

УДК 693.54

## **ЗАЛЕЖНІСТЬ КУТА ТЕРТЯ ПРИ ТОЧКОВОМУ ТА ЛІНІЙНОМУ КОНТАКТАХ ВІД ДОПУСТИМИХ НАПРУЖЕНЬ**

Бондаренко Л.М., Бондаренко В.Д., Бочарова О.О., Колбун В.В.

*У статті подається аналіз формул для визначення кута тертя при допустимих значеннях контактних напружень. Показано, що при збільшенні допустимих контактних напружень збільшується й кут тертя.*

**Ключові слова:** кут тертя, допустиме напруження, тертя у русі, тягове зусилля.

**Бондаренко Л.М., Бондаренко В.Д., Бочарова Е.А., Колбун В.В. Зависимость угла трения при точечном и линейном контактах от допустимых напряжений.**

*В статье приводится анализ формул для определения угла трения при допустимых значениях контактных напряжений. Показано, что при увеличении допустимых контактных напряжений увеличивается и угол трения.*

**Ключевые слова:** угол трения, допустимое напряжение, трение в движении, тяговое усилие.

**Bondarenko LM, Bondarenko VD, Bocharova EA, Kolbun V.V. Dependence of the Friction Angle for Point and Linear Contacts on Allowable Stresses**

*The article gives an analysis of formulas for determining the angle of friction at acceptable values of contact stresses. It is shown that as the allowable contact stresses increase, the friction angle also increases.*

**Key words:** angle of friction, permissible stress, friction in motion, tractive effort.

1.Вступ. Для вирішення задачі про кут і конус тертя при коченні необхідно знати величину опору тертю коченню. Якщо при ковзанні опір залежить тільки від матеріалів і стану поверхонь, то коефіцієнт тертя кочення додатково залежить від розмірів поверхонь, що дотикаються та навантаження. Природно, що експериментально знайти величину опору коченню для можливих комбінацій тіл кочення та основи практично не можливо. Тому необхідні аналітичні залежності для визначення опору коченню, які не повинні утримувати емпіричні коефіцієнти на визначення яких інколи необхідні значні матеріальні витрати та час. Крім того, використання таких коефіцієнтів обмежує творчу ініціативу конструктора.

До появи класичної роботи Герца Г. [1] про проблему контактної взаємодії навряд чи змогли б з'явитися такі ж роботи про опір коченню.

Рейнолдс О. в 1875 році опублікував роботу [2] присвячену опору коченню в якій помилково довів, що джерелом опору коченню є тертя ковзання в місці контакту. Якщо це так, у чому ніхто не сумнівався внаслідок непорушного авторитету автора, то підшипники кочення почали змашувати також як і підшипники ковзання. Скільки витрачено коштів на змашення підрахувати важко, але, на нашу думку, це була одна із серйозних помилок, допущених вченим.

Тільки в 1955 році Табор Д. [3] експериментально довів, що при напруженнях, які не перевищують допустимих, витрати на ковзання не значні.

В [4] отримані аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення.

Для контакту циліндрів (лінійний контакт) коефіцієнт тертя кочення

$$k = \alpha \cdot \frac{2 \cdot b}{3 \cdot \pi}, \quad (1)$$

де  $b$  – півширина плями контакту в напрямку руху;  $\alpha$  – коефіцієнт гістерезисних витрат; для еліптичної (колової) площадки контакту

$$k = \alpha \cdot \frac{3}{16} \cdot b. \quad (2)$$

Джонсон К. вважає, що для більшості металів, завантажених у межах пружності, величина  $\alpha$  близька до одиниці.

У цих формулах коефіцієнт гістерезисних витрат  $\alpha$ , як виявилось, не співпадає з його величиною при розтягуванні – стисненні та залежить від великої кількості факторів, тому ці формули не отримали застосування в інженерній практиці.

Після 1955 року зацікавленість до цих досліджень знизилася, що, очевидно, пов'язане з такими обставинами:

а) Відносно дешеве паливо, в першу чергу на залізничному транспорті, не вимагало зменшення опору коченню, а дослідження його зменшення не давали належного наукового та практичного ефекту;

б) Активний перехід на нові види тяги (наприклад, електровози) привів до більш перспективних досліджень у цій галузі як з точки зору вкладу капіталу, так і наукового престижу;

в) Нові види тяги, зв'язку, покращення якості колії дозволили в порівняно короткі терміни суттєво підвищити швидкість руху потягів і переважним напрямком досліджень стало вивчення впливу на опір руху повітря.

В [5] отримані експериментально–теоретичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення:

При початковому лінійному контакті

$$k = 0,225 \cdot b \cdot e^{-1,2 \cdot R}; \quad (3)$$

При початковому точковому контакті

$$k = 0,16 \cdot b \cdot e^{0,2 \cdot R}, \quad (4)$$

де  $R$  – радіус тіла кочення (в метрах).

Порівняння формул (1) і (3), (2) і (4) показує, що з достатньою для практичних розрахунків точністю коефіцієнт гістерезисних витрат визначається експонентою.

Говорить про те, що  $\alpha \approx 1$  не приходиться: усе залежить від величини  $R$  і при, наприклад,  $R=0,20\text{м}$   $e^{-1,2 \cdot R} = 0,79$ , а  $e^{0,2 \cdot R} = 1,04$ .

Формули (3) і (4) дозволяють також визначити коефіцієнт тертя кочення спокою, питоме тягове зусилля, запропонувати метод експериментального визначення коефіцієнта тертя кочення в русі.

Нагадаємо, що граничне значення опору зміщенню прийнято називати силою тертя спокою, а її відношення до нормальної сили поверхні – коефіцієнтом тертя спокою або коефіцієнтом статичного тертя.

## 2. Постановка задачі та її розв'язання.

2.1 З використанням формул (3) і (4) знайдемо кут тертя кочення, як кут між напрямком нормальної реакції  $\vec{N}$  і повною реакцією  $\vec{R}_{\text{max}}$  (рис. 1), яка відповідає максимальному значенню сили статичного тертя кочення.

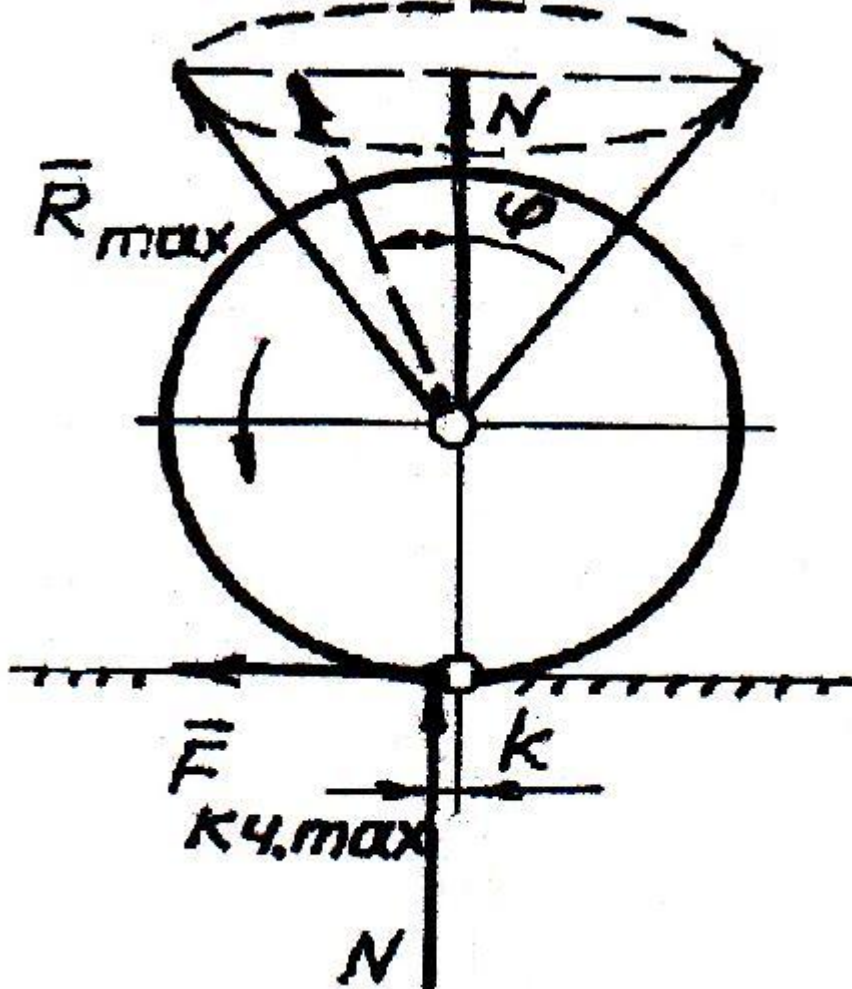


Рис. 1. До визначення конуса тертя кочення кулі по площині.

2.1.1 Розглянемо спочатку схему дотику сферичне тіло радіусом  $R_1$  – площина. Нормальній реакції буде відповідати сила  $N$ , яка знаходиться з умови допустимих контактних напружень між сферою та площиною. При

умові, що модулі пружності матеріалів однакові ( $E_1=E_2=E$ ), а коефіцієнти Пуассона дорівнюють  $\mu_1=\mu_2=0,3$  [6]

$$N = \frac{17,12 \cdot R_1^2 \cdot \sigma^3}{E^2} \quad (5)$$

Величину  $F_{\text{коч.мах}}$  знайдемо скориставшись формулами для визначення  $b$  і  $k$ .

Оскільки для цієї схеми контакту

$$b = \frac{1,109}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{E} \cdot R_1}, \quad (6)$$

то [7]

$$k = 0,089 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{E} \cdot R_1} \cdot e^{0,2 \cdot R_1} \quad (7)$$

або через допустимі контактні напруження

$$k = 0,229 \cdot \frac{\sigma \cdot R_1}{E} \cdot e^{0,2 \cdot R_1}. \quad (8)$$

Сила статичного тертя кочення

$$F_{\text{коч.мах}} = \frac{3,9 \cdot R_1 \cdot \sigma^4}{E^3} \cdot e^{0,2 \cdot R_1}. \quad (9)$$

Коефіцієнт статичного тертя кочення сфери по площині

$$f_0 = 0,228 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot e^{0,2 \cdot R_1} = 0,228 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \exp\left(\frac{0,48}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{N \cdot E^2}{\sigma}}\right) = \text{tg} \alpha_0. \quad (10)$$

Залежність  $f_0$  від допустимих контактних напружень показані на рис. 2а.

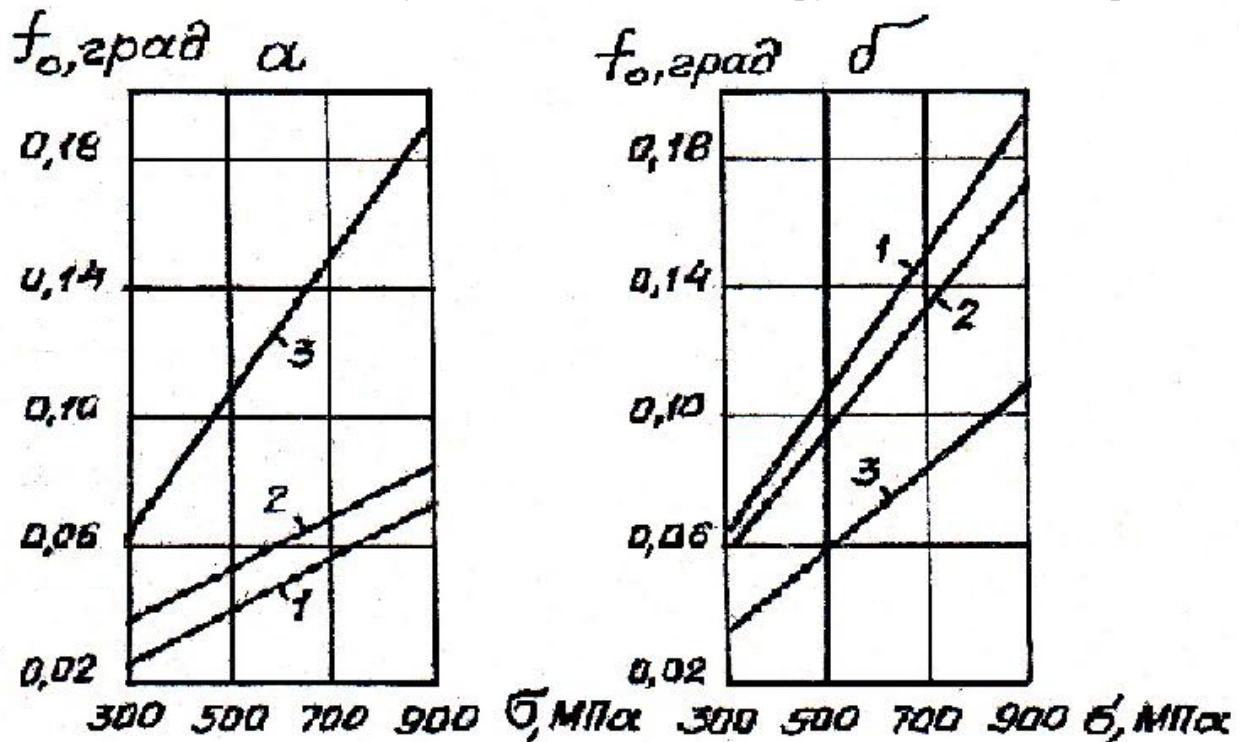


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів статичного тертя кочення кулі (а) та циліндра (б) по площині від допустимих контактних напружень: 1 –  $R_1=50$ ; 2 –  $R_1=100$ ; 3 –  $R_1=500$  мм.

2.1.2 Знайдемо величину  $f_0$  для циліндра і площини.

Величина нормальної реакції при ширині циліндра  $B$

$$N = \frac{5,72 \cdot B \cdot R_1 \cdot \sigma^2}{E}. \quad (11)$$

Коефіцієнт тертя кочення при початковому лінійному контакті визначається формулою (3).

Оскільки півширина плями контакту при цій схемі дотику

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{N \cdot R_1}{B \cdot E}}, \quad (12)$$

тоді

$$k = 0,343 \cdot \sqrt{\frac{N \cdot R_1}{B \cdot E}} \cdot e^{-1,2 \cdot R_1}; \quad (13)$$

або через допустимі контактні напруження

$$k = 0,82 \cdot \frac{R_1 \cdot \sigma}{E} \cdot e^{-1,2 \cdot R_1}. \quad (14)$$

Коефіцієнт статичного тертя кочення циліндра по площині

$$f_0 = \frac{0,143}{B \cdot N \cdot \sigma} \cdot e^{-1,2 \cdot R_1}. \quad (15)$$

Залежності  $f_0$  від допустимих контактних напружень для циліндра довжиною  $B=50$ мм показані на рис. 2б.

### 3 Коефіцієнт тертя спокою

#### 3.1 Коефіцієнт тертя спокою для кулі

Якщо куля вагою  $G$  (або приведеною вагою) знаходиться на похилій площині з кутом ухилу  $\alpha_0$  (рис. 3), то по нормалі до поверхні кочення буде діяти сила  $G_2 = G \cos \alpha_0$ , а по напрямку паралельному площині сила  $G_1 = G \sin \alpha_0$ . Складова ваги  $G_2$  викличе з збоку площини нормальну реакцію  $N$ , а вона при умові граничної рівноваги силу тертя кочення

$$F_0 = \frac{k_0}{R} \cdot N. \quad (16)$$

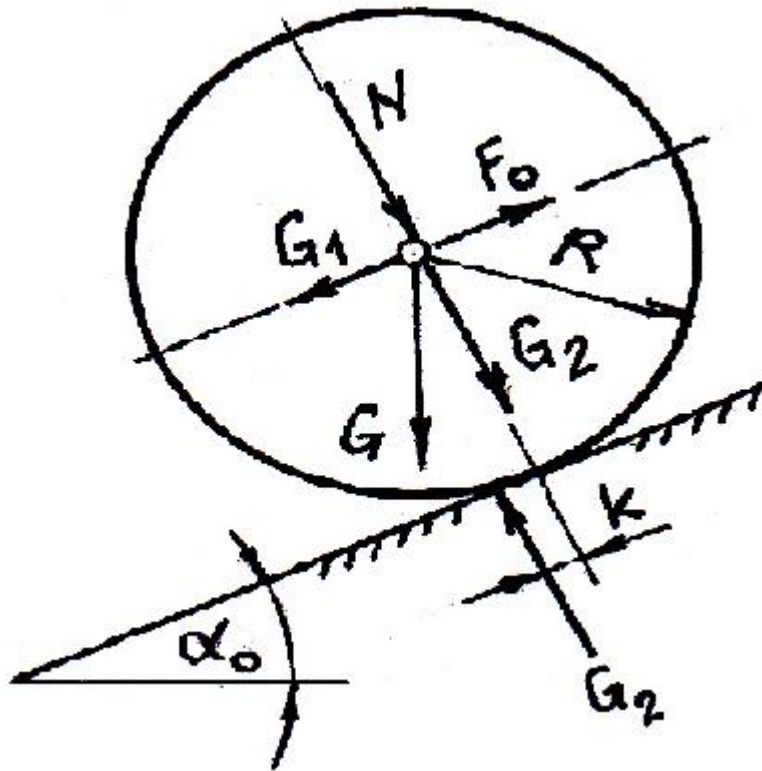


Рис. 3. До розрахунку коефіцієнта тертя спокою.

Оскільки  $N=G_2$ , то  $F_0=k_0G_2/R$ , де  $k_0$  – коефіцієнт тертя кочення граничної рівноваги.

Якщо  $G_1>F_0$ , то рівновага неможлива і куля буде рухатись рівноприскоренно; якщо  $G_1<F_0$  куля буде знаходитись у стані спокою; у випадку  $G_1=F_0$  куля буде знаходитись у стані граничної рівноваги.

Величина  $G_2$  із умови найбільших контактних напружень знайдеться з виразу (5), а скориставшись формулами (6), (8), (16) і маючи на увазі, що  $F_0=G_2 \operatorname{tg} \alpha_0$ , отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 0,23 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \exp(0,2 \cdot R). \quad (17)$$

Залежності  $k_0$  від величини допустимих контактних напружень при  $R=500\text{мм}$  показані на рис. 4.

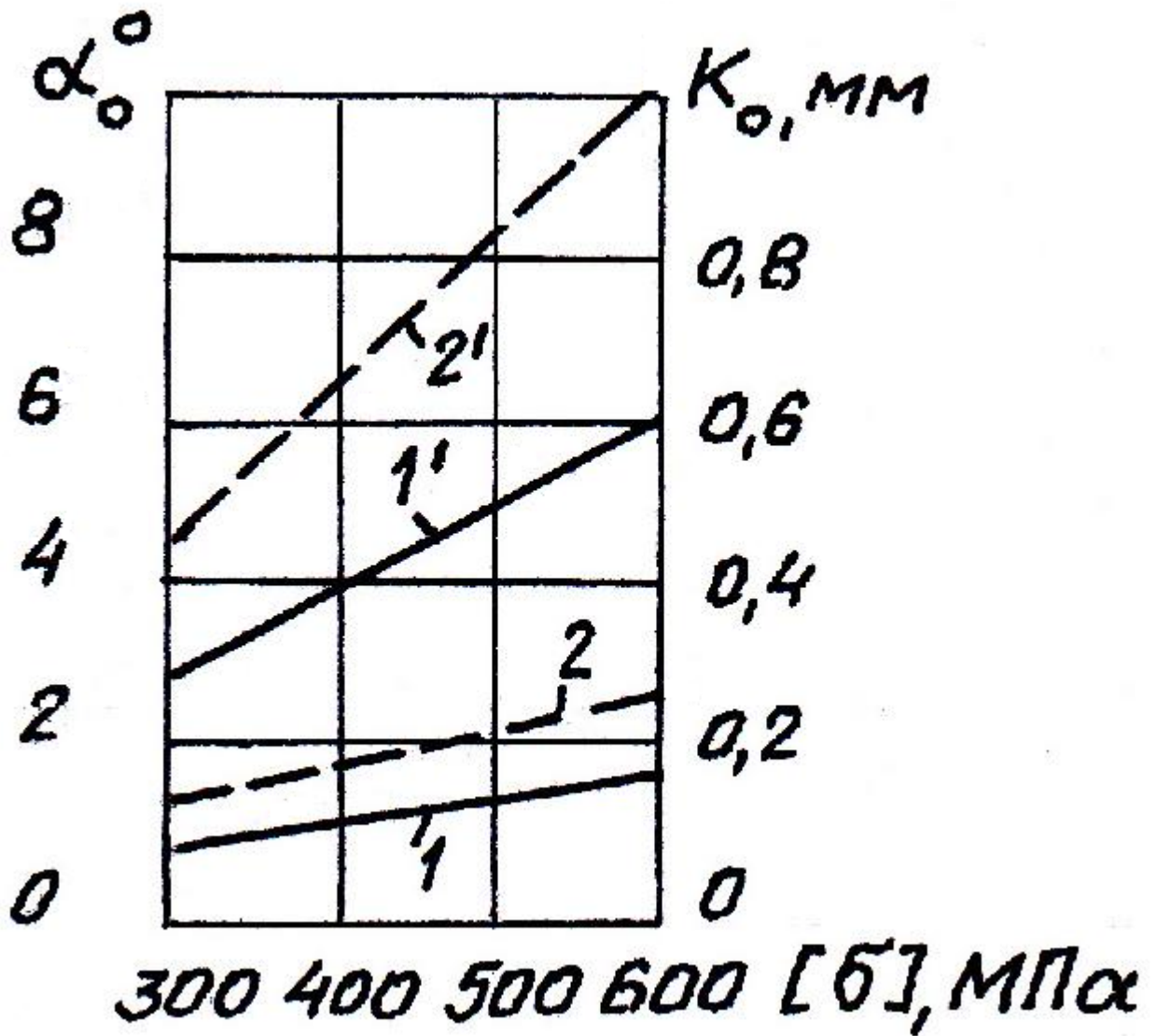


Рис. 4. Залежності мінімального кута тертя спокою та коефіцієнта тертя кочення від допустимих контактних напружень: 1,1 –  $\alpha_0$  для кулі та циліндра однакових об'ємів; 2,2 – відповідно  $k_0$ .

#### 4 Питоме тягове зусилля при коченні

У випадку рівномірного руху кулі повинна виконуватись рівність  $P_1 = kN/R = F$  (рис. 5), де  $F$  – сила тертя, яка викликана нормальним тиском  $N$ .

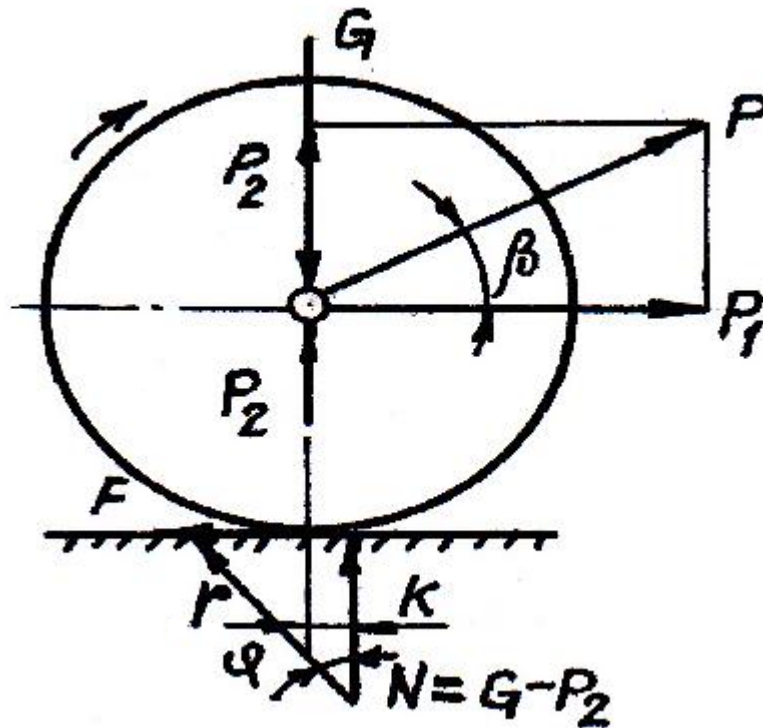


Рис. 5. До визначення питомого тягового зусилля для кулі.  
Оскільки  $N = G - P_2 = G - P \sin \beta$ , то

$$P = \frac{k \cdot G}{R \cdot (\cos \beta + k \cdot \sin \beta / R)}. \quad (18)$$

Для кулі  $k = R \tan \varphi$ , де  $\varphi$  – кут тертя кочення і

$$P = \frac{G \cdot \sin \varphi}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (19)$$

Тягове зусилля, що припадає на одиницю довжини переміщення кулі

$$P_{nm} = \frac{P}{G} = \frac{\sin \varphi}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (20)$$

Знаменник рівняння (18) приймає максимальне значення, коли його диференціал буде дорівнюватися нулю, тобто

$$\sin \beta = \frac{k}{R} \cdot \cos \beta \quad (21)$$

Переписавши цей вираз через  $k$  і  $R$  отримаємо

$$\sin \beta = \frac{0,23 \cdot \sigma \cdot \cos \beta}{E} \cdot \exp(0,2 \cdot R), \quad (22)$$

звідки

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,23 \cdot \sigma}{E} \cdot \exp(0,2 \cdot R). \quad (23)$$

### 5 Експериментальне визначення коефіцієнта тертя в русі

Для тертя ковзання, як відомо, ця задача вирішена Ейлером Л. у 1750 році.

Якщо кут ухилу площини  $\alpha$  більше величини  $k/R$ , то куля під дією постійної сили  $P = G - F$  буде рухатись рівноприскоренно униз.

Сила тертя кочення  $F = kG \cos \alpha / R$  і підставивши це значення для сили  $P$ , отримаємо  $P = G(\sin \alpha - k \cos \alpha / R)$ .



Якщо  $m$  – маса кулі;  $a$  – прискорення в напрямку дії сили, то при рівноприскореному русі  $l=at^2/2$  і  $a=2l/t^2$ , а

$$P = \frac{2 \cdot G \cdot l}{g \cdot t} = G \cdot \left( \sin \alpha - \frac{k}{R} \cdot \cos \alpha \right)$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot l}{g \cdot t^2 \cdot \cos \alpha} + 0,23 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \exp(0,2 \cdot R), \quad (24)$$

Для циліндра ця формула приймає вигляд

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot l}{g \cdot t^2 \cdot \cos \alpha} + 0,82 \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \exp(-1,2 \cdot R). \quad (25)$$

### Висновки.

1. Як і при терті ковзання існує кут і конус тертя, що визначаються для металів аналітично з використанням загально прийнятих механічних констант матеріалів і розмірів тіл, які контактують.

2. Кут тертя кочення практично лінійно збільшується зі збільшенням допустимих контактних напружень як при точковому, так і лінійному контактах.

3. Запропанована методика дозволяє аналітично знаходити мінімальний кут тертя спокою та тягове зусилля при коченні.

### Література

1. Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids)*. – *J reine und angewandte Mathematik*, 1882. – S. 156-171.

2. Reynolds O. *In rolling friction*. – *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 1875. – P. 155.

3. Tabor D. *The mechanism of rolling friction: the elastic range*. – *Proc. Roy. Soc.*, 1955. – P. 198.

4. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. – М: Мир, 1989. – 510 с.

5. Бондаренко Л.М., Довбня М.П., Ловейкін В.С. *Деформаційні опори в машинах*. – Дніпропетровськ: Дніпро – VAL, 2002. – 200 с.

6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов*. – Киев: Наук. думка. – 1988. – 736 с.

7. Бондаренко В.Д., Бондаренко Л.М. *Визначення практичних залежностей коефіцієнта тертя кочення / Theoretical Foundations of Civil Engineering*. – Warsaw – Vilnius. – 2006. – P. 521 – 524.