leq 1,$$

система прямих диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$ набуває вигляду аналогічного (1), але без доданків типу $f_m(t, \theta)$,

які породжують неоднорідність системи (1):

$$\frac{\partial \Phi_{lm}^*(t, \theta)}{\partial t} = [\lambda(\theta) - \lambda - (n-m)\mu \times \\ \times \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) - m\varepsilon - (n-m)\nu] \Phi_{lm}^*(t, \theta) + \\ + (1 - \delta_{mn})(m+1)\varepsilon \Phi_{l, m+1}^*(t, \theta) + \\ + (1 - \delta_{m0})(n+m-1)\nu \Phi_{l, m-1}^*(t, \theta), \quad (2)$$

де δ_{mn} - символ Кронекера, $l, m = 0, 1, \dots, n$.

Якщо ввести функцію

$$\Phi_{lm}^*(t, \theta) = e^{[\lambda - \lambda(\theta)]t} \Phi_{lm}^*(t, \theta)$$

та позначення

$$\bar{\Phi}^*(t, \theta) = (\Phi_{l_0}^*(t, \theta), \Phi_{l_1}^*(t, \theta), \dots, \Phi_{l_n}^*(t, \theta)),$$

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma_0(\theta) & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n\nu & \gamma_1(\theta) & 2\varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu & \gamma_n(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\gamma_m(\theta) = (n-m)\mu \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) - m\varepsilon - (n-m)\nu,$$

$$m = 0, 1, \dots, n,$$

то систему (2) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \bar{\Phi}^*(t, \theta)}{\partial t} = \Gamma(\theta) \bar{\Phi}^*(t, \theta), \quad (2')$$

звідки $\bar{\Phi}^*(t, \theta) = \exp\{\Gamma(\theta)t\}$.

Розв'язок $\bar{\Phi}^*(t, \theta)$ є матричною експонентою, і його можна використати для наближеного обчислення ймовірностей станів допоміжного процесу. Про це буде йти мова далі.

Враховуючи зв'язок між (1') та (2'), після ряду перетворень можна отримати залежність між ймовірностями станів процесів $\{\eta_t, \xi_t\}$ та $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$:

$$P_{kj}(t) = c_{k,j}(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^{n-i} \int_0^t [\nu(r-n+i-1)P_{ki}^* \times \\ \times (t-\tau, j-r)P_{i-1,r}(\tau) + (r-n+i)\bar{P}_{ki}^* \times \\ \times (t-\tau, j-r)P_{ir}(\tau)] d\tau, \quad (3)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\bar{P}_{ki}^*(t - \tau, j - r) = \mu P_{ki}^*(t - \tau, j - r + 1) -$
 $-(\mu + \nu) P_{ki}^*(t - \tau, j - r)$

$$c_{k,j}(t) = m_{k,j}(t) + b_{k,j}(t),$$

$$m_{k,j}(t) = \sum_{i=0}^n d_{k,j}(i, t),$$

$$b_{k,j}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{j+m,m}(k, t),$$

$$d_{k,j}(i, t) = \sum_{m=0}^j P_{im}(0) P_{ki}^*(t, j - m),$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

$$a_{j+m,m}(k, t) = \sum_{i=0}^n P_{i,j+m}(0) P_{ki}^*(t, -m).$$

З системи рівнянь (3) $P_{kj}(t)$ при $j \geq n$ можна рекурентно виразити через $P_{k0}(t)$, $P_{k1}(t)$, ..., $P_{k,n-1}(t)$. Останні ймовірності є розв'язком системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, яку отримаємо з (3) при $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Тепер розглянемо, як можна, використовуючи чисельні методи наближено обчислити ймовірності станів допоміжного процесу $P_{l,m}^*(t, r)$, через які виражаються ймовірності станів основного процесу $P_{kj}(t)$, оскільки явні аналітичні вирази через локальні характеристики процесу обслуговування одержати для них неможливо.

Покажемо це на прикладі, коли

$$n = 1, l = 0, \lambda = \lambda_1, \lambda_r = 0, r = 2, 3, \dots, k = 0.$$

У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$P_{0j}(t) = c_{0,j}(t) + \int_0^t [(\mu + \nu) \times P_{00}^*(t - \tau, j) -$$

$$- \nu P_{01}^*(t - \tau, j) - \mu P_{00}^*(t - \tau, j + 1)] P_{00}(\tau) d\tau.$$

Всі ймовірності станів $P_{0j}(t)$ при $j \geq 1$ рекурентно виражаються через $P_{00}(t)$ та $P_{0m}^*(t, j)$, $m = 0, 1$. $P_{00}(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$P_{00}(t) = C_{0,0}(t) + \int_0^t [(\mu + \nu) \cdot P_{00}^*(t - \tau, 0) -$$

$$- \nu P_{01}^*(t - \tau, 0) - \mu \cdot P_{00}^*(t - \tau, 1)] P_{00}(\tau) d\tau \quad (4)$$

Для знаходження

$$P_{0k}^*(t, r), k = 0, 1, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2')$$

маємо

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{00}^*(t, \theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{01}^*(t, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0(\theta) & \varepsilon \\ \nu & \gamma_1(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{00}^*(t, \theta) \\ \Phi_{01}^*(t, \theta) \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{00}^*(t, \theta) = \gamma_0(\theta) \Phi_{00}^*(t, \theta) + \varepsilon \Phi_{01}^*(t, \theta), \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{01}^*(t, \theta) = \nu \Phi_{00}^*(t, \theta) + \gamma_1(\theta) \Phi_{01}^*(t, \theta), \end{cases}$$

з початковими умовами

$$\Phi_{00}^*(0, \theta) = 1, \quad \Phi_{01}^*(0, \theta) = 0.$$

Розв'яжемо останню систему операційним методом. Нехай

$$\Psi_k(\theta, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Phi_{0k}^*(t, \theta) dt, \quad k = 0, 1,$$

- перетворення Лапласа шуканих функцій. Тоді отримаємо з урахуванням початкових умов систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\Psi_k(\theta, s)$:

$$\begin{cases} s\Psi_0(\theta, s) - 1 = \gamma_0(\theta)\Psi_0(\theta, s) + \varepsilon\Psi_1(\theta, s), \\ s\Psi_1(\theta, s) = \nu\Psi_0(\theta, s) + \gamma_1(\theta)\Psi_1(\theta, s). \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд:

$$\Psi_0(\theta, s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2},$$

$$\Psi_1(\theta, s) = \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2},$$

$$\text{де } s_1 = \frac{\gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta) + \sqrt{(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\varepsilon\nu}}{2},$$

$$s_2 = \frac{\gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta) - \sqrt{(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\varepsilon\nu}}{2},$$

$$A_1 = \frac{\gamma_1(\theta) - s_1}{s_2 - s_1}, \quad A_2 = \frac{s_2 - \gamma_1(\theta)}{s_2 - s_1},$$

$$B_1 = \frac{-\nu}{s_2 - s_1}, \quad B_2 = \frac{\nu}{s_2 - s_1}.$$

Корінь квадратний із комплексного числа $(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\varepsilon\nu$, як відомо, має два значення, які відрізняються знаком. В даному ви-

падку можна взяти будь-яке значення.

Звідси маємо

$$\Phi_{00}^*(t, \theta) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

$$\Phi_{01}^*(t, \theta) = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}.$$

Отже $\Phi_{0k}^*(t, \theta) = \Phi_{0k}^*(t, \theta) e^{-[\lambda - \lambda(\theta)]t}$, $k = 0, 1$.

При зроблених припущеннях $\lambda(\theta) = \lambda\theta$.

Враховуючи, що $\Phi_{0k}^*(t, \theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} P_{0k}^*(t, r) \theta^r$, $k = 0, 1$, де $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, на основі теореми Лорана маємо:

$$P_{0k}^*(t, r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\theta|=1} \frac{\Phi_{0k}^*(t, \theta)}{\theta^{r+1}} d\theta, \quad k = 0, 1. \quad (4)$$

Зробимо в (4) заміну змінних $\theta = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0; 2\pi]$). Отримаємо після ряду перетворень (з огляду на їх громізdkість вони тут не наводяться) вирази для $P_{00}^*(t, r)$ та $P_{01}^*(t, r)$ у вигляді визначених інтегралів.

Так

$$P_{00}^*(t, r) = \frac{1}{4\pi} e^{-\lambda t} \int_0^{2\pi} e^{\lambda t \cos \varphi} E(\varphi) \cos r\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} e^{-\lambda t} \int_0^{2\pi} e^{\lambda t \cos \varphi} F(\varphi) \cos r\varphi d\varphi,$$

де

$$E(\varphi) = \left(E_2(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_4(\varphi)t} + E_1(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_3(\varphi)t} \right) \cos(\lambda t \sin \varphi) -$$

$$- \left(F_2(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_4(\varphi)t} + F_1(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_3(\varphi)t} \right) \sin(\lambda t \sin \varphi),$$

$$F(\varphi) = \left(F_2(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_4(\varphi)t} + F_1(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_3(\varphi)t} \right) \cos(\lambda t \sin \varphi) +$$

$$+ \left(E_2(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_4(\varphi)t} + E_1(\varphi) e^{\frac{1}{2} E_3(\varphi)t} \right) \sin(\lambda t \sin \varphi),$$

$$E_1(\varphi) = \left(1 - \frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \right) \cos\left(\frac{1}{2} F_3(\varphi)t\right) +$$

$$+ \frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \sin\left(\frac{1}{2} F_3(\varphi)t\right),$$

$$F_1(\varphi) = \frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \cos\left(\frac{1}{2} F_3(\varphi)t\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \right) \sin\left(\frac{1}{2} F_3(\varphi)t\right),$$

$$E_2(\varphi) = \left(1 + \frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \right) \cos\left(\frac{1}{2} F_4(\varphi)t\right) +$$

$$+ \frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}} \sin\left(\frac{1}{2} F_4(\varphi)t\right),$$

$$E_3(\varphi) = \mu(\cos \varphi - 1) - \nu - \varepsilon - \sqrt{l} \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right),$$

$$F_3(\varphi) = \sqrt{l} \mu \left(\sin \frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi \right) + \mu \sin \varphi,$$

$$E_4(\varphi) = \mu(\cos \varphi - 1) - \nu - \varepsilon + \sqrt{l} \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right),$$

$$F_4(\varphi) = \sqrt{l} \sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right) - \mu \sin \varphi,$$

$$C(\varphi) = (\mu \cos \varphi - \mu - \nu + \varepsilon) \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right) -$$

$$- \mu \sin \varphi \left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi \right),$$

$$D(\varphi) = \mu \sin \varphi \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right) +$$

$$+ (\mu \cos \varphi - \mu - \nu + \varepsilon) \sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right),$$

$$\omega(\varphi) = \arg(A + iB), \quad l(\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\text{де } A = \mu^2 - 2\mu(\varepsilon - \nu) + \mu^2 - 2\mu(\varepsilon - \nu) + 4\varepsilon\nu,$$

$$B = [(\varepsilon - \mu - \nu)^2 + 4\varepsilon\nu] \sin 2\varphi +$$

$$+ 2\mu(\varepsilon - \mu - \nu) \sin \varphi.$$

$P_{01}^*(t, r)$ має вигляд:

$$\gamma(\varphi) = \gamma_1(\varphi) \cos(\lambda t \sin \varphi) - \delta_1(\varphi) \sin(\lambda t \sin \varphi),$$

$$\delta(\varphi) = \gamma_1(\varphi) \sin(\lambda t \sin \varphi) + \delta_1(\varphi) \cos(\lambda t \sin \varphi),$$

$$P_{01}^*(t, r) = \frac{\nu e^{-\lambda t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda t \cos \varphi}}{\sqrt{l}} \gamma(\varphi) \cos r\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{\nu e^{-\lambda t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda t \cos \varphi}}{\sqrt{l}} \delta(\varphi) \sin r\varphi d\varphi.$$

$$\text{Тут } \gamma_1(\varphi) = \alpha(\varphi) \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right) + \beta(\varphi) \sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right),$$

$$\delta_1(\varphi) = \alpha(\varphi) \sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right) + \beta(\varphi) \cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2} - \varphi\right),$$

$$\alpha(\varphi) = -e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t} \cos\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right) + e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t} \cos\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right),$$

$$\beta(\varphi) = e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t} \sin\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right) + e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t} \sin\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right).$$

Коли компонента допоміжного процесу ξ_t^* приймає великі за абсолютною величиною значення r , під знаком звичайних інтегралів в виразах $P_{00}^*(t, r)$ стоять швидкоосцилюючі функції. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за допомогою звичайних квадратурних формул (прямокутників, трапецій, Симсона) недоцільне. В цьому випадку можна скористатись методом Філона, який призначений для обчислення інтегралів виду

$$I_1 = \int_a^b f(p) \cos xp dp, I_2 = \int_a^b f(p) \sin xp dp,$$

коли x не є малою величиною [5].

Інтервал інтегрування ділиться на $2n$ частин з кроком h . Позначимо $\theta = xh$. Тоді основні розрахункові формули мають вигляд:

$$\int_a^b f(p) \cos xp dp \approx h \{ \alpha [f(b) \sin xb - f(a) \sin xa] + \beta C_{2n} + \gamma C_{2n-1} \},$$

$$\int_a^b f(p) \sin xp dp \approx h \{ -\alpha [f(b) \cos xb - f(a) \cos xa] + \beta S_{2n} + \gamma S_{2n-1} \},$$

де α, β, γ , які є функціями θ , визначаються з наступних співвідношень:

$$\theta^3 \alpha = \theta^2 + \theta \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta,$$

$$\theta^3 \beta = 2[\theta(1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta],$$

$$\theta^3 \gamma = 4[\sin \theta - \theta \cos \theta];$$

C_{2n} – сума всіх парних ординат кривої $y = f(p) \cos xp$, які знаходяться між a та b , за винятком половини першої та останньої ординати;

C_{2n-1} – сума всіх непарних ординат;

S_{2n} – сума всіх парних ординат кривої $y = f(p) \sin xp$, які знаходяться між a та b , за винятком половини першої та останньої ординати;

S_{2n-1} – сума всіх непарних ординат.

В методі Філона передбачається, що функція $f(p)$ з достатньою точністю апроксимується параболічною дугою на кожному з інтервалів

$$(a, a + 2h), (a + 2h, a + 4h), \dots,$$

$$(a + 2(n-1)h, a + 2nh),$$

де $a + 2nh = b$.

Для наближеного розв'язування інтегрального рівняння (4) можна скористатися, наприклад, методом скінченних сум [6].

Розглянемо інтервал $[0; t]$ і обчислимо $P_{00}(t)$. Візьмемо на інтервалі систему рівновіддалених точок $t_i = ih, i = \overline{0, n}$, де $h = \frac{t}{n}, t_n = t$. Покладемо в (4) $t = t_i$ та використаємо для наближеного обчислення інтегрального члену формулу лівосторонніх прямокутників з вузлами в точках t_0, t_1, \dots, t_{i-1} . Одержимо рекурентну процедуру:

$$P_{00}(0) = 1,$$

$$P_{00}(t_i) = c_{0,0}(t_i) + \sum_{k=0}^{i-1} [(\mu + \nu) P_{00}^*(t_i - t_k, 0) - \nu P_{01}^*(t_i - t_k, 0) - \mu P_{00}^*(t_i - t_k, 1)] P_{00}(t_k),$$

$$i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

звідки

$$P_{00}(t) = P_{00}(t_n) = c_{00}(t_n) + \sum_{k=0}^{n-1} [(\mu + \nu) P_{00}^*(t_n - t_k, 0) - \nu P_{01}^*(t_n - t_k, 0) - \mu P_{00}^*(t_n - t_k, 1)] P_{00}(t_k).$$

Таким чином, запропонована методика дає алгоритм розрахунку ймовірностей станів до

сліджу вальної системи з використанням чисельних методів. Ймовірності станів системи є найбільш інформативними її характеристиками. Використовуючи їх, можна розрахувати інші важливі характеристики роботи системи – середню довжину черги, середній час дозидання однією заявкою початку обслуговування, середнє число приладів, зайнятих обслуговуванням заявок та ін.

Крім того, збільшуючи значення t , можна наближено розрахувати час, через який в системі встановлюється стаціонарний режим роботи. Умови існування стаціонарного режиму в одно канальній системі масового обслуговування розглядуваного типу досліджувались в роботі [7].

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987.
2. Алиев Т. М. Управляемые пуассоновские процессы с границами и их применение. / Т. М. Алиев, И. И. Ежов - К.: Рукопись деп. в ВИНТИ 15 марта 1976 г., № 796 – 76 Деп.

3. Ежов И. И. Теория вероятностей и ее применения: Сб. статей. / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Марковские процессы, однородные по второй компоненте I. - Т. 14, № 1. - М., 1969. – С. 4-14.
4. Ежов И. И. Теория вероятностей и ее применения: Сборник статей. / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Марковские процессы, однородные по второй компоненте II. - Т. 14, № 4. - М., 1969. – С. 679 -692.
5. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. - М.: Гостехиздат, 1956.
6. Крылов В. И. Вычислительные методы. / В. И. Крылов, П. И. Монастырский, В. В. Бобков, Т. 2. - М.: Наука, 1977.
7. Алиев Т. М. Условие эргодичности однолинейной системы массового обслуживания с ненадежным прибором. Меж. вед. научн. сб. «Теория вероятности и математическая статистика». Вып. 14, 1976.

Надійшла до редакції 27.09.2007.